

## NUMERICAL STUDY OF FAILURE MODES ON SLEEVE CONNECTIONS SUBJECTED TO COMPRESSION

**Matheus Miranda de Oliveira<sup>1</sup>**

*matheusmoliveira4@gmail.com*

**Lucas Roquete<sup>2</sup>**

*lucasroquete@gmail.com*

**Arlene Maria Cunha Sarmanho<sup>1</sup>**

*arlene.sarmanho@gmail.com*

<sup>1</sup> *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Morro do Cruzeiro, Ouro Preto/MG, Brasil*

<sup>2</sup> *Departamento de Tecnologia em engenharia Civil Computação e Humanidades, Universidade Federal de São João del Rei - UFSJ-- Campus Alto Paraopeba, Ouro Branco/MG, Brasil*

**Abstract.** This work presents a study of failure modes on a type of connection between circular hollow sections (CHS), called sleeve connection. It allows a harmony in the continuity of tubular profiles, becoming a discrete connection in a real structure. The proposed connection is composed of two tubes, in which an inner tube with a smaller diameter is connected to the outer tubes by bolts. The objective is to evaluate the behavior of sleeve connections subjected to compression, evaluating the possible failure modes caused by the variation of the number of bolts and inner tube geometric properties. The studies were performed through a numerical analysis using the finite element computer program ANSYS. From this model, the variation of the number of bolts and inner tubes properties was performed, where alterations in the connection's rigidity were observed. Thus, with the discovery of the failure modes it is possible to propose analytical formulations for sleeve connection design subjected to compression.

**Keywords:** numerical analysis, steel structures, circular hollow sections, connections and bolt connection

## **ESTUDO NUMÉRICO SOBRE OS MODOS DE FALHA EM LIGAÇÕES TIPO LUIVA SOB COMPRESSÃO**

**Matheus Miranda de Oliveira<sup>1</sup>**

*matheusmoliveira4@gmail.com*

**Lucas Roquete<sup>2</sup>**

*lucasroquete@gmail.com*

**Arlene Maria Cunha Sarmanho<sup>1</sup>**

*arlene.sarmanho@gmail.com*

<sup>1</sup> *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Morro do Cruzeiro, Ouro Preto/MG, Brasil*

<sup>2</sup> *Departamento de Tecnologia em Engenharia Civil Computação e Humanidades, Universidade Federal de São João del Rei - UFSJ-- Campus Alto Paraopeba, Ouro Branco/MG, Brasil*

**Resumo.** Este trabalho apresenta um estudo sobre os modos de falha de uma tipologia de ligação entre perfis tubulares circulares, denominada luva. A ligação permite uma harmonia na continuidade de perfis tubulares, tornando-se uma ligação discreta na estrutura real. É composta por dois tubos ligados internamente por meio de outro tubo de diâmetro menor e com parafusos passantes alinhados. Nesse contexto, neste trabalho tem-se como objetivo avaliar o comportamento da ligação luva submetida à compressão, analisando os possíveis modos de falha decorrentes da variação do número de parafusos e dos parâmetros geométricos do tubo interno. Os estudos foram realizados por meio de uma análise numérica em elementos finitos utilizando o programa computacional ANSYS. A partir deste modelo foi possível a variação da quantidade de parafusos e das propriedades dos tubos internos, podendo-se observar alterações na rigidez da ligação.

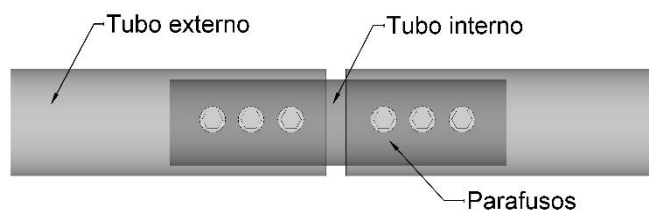
**Palavras-chave:** Análise numérica, estruturas metálicas, perfis tubulares circulares, ligações parafusadas.

## 1 Introdução

A utilização de perfis tubulares de aço vem sendo difundida em sistemas estruturais treliçados, tem-se buscado facilitar a execução e manutenção, reduzir custos e melhorar o projeto das estruturas. Os perfis tubulares apresentam excelentes características mecânicas e geométricas, principalmente em relação a capacidade resistente a esforços de compressão, torção e efeitos combinados [1].

Diante dos diversos estudos sobre perfis tubulares, destaca-se as pesquisas sobre as ligações e emendas. No caso de emendas em barras de treliçadas é tradicional o uso de ligações do tipo flangeadas, avaliadas por [2–6], todavia, novas formas de emendas vêm sendo propostas para possibilitar melhorias estéticas e de manutenção, como o modelo de ligação tipo luva.

A ligação tipo luva é formada por perfis tubulares circulares de aço, sendo dois tubos de mesmo diâmetro unidos internamente por outro tubo de menor diâmetro e com parafusos passantes alinhados, conforme apresentado na Figura 1.



**Figura 1: Ligação luva com parafusos alinhados**

A aplicação da ligação tipo luva para emenda entre perfis tubulares de seção circular proporciona uma nova alternativa aos projetistas em comparação a ligação flangeada, usualmente empregada [10]. Além disso, oferece uma nova identidade estética para as emendas de perfis tubulares e apresenta uma funcionalidade para sua utilização e montagem em sistemas treliçados.

A ligação tipo luva entre perfis tubulares de seção circular vem sendo estudada em diversas pesquisas submetido a esforços de tração [7–17], com parafusos alinhados e cruzados, contendo avaliações numéricas e experimentais. Silva [8] e Amparo [11] avaliaram a ligação por meio de ensaios experimentais sob tração, com variações de espessura de tubo, número de parafusos e a disposição dos parafusos, cruzados e alinhados, notando a necessidade da consideração de um coeficiente de redução da seção líquida para o dimensionamento do estado limite de ruptura da seção líquida efetiva, relativa ao aparecimento do efeito *shear lag*.

Viera [10] e Roquete [9] realizaram um estudo numérico, experimental e paramétrico da ligação sob tração, propondo formulações para determinação da capacidade resistente da ligação, estudando seus modos de falha, sendo eles: escoamento da seção bruta, ruptura da seção líquida, cisalhamento dos parafusos, ovalização dos furos, flexão nos parafusos.

Devido a existência de estudos sobre essa ligação somente sob tração, pretende-se difundir sua

utilização e entendimento sobre seus mecanismos de falha realizando uma avaliação da ligação tipo luva sob compressão.

Portanto, o trabalho tem como objetivo identificar os modos de falha da ligação luva submetida à compressão com parafusos passantes alinhados variando o número de parafusos, os diâmetros e espessuras do tubo interno da ligação. Para a avaliação da ligação foi desenvolvido um modelo numérico via elementos finitos utilizando o software ANSYS [18]. Logo, foi possível verificar o comportamento da ligação tipo luva sob compressão.

## **2 Análise Numérica**

O modelo numérico da ligação luva foi desenvolvido utilizando o software comercial de elementos finitos ANSYS [18], possibilitando a avaliação do comportamento da emenda estudada. Neste item são apresentadas as características geométricas e as propriedades do modelo numérico elaborado.

### **2.1 Modelo**

O modelo numérico foi criado para representar a ligação luva completa, com variações no número de parafusos e no diâmetro e espessura do tubo interno, num total de 25 modelos numéricos. As propriedades e características mecânicas dos modelos estão apresentadas na Tabela 1. O módulo de elasticidade do aço considerado nas análises foi de 200 000 MPa e o coeficiente de Poisson 0,3. O aço considerado nos parafusos foi o ASTM A325.

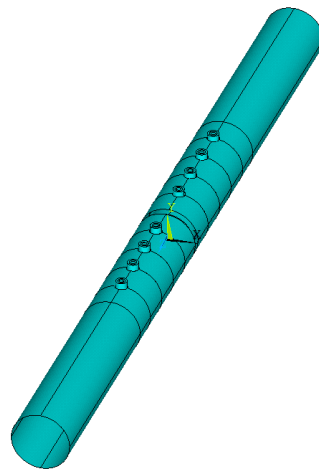
A ligação tipo luva completa é constituída por dois tubos externos conectado por outro tubo interno por meio de parafusos alinhados, com configuração apresentada na Figura 2. Amparo [11] simplifica os modelos devido à redução de custos nos ensaios experimentais, porém durante a aplicação de carregamento à compressão existe a possibilidade dos tubos externos se encostarem, justificando a escolha da modelagem do modelo completo.

O modelo foi elaborado sem a modelagem da cabeça dos parafusos pois não influencia nos resultados, conforme apresentado por Vieira [10]. Para melhorar a criação das malhas, elaborou-se o modelo numérico ao longo de distâncias definidas no eixo longitudinal da ligação.

**Tabela 1: Características dos modelos**

Modelo	N	Tubo Externo				Tubo Interno				Parafusos		
		$D_{ext}$ (mm)	$t_{ext}$ (mm)	$f_y$ (MPa)	$f_u$ (MPa)	$D_{int}$ (mm)	$t_{int}$ (mm)	$f_y$ (MPa)	$f_u$ (MPa)	$d_b$ (mm)	$f_{yb}$ (MPa)	$f_{ub}$ (MPa)
L4P-01	4	78,6	5,6	350	485	65,9	5,6	350	485	16	635	825
L4P-02						66,7	6,4					
L4P-03						67,4	7,1					
L4P-04						68,3	8					
L4P-05						69,1	8,8					
L6P-01	6	78,6	5,6	350	485	65,9	5,6	350	485	16	635	825
L6P-02						66,7	6,4					
L6P-03						67,4	7,1					
L6P-04						68,3	8					
L6P-05						69,1	8,8					
L8P-01	8	78,6	5,6	350	485	65,9	5,6	350	485	16	635	825
L8P-02						66,7	6,4					
L8P-03						67,4	7,1					
L8P-04						68,3	8					
L8P-05						69,1	8,8					
L10P-01	10	78,6	5,6	350	485	65,9	5,6	350	485	16	635	825
L10P-02						66,7	6,4					
L10P-03						67,4	7,1					
L10P-04						68,3	8					
L10P-05						69,1	8,8					
L12P-01	12	78,6	5,6	350	485	65,9	5,6	350	485	16	635	825
L12P-02						66,7	6,4					
L12P-03						67,4	7,1					
L12P-04						68,3	8					
L12P-05						69,1	8,8					

$N$  – número de parafusos  
 $D_{ext}$  – diâmetro do tubo externo  
 $t_{ext}$  – espessura do tubo externo  
 $D_{int}$  – diâmetro do tubo interno  
 $t_{int}$  – espessura do tubo interno  
 $d_b$  – diâmetro do parafuso  
 $f_y$  – tensão de escoamento do tubo  
 $f_u$  – tensão de ruptura do tubo  
 $f_{yb}$  – tensão de escoamento do parafuso  
 $f_{ub}$  – tensão de ruptura do parafuso



**Figura 2: Configuração do modelo numérico**

O método numérico empregado para análise foi o Método dos Elementos Finitos, pois permite avaliar a complexa interação entre os componentes da ligação. Logo, podem ser construídos modelos com as condições de contorno e refinamento da malha de elementos finitos adequados, permitindo também a aplicação das características dos materiais, deslocamentos e regiões de contato.

Para representação das propriedades físicas do material, utilizou-se uma relação tensão *versus* deformação multilinear (Multilinear Isotropic Hardening) para aço dos tubos e parafusos conforme apresentado por Salmon e Johnson [19] para aços de alta resistência e baixo carbono, ilustrado na Figura 3.

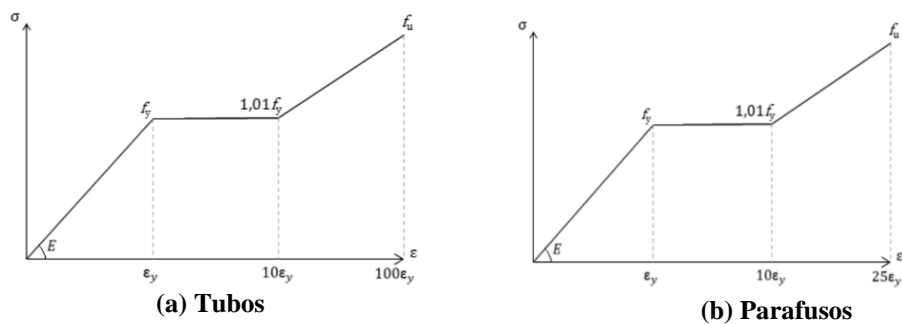


Figura 3: Curva de tensão *versus* deformação

## 2.2 Elementos finitos utilizados

Foram escolhidos dois tipos de elementos finitos para a representação da ligação tipo luva. Para os tubos, empregou-se os elementos tipo casca SHELL181, um elemento estrutural homogêneo de casca com quatro nós que aceita malhas irregulares, possibilitando também a aplicação de carga em qualquer direção. O SHELL181 possui seis graus de liberdade por nó, com geometria e posição dos nós representada na Figura 4. Para representação dos parafusos utilizou-se o elemento finito do tipo sólido, SOLID186, um elemento de sólido estrutural homogêneo de ordem superior que possui 20 nós e que aceita malhas irregulares, que possibilita a aplicação de carga em qualquer direção. O SOLID186 possui três graus de liberdade por nó, ilustrado na Figura 5.

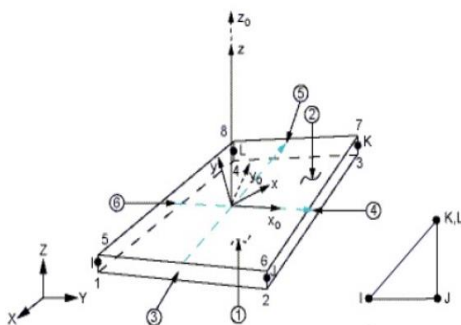


Figura 4: Elemento SHELL 181. Ansys [20]

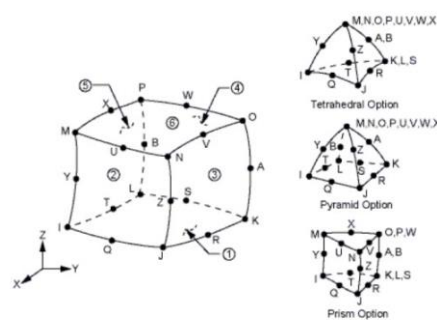
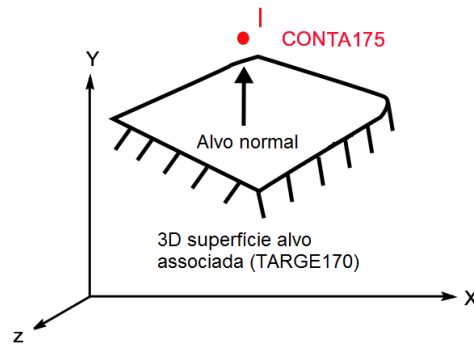


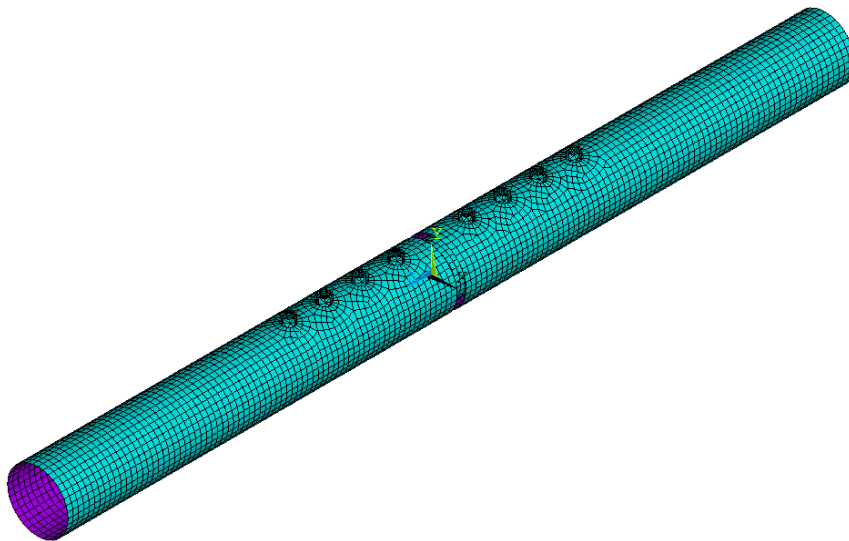
Figura 5: Elemento SOLID186. Ansys [20]

Para simular o contato dos parafusos e a extremidade dos furos foi utilizado o par de contato TARGE170 e CONTA175, conforme apresentado na Figura 6.



**Figura 6: CONTA 175 e TARGE 170. Ansys [20]**

A geração da malha em um modelo pode ser feita de forma livre ou mapeada. Utilizou-se a malha livre para discretização do modelo contínuo da ligação, com comprimento da malha de 6 mm para o elemento SHELL181, representando os tubos e de 5 mm para o elemento SOLID186, representando os parafusos, o modelo discretizado está ilustrado na Figura 7.



**Figura 7: Modelo numérico após geração das malhas**

Para as condições de contorno, os nós das extremidades dos tubos externos foram acoplados. Em uma extremidade foram impedidos os deslocamentos e rotações em todas as direções e na outra extremidade os nós ficaram livres na direção da aplicação do deslocamento, Figura 8. O deslocamento total aplicado foi de 40 mm para modelos com 4 parafusos e 30mm para os demais, utilizando incrementos de deslocamentos de 0,4 e 0,3 mm, respectivamente. Para a resolução do modelo numérico empregou-se o método incremental iterativo Newton-Raphson Completo (NROPT,FULL).

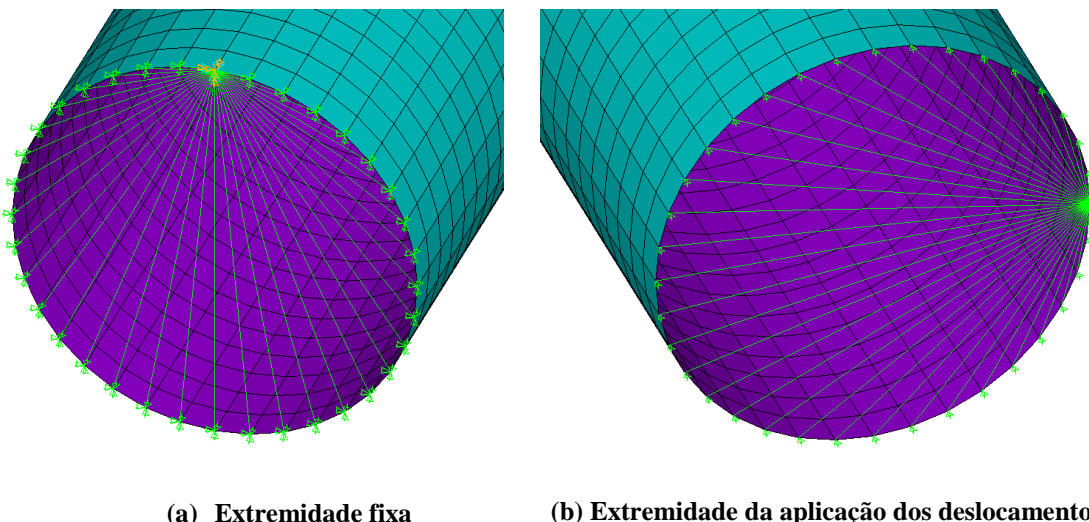


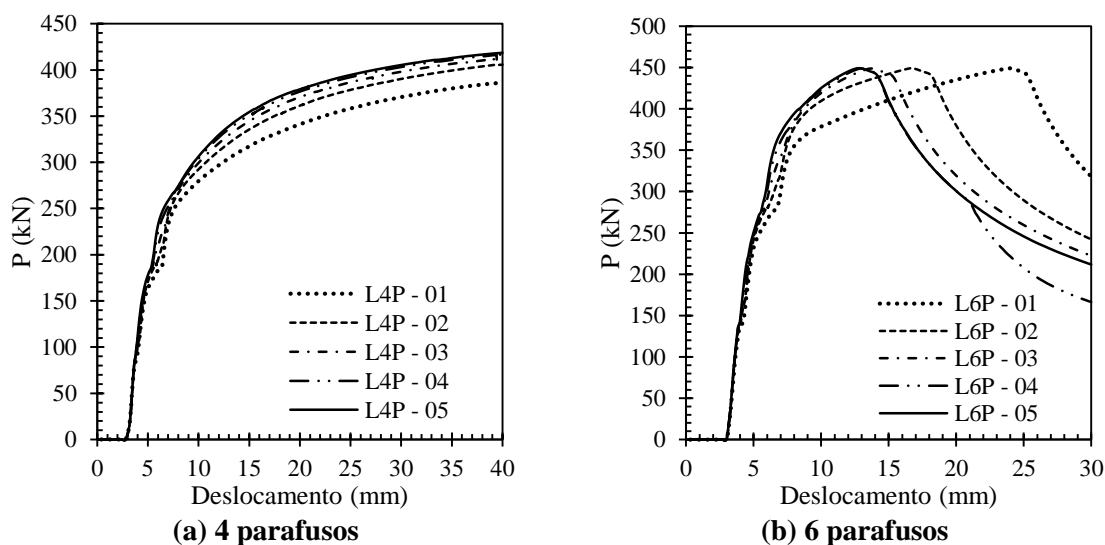
Figura 8: Condições de contorno na extremidade do tubo externo

### 3 Apresentação dos resultados

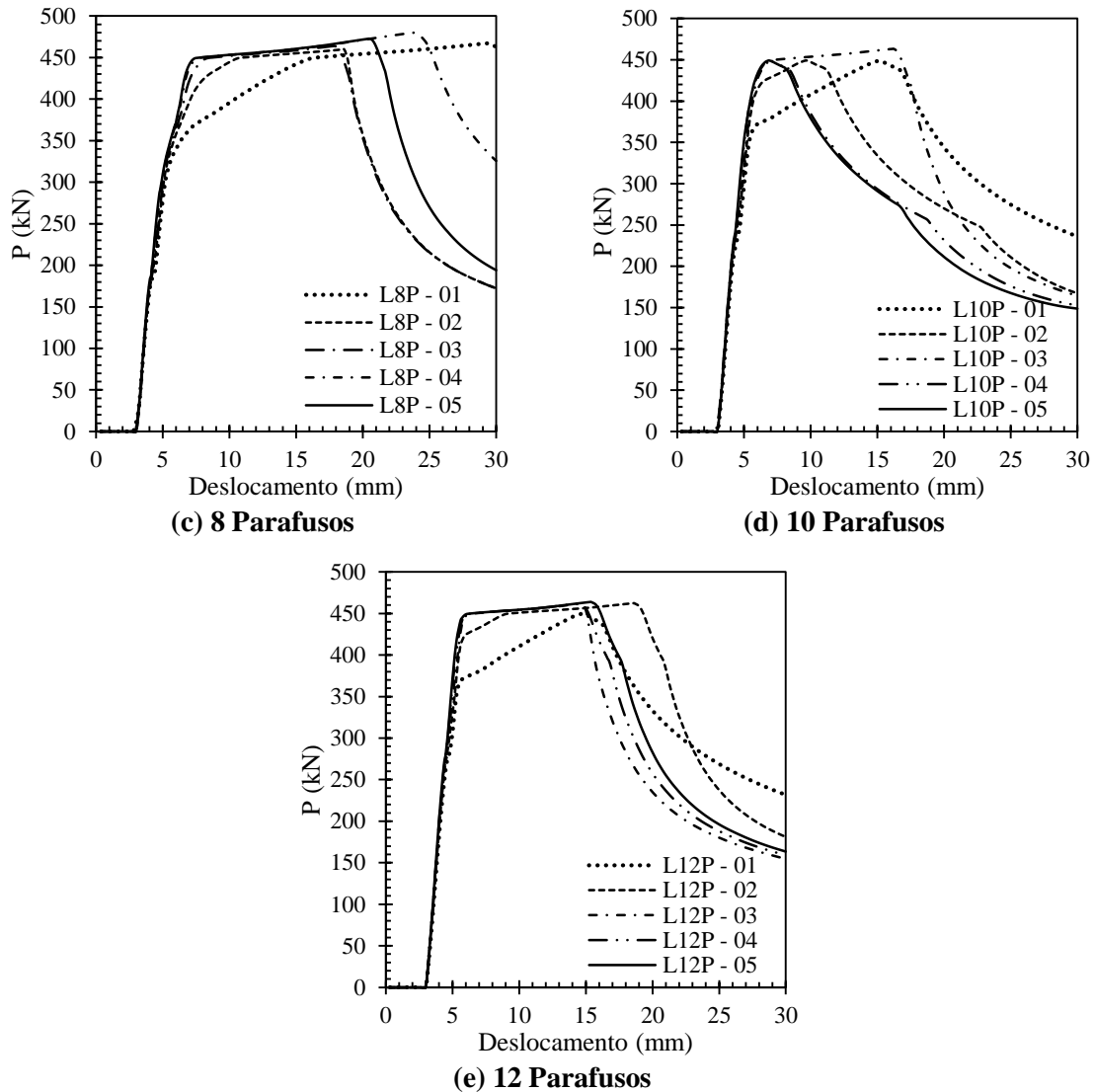
Para a avaliação da resistência dos modelos é necessário definir quando se inicia as falhas da ligação. Assim, foram utilizados dois critérios para indicar a falha da ligação: deformação excessiva e pico de resistência. Logo, foram analisadas as deformações e tensões de Von Mises, para determinação da falha e do valor da capacidade resistente da ligação.

#### Influência do tubo interno

Avaliou-se os 25 modelos numéricos, com ligações compostas por 4, 6, 8, 10 e 12 parafusos e variações das características geométricas do tubo interno ( $t_{int}$ ), conforme apresentado na Tabela 1. Analisou-se 5 modelos por número de parafusos, variando o diâmetro e a espessura do tubo interno, com a relação força versus deslocamento dos modelos apresentados na Figura 9.





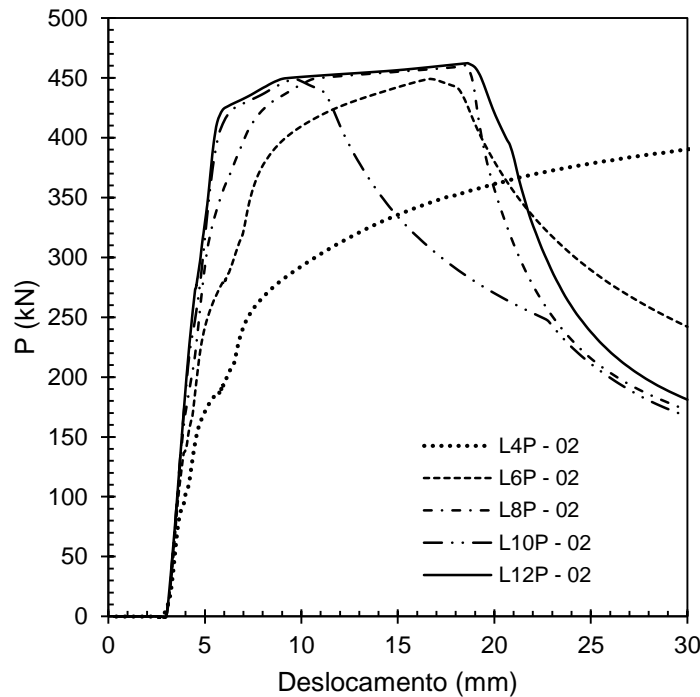


**Figura 9: Curva carga versus deslocamento dos modelos**

Fazendo-se uma comparação entre os gráficos, nota-se que a medida se aumenta os diâmetros e as espessuras do tubo interno, conseqüentemente a rigidez da ligação cresce, fato que pode ser observado devido ao aumento da inclinação após o trecho linear dos gráficos (fase elástica). As mudanças de inclinação podem caracterizar algum mecanismo de falha na ligação. Percebe-se que os modelos com diâmetros e espessuras do tubo interno menores possuem maiores deslocamentos podendo assim controlar o comportamento da ligação, apresentando possíveis falhas e diminuindo a capacidade resistente.

### **Influência do número de parafusos**

Para a análise da influência do número de parafusos foram avaliados 5 modelos com 4, 6, 8, 10 e 12 parafusos com as mesmas propriedades físicas e propriedades geométricas, com valores iguais de diâmetros e espessura dos tubos internos e externos e dos parafusos. A Figura 10 apresenta as curvas força versus deslocamentos de cada modelo.



**Figura 10: Variação do número de parafusos para o Modelo 02**

Percebe-se que o aumento do número de parafusos influencia a capacidade resistente da ligação, observando um aumento considerável da capacidade máxima resistente com o acréscimo de parafusos. O modelo com 4 parafusos apresenta um comportamento inferior aos outros modelos, proporcionando discussões sobre a viabilidade de sua utilização. Em ligações com 8 parafusos ou mais observa-se um comportamento parecido na ligação, apresentando maior rigidez e menores deslocamentos.

### **Avaliação dos modos de falha**

Ao analisar todos os gráficos e avaliar os critérios de falha, notou-se que as falhas ocorreram nos tubos da ligação. Nesse contexto, avaliou-se as tensões de Von Mises do modelo L8P-02 no momento da falha, segundo o critério de pico de resistência e concluiu-se que o modo de falha da ligação foi o escoamento da seção dos tubos, com a distribuição de tensões ilustrada na Figura 11. Sendo assim, observou-se que no tubo externo o escoamento da seção ocorreu depois do último furo e no tubo interno o escoamento ocorreu na região central do tubo.

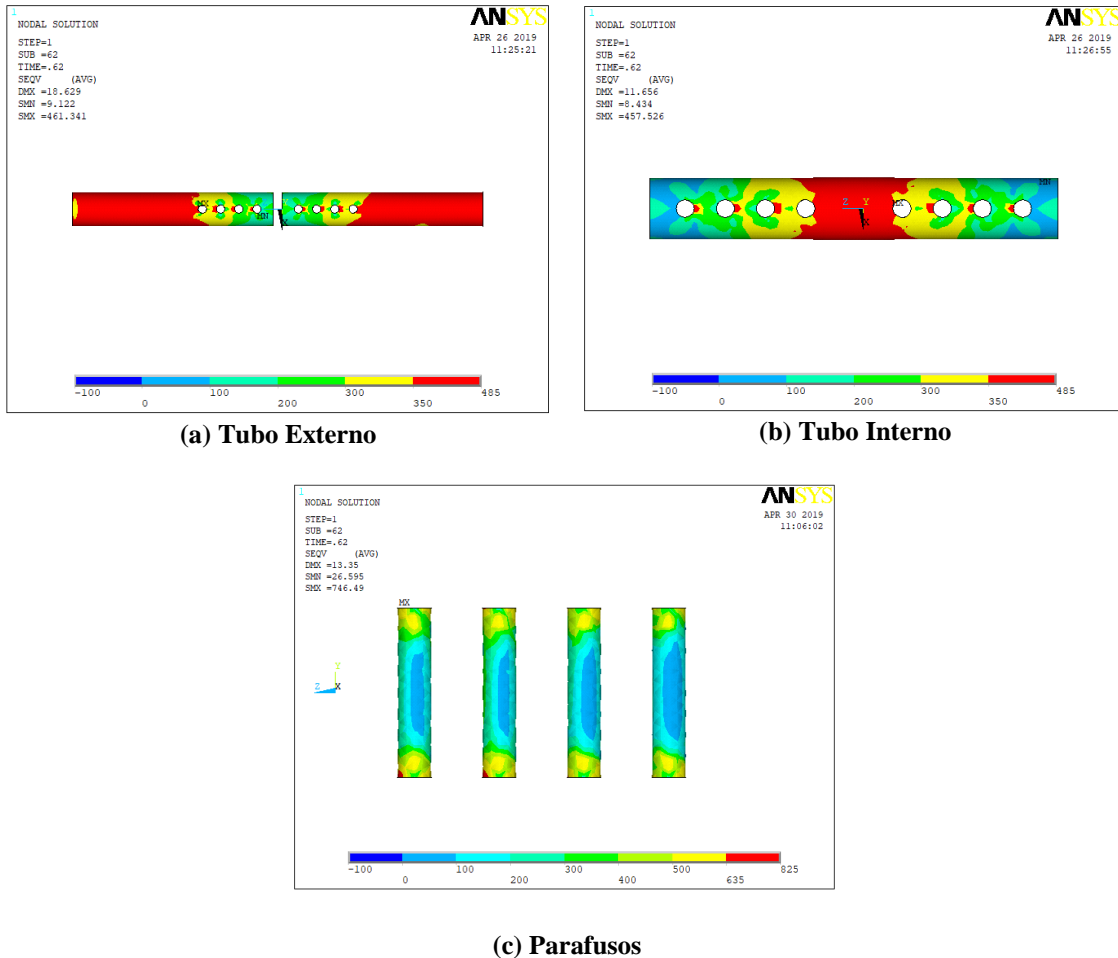


Figura 11: Tensões de Von Mises (MPa) do modelo L8P - 02

É apresentado na Tabela 2 os modos de falha de todos os modelos analisados. Avaliando os resultados, percebeu-se que em ligações com 4 e 6 parafusos as falhas ocorreram por ovalização dos furos, determinada quando a deformação última de ruptura na região dos furos ultrapassa a deformação total de von Mises. Observou-se que alguns modelos de 8 e 10 parafusos quando a espessura do tubo interno e externo eram iguais, ocorreu também a falha por ovalização dos furos. Para modelos com o número de parafusos maiores e diâmetros do tubo interno superiores o modo de falha encontrado foi escoamento da seção bruta, devido ao aumento do número de parafusos e do aumento do diâmetro e espessura do tubo interno.

**Tabela 2: Modo de Falha dos modelos analisados**

Modelo	Número de Parafusos	Modo de Falha	Tubo
L4P-01	4	Ovalização do furo	Tubo externo
L4P-02	4	Ovalização do furo	Tubo externo
L4P-03	4	Ovalização do furo	Tubo externo
L4P-04	4	Ovalização do furo	Tubo externo
L4P-05	4	Ovalização do furo	Tubo externo
L6P-01	6	Ovalização do furo	Tubo interno
L6P-02	6	Ovalização do furo	Tubo externo
L6P-03	6	Ovalização do furo	Tubo externo
L6P-04	6	Ovalização do furo	Tubo externo
L6P-05	6	Ovalização do furo	Tubo externo
L8P-01	8	Ovalização do furo	Tubo interno
L8P-02	8	Escoamento da seção	Tubo interno e externo
L8P-03	8	Escoamento da seção	Tubo externo
L8P-04	8	Escoamento da seção	Tubo externo
L8P-05	8	Escoamento da seção	Tubo externo
L10P-01	10	Ovalização do furo	Tubo interno
L10P-02	10	Escoamento da seção	Tubo interno e externo
L10P-03	10	Escoamento da seção	Tubo externo
L10P-04	10	Escoamento da seção	Tubo externo
L10P-05	10	Escoamento da seção	Tubo externo
L12P-01	12	Escoamento da seção	Tubo interno e externo
L12P-02	12	Escoamento da seção	Tubo interno e externo
L12P-03	12	Escoamento da seção	Tubo externo
L12P-04	12	Escoamento da seção	Tubo externo
L12P-05	12	Escoamento da seção	Tubo externo

#### 4 Considerações finais

No presente trabalho foi apresentado um estudo sobre os modos de falha da ligação tipo luva com parafusos alinhados submetida a esforços de compressão. O objetivo foi avaliar a ligação tipo luva por meio de uma análise numérica utilizando o software ANSYS e identificar os modos de falha da ligação a partir da variação do número de parafusos e das características geométricas do tubo interno da ligação,

variando o diâmetro e a espessura.

Notou-se a necessidade de avaliar melhor a ligação com 4 parafusos pois apresenta resistências menores se comparado com ligação que contenham mais parafusos. Observou-se que o aumento do número de parafusos aumenta a rigidez da ligação. Logo, notou-se que uma maior rigidez da ligação pode eliminar os problemas no tubo interno, permitindo novos estudos para uma proposição de limitação das características.

Percebe-se uma repetição dos modos de falha de ovalização do furo para as ligações que continham 4 e 6 parafusos e para alguns modelos que apresentaram espessura do tubo interno iguais ao tubo externo. Nos outros modelos analisados o modo de falha entrado foi o escoamento da seção bruta, observado em modelos com 8, 10 e 12 parafusos. Por fim, observou-se que os parafusos de 16 mm não apresentaram falha, conseqüentemente não, influenciaram no comportamento da ligação.

O modelo numérico devidamente calibrado permitirá futuras análises paramétricas, com a finalidade de avaliar a influência da modificação das características físicas e geométricas dos protótipos no comportamento da ligação. Dessa forma é possível a proposição de formulações analíticas para o dimensionamento a partir dos modos de falha da ligação sob compressão.

## **Agradecimentos**

Os autores agradecem a UFSJ, UFOP, CAPES, CNPq e FAPEMIG.

## **Referências bibliográficas**

- [1] J. Wardenier, J.A. Packer, X.-L. Zhao, A. van de Vegte, *Hollow sections in structural applications*, 2nd ed., CIDECT, Genebra, 2010.
- [2] H. Van-Long, J. Jean-Pierre, D. Jean-François, Behaviour of bolted flange joints in tubular structures under monotonic, repeated and fatigue loadings I: Experimental tests, *J. Constr. Steel Res.* 85 (2013) 1–11. doi:10.1016/j.jcsr.2013.02.011.
- [3] Q.-Y. Song, A. Heidarpour, X.-L. Zhao, L.-H. Han, Performance of flange-welded/web-bolted steel I-beam to hollow tubular column connections under seismic load, *Thin-Walled Struct.* 116 (2017) 250–264. doi:10.1016/j.tws.2017.03.011.
- [4] C.O.V.R. Pereira, *Análise numérico-experimental de resistência a flexão em ligações tubulares flangeadas*, Universidade Federal de Ouro Preto, Dissertação de Mestrado. Ouro Preto, 2017.
- [5] Y.Q. Wang, L. Zong, Y.J. Shi, Bending behavior and design model of bolted flange-plate connection, *J. Constr. Steel Res.* 84 (2013) 1–16. doi:10.1016/j.jcsr.2013.01.012.
- [6] M. Couchaux, M. Hjiat, I. Ryan, A. Bureau, Tensile resistances of bolted circular flange connections, *Eng. Struct.* 171 (2018) 817–841. doi:10.1016/j.engstruct.2018.04.004.
- [7] R.C. Vieira, R. de F. Vieira, J.A.V. Requena, A.H.M. Araújo, Numerical analysis of CHS bolted

- sleeve connections, in: EUROSTEEL 2011, Budapest, Hungary, 2011.
- [8] J.M. da Silva, Análise Téorico-experimental de ligações tubulares tipo luva, Universidade Federal de Ouro Preto, Dissertação de Mestrado. Ouro Preto, 2012.
- [9] L. Roquete, Estudo de ligações tipo luva em perfis tubulares, Universidade Federal de Ouro Preto, Tese de Doutorado. Ouro Preto, 2018.
- [10] R.C. Vieira, Análise numérica e experimental de ligações tubulares de aço do tipo luva parafusada, Universidade Estadual de Campinas, Tese de Doutorado. Campinas, 2014.
- [11] L.R. Amparo, Análise teórico-experimental de ligações tipo luva compostas por perfis tubulares com parafusos em linha e cruzados, Universidade Federal de Ouro Preto, Dissertação de Mestrado. Ouro Preto, 2014.
- [12] R. Simões, S. Jordão, P. Freitas, Ligações de emenda entre perfis tubulares, Rev. Da Estrut. Aço. Cent. Bras. Da Construção Em Aço - CBCA. Vol. 3. Número 2. (2014) 168–186.
- [13] L.R. Amparo, L.A. Escanio, A.M. Sarmanho, C.O.V.R. Pereira, Análise Numérica e experimental de ligação tipo luva em perfis tubulares com parafusos cruzados, in: CILAMCE 2015, XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Rio de Janeiro, 2015.
- [14] L.R. Amparo, A.M. Sarmanho, A.H.M. Araújo, J.A.V. Requena, Analysis of the possible failure modes in CSH bolted sleeve connections, in: E. Batista, Vellasco & Lima (Eds.), Tubul. Struct. XV, Rio de Janeiro, 2015: pp. 435–440.
- [15] L.R. Amparo, L.A. Escanio, A.M. Sarmanho, J.A.V. Requena, Avaliação da influência da variação do número de parafusos na ligação tipo luva em perfis tubulares com parafusos cruzados, in: CILAMCE 2016, XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Brasília, 2016.
- [16] L. Roquete, A.M.C. Sarmanho, L.A. Escanio, D.L.C. e Souza, M.M. de Oliveira, Identificação de modos de falha em perfis tubulares com ligação tipo luva e parafusos cruzados a 90° usando um modelo numérico, in: XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (Ed.), CILAMCE 2017, Florianópolis, 2017.
- [17] L. Roquete, A.M.C. Sarmanho, A.A.O. Mazon, J.A.V. Requena, Influence of shear lag coefficient on circular hollow sections with bolted sleeve connections, REM - Int. Eng. J. 70 (2017) 393–398. doi:10.1590/0370-44672014700220.
- [18] ANSYS Inc., ANSYS Versão 12.0, Swanson Analysis System, EUA, 2012.
- [19] C.G. Salmon, J.E. Johnson, Steel Structures - Design and Behavior. Emphasizing Load and Resistance Factor Design, Third Edit, 1990.
- [20] ANSYS, User's Manual, Help, Inc. theory reference (version 12.1), 2009.