

ANÁLISE INELÁSTICA DE SEGUNDA ORDEM DE ARCOS METÁLICOS COM SEÇÃO I

Lidiane R. R. M. de Deus

Jéssica L. Silva

Ricardo A. M. Silveira

lrdeus@gmail.com

jessicalorrany05@hotmail.com

ramsilveira@yahoo.com.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto

Campus Universitário Morro do Cruzeiro, Ouro Preto, CEP 35400-000, Minas Gerais, Brasil.

Igor J. M. Lemes

igorjml@hotmail.com

Universidade Federal de Lavras

Aquenta Sol, Lavras, CEP 37200-000, Minas Gerais, Brasil.

Resumo. Este trabalho se insere no contexto da Análise Inelástica de Segunda Ordem (AISO) de estruturas metálicas, em particular de arcos metálicos. São apresentadas as AISO de arcos metálicos, tanto abatidos, quanto não abatidos, com variadas características, como diferentes seções transversais, condições de contorno e carregamento. Para a realização dessas análises a plataforma computacional utilizada na simulação dos modelos é o CS-ASA (Silva [1]), um programa baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF) que realiza a análise não linear estática e dinâmica de estruturas. Nesse trabalho, a formulação do Referencial Corrotacional (RCR) é adotada para introduzir os efeitos da não linearidade geométrica, e o comportamento inelástico do material é modelado através do acoplamento do Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) com o Método de Compatibilidade de Deformações (MCD). A solução estática não linear é baseada numa estratégia incremental iterativa (Método de Newton-Raphson Modificado aliado a técnicas de continuidade). Nos modelos de arcos metálicos simulados, atenção especial é dada aos caminhos de equilíbrio, à influência do fator de abatimento, condições de contorno e carregamento, curvas de capacidade de carga, entre outros. Finalmente, os resultados obtidos com a metodologia proposta são validados através de resultados encontrados na literatura e aqueles obtidos via MASTAN2 (Ziemian e McGuire [2]; www.mastan2.com), comprovando o bom funcionamento das formulações utilizadas na análise de diversos arcos, demonstrando que o fator de abatimento influencia diretamente na malha de discretização da estrutura, que o posicionamento das cargas concentradas em um arco é determinante para conseguir seu melhor desempenho estrutural, dentre outras conclusões.

Palavras chave: Arcos metálicos, Análise não linear, Formulação corrotacional, Inelasticidade, Acoplamento MRPR / MCD

1 Introdução

Os arcos são estruturas em que a curvatura dos elementos introduz ganhos de resistência quando comparados a elementos retos. Além disso, os arcos são estruturas particularmente vantajosas do ponto de vista da engenharia que, normalmente, não apresentam esforços de tração, e conseguem vencer grandes vãos, não obstruindo os espaços com elementos estruturais, como pilares por exemplo.

Apesar disso, os arcos costumam apresentar comportamento fortemente não linear, e por isso é importante que os modelos usados para simular o comportamento das estruturas reais levem em consideração as não linearidades geométricas (grandes deslocamentos e rotações, imperfeição inicial e excentricidade), do material (comportamento inelástico, elastoplástico, endurecimento) e da ligação com os apoios (semirrigidez, apoios assimétricos). Nos arcos, é importante considerar as elevadas deformações pré-flambagem podendo prever assim, assertivamente, o comportamento da estrutura (Pi e Trahair [3]; Pi *et al.* [4]).

Para que isso seja possível, utiliza-se a Análise Avançada de Estruturas, bem como formulações apropriadas que retratem esses efeitos.

Vários autores têm estudado a estabilidade não linear elástica de arcos com diferentes características, como Pi *et al.* [4] (arcos circulares sob carregamento radial uniforme), Moon *et al.* [5] (arcos parabólicos), Pi e Bradford [6] (arcos triarticulados), Xu *et al.* [7] (arcos sob cargas concentradas), Guo *et al.* [8] (arcos sob cargas distribuídas verticais), dentre outros, todos levando em consideração a Não Linearidade Geométrica (NLG).

Já no âmbito da análise inelástica de arcos, Trahair *et al.* [9] estudaram arcos metálicos com cargas concentradas assimétricas, Pi *et al.*, [10] estudaram arcos metálicos com cargas uniformemente distribuída assimétrica e Heidarpour *et al.* [11], Pi *et al.* [12] e Hamed *et al.* [13] estudaram arcos de concreto armado e mistos de aço e concreto.

Pi e Trahair [14] realizaram análises utilizando um programa computacional baseado no MEF desenvolvido pelos próprios autores em 1994 (Pi e Trahair [15], [16]). Através desse programa, estudaram a flambagem inelástica e carga crítica de arcos circulares metálicos com seção I, levando em conta os efeitos da curvatura do arco, grandes deformações, imperfeição geométrica inicial e tensão residual. Vários carregamentos simétricos e assimétricos foram aplicados.

Dando continuidade ao estudo mencionado no parágrafo anterior, Pi e Trahair [3] estudaram a flambagem inelástica de arcos metálicos em compressão uniforme e desenvolveram equações de interação para o projeto dessas estruturas. Eles chegaram em soluções analíticas para as cargas de flambagem dos arcos abatidos e pouco abatidos em compressão uniforme. Adicionalmente, obtiveram uma equação de interação modificada que fornece os limites inferiores da resistência de arcos abatidos e não abatidos submetidos à flexão e compressão considerando distribuições não uniformes do momento fletor e da força axial de compressão ao longo do arco e a redistribuição do momento fletor após a formação da rótula plástica. Os resultados obtidos por Pi e Trahair [3] foram usados na validação das análises numéricas realizadas neste trabalho.

O presente trabalho trata da análise inelástica de segunda ordem de estruturas, com ênfase na solução numérica não linear de arcos metálicos de diversas características: arcos abatidos e pouco abatidos, com algumas variações de seções transversais em perfil I. As condições de apoio consideradas são as biapoiadas ou biengastadas. Os carregamentos compreendem as cargas concentradas simétricas (no topo do arco, principalmente) e assimétricas (cargas aplicadas a 1/4 da projeção horizontal do arco) e as cargas distribuídas verticais simétricas (carga distribuída em toda a projeção horizontal do arco) e assimétricas (carga distribuída em parte da projeção horizontal do arco).

O sistema computacional utilizado para a realização das análises inelásticas de segunda ordem é o CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*; Silva [1]), um programa baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), implementado em linguagem *Fortran 90/95* (Chapman [17]), que realiza análises estáticas e dinâmicas não lineares de estruturas. As principais formulações a serem destacadas neste estudo são a formulação do Referencial Corrotacional (RCR) e o acoplamento do

Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) ao Método da Compatibilidade de Deformações (MCD).

Esse trabalho foi organizado em três seções. A Seção 2 apresenta as formulações para a AISO no contexto da plasticidade concentrada, detalhando o elemento finito não linear empregado e a estratégia de solução não linear adotada. A Seção 3 apresenta um exemplo numérico trazendo as AISO de arcos metálicos, validando as formulações sugeridas. Por fim, na Seção 4, são estabelecidas algumas conclusões importantes referentes ao exemplo estudado.

2 Formulação numérica

Desde a criação do CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*, Silva [1]), diversas formulações vem sendo implementadas na plataforma por diversos autores (Lemes [18], [19]; Silva [20]; Barros [21]; e Pires [22]) que possibilitam a análise não linear avançada de estruturas. Nessa seção são abordadas as formulações utilizadas neste trabalho: a formulação do Referencial Corrotacional (RCR), que atua na consideração dos efeitos geométricos não lineares; o acoplamento do Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) ao Método da Compatibilidade de Deformações (MCD), que atua na consideração dos efeitos inelásticos do material; e a estratégia de solução não linear adotada.

2.1 Formulação geométrica não linear: RCR

Para a consideração dos efeitos geométricos não lineares na análise das estruturas abordadas nesse estudo, adotou-se a formulação do Referencial Corrotacional (RCR), que permite a separação explícita entre os movimentos de corpo rígido e os movimentos deformacionais (utilizados no cálculo das forças internas) da estrutura. Essa formulação implementada no CS-ASA por Silva [20] utiliza formulações propostas por Battini [23] e Tang *et al.* [24] baseadas na teoria de viga de Euler-Bernoulli, e seguem algumas predefinições:

- O elemento finito usado nas modelagens é plano e prismático;
- A seção transversal do arco é considerada compacta, e permanece plana após deformação;
- Considera-se o problema bidimensional (eixo z travado);
- Deformações devido ao cisalhamento são desconsideradas; e
- Grandes deslocamentos e rotações de corpo rígidos são permitidos.

A Figura 1 apresenta a movimentação de um elemento finito e a nomenclatura adotada para os deslocamentos e rotações nodais no sistema global de coordenadas de acordo com o RCR. Os deslocamentos nodais globais de translação u_{ig} e v_{ig} e de rotação $\alpha - \alpha_0$, descrevem o movimento de corpo rígido do elemento.

O vetor global de deslocamentos nodais é definido por:

$$\mathbf{u}_g = [u_{ig} \quad v_{ig} \quad \theta_{ig} \quad u_{jg} \quad v_{jg} \quad \theta_{jg}]^T. \quad (1)$$

em que u representa a translação horizontal, v a translação vertical e θ a rotação dos nós i e j .

Esse movimento de corpo rígido define um sistema de coordenadas locais (x', y') , que é sempre colocado no nó inicial do elemento e descreve os movimentos deformacionais da estrutura.

O vetor local de deslocamentos nodais naturais é definido por:

$$\mathbf{u}_l = [\delta \quad \theta_i \quad \theta_j]^T. \quad (2)$$

na qual δ , θ_i e θ_j podem ser obtidos geometricamente através da Fig. 1 (detalhes em Chhang *et al.* [25] e Silva [20]).

A partir da diferenciação de δ , θ_i e θ_j com relação aos graus de liberdade, obtêm-se os deslocamentos locais em função dos deslocamentos globais do elemento, que na forma compacta correspondem à:

$$\Delta \mathbf{u}_l = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_g. \quad (3)$$

em que $\Delta \mathbf{u}_l$ e $\Delta \mathbf{u}_g$ são, respectivamente, os vetores de deslocamentos incrementais nos sistemas local e global. A matriz \mathbf{B} é a matriz de transformação de deslocamentos entre os sistemas global e local:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha / L & \cos \alpha / L & 1 & \sin \alpha / L & -\cos \alpha / L & 0 \\ -\sin \alpha / L & \cos \alpha / L & 0 & \sin \alpha / L & -\cos \alpha / L & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

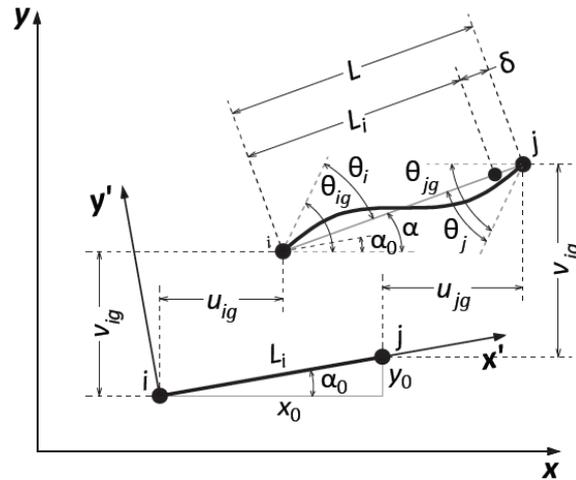


Figura 1. Movimentação de um elemento finito no RCR.

Essa matriz de transformação \mathbf{B} relaciona o vetor de forças globais \mathbf{f}_g ao vetor de forças locais \mathbf{f}_l , utilizando o Princípio dos trabalhos virtuais (PTV):

$$\delta V = \Delta \mathbf{u}_g^T \mathbf{f}_g = \Delta \mathbf{u}_c^T \mathbf{f}_c = \Delta \mathbf{u}_g^T \mathbf{B}^T \mathbf{f}_c \rightarrow \mathbf{f}_g = \mathbf{B}^T \mathbf{f}_l. \quad (5)$$

Diferenciando a equação anterior em relação ao vetor de deslocamentos $\Delta \mathbf{u}_g$, obtém-se a matriz de rigidez tangente global \mathbf{K}_g , ou seja:

$$\mathbf{K}_g = \frac{\Delta \mathbf{f}_g}{\Delta \mathbf{u}_g} = \underbrace{\mathbf{B}^T \mathbf{K}_l \mathbf{B}}_{\mathbf{K}_e} + \underbrace{\frac{\mathbf{z}\mathbf{z}^T}{L} N + \frac{1}{L^2} \mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T}_{\mathbf{K}_{geo}} M_i + M_j. \quad (6)$$

na qual \mathbf{K}_l é a matriz de rigidez tangente do elemento no sistema local corrotacional, N , M_i e M_j são as forças internas associadas aos graus de liberdade locais, e os vetores \mathbf{r} e \mathbf{z} são definidos conforme as Eq. 7 e 8 (Silva [20]). A primeira parte da Eq. 6 corresponde à matriz de rigidez elástica (\mathbf{K}_e). A segunda parte corresponde à matriz de rigidez geométrica (\mathbf{K}_{geo}), na qual são levados em consideração os efeitos de segunda ordem.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (7)$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (8)$$

Para determinar a matriz de rigidez tangente local \mathbf{K}_l , utiliza-se a energia potencial Π do sistema, considerando que as cargas são conservativas e aplicadas nos pontos nodais:

$$\Delta \Pi = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_l} - \mathbf{f}_l \right) \Delta \mathbf{u}_l = 0. \quad (9)$$

de onde se conclui que a primeira derivada da energia de deformação U em relação ao vetor de deslocamentos locais \mathbf{u}_l resulta no vetor de forças internas, isto é:

$$\mathbf{f}_l = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{u}_l}. \quad (10)$$

A segunda derivada desse vetor em relação ao vetor de deslocamentos locais \mathbf{u}_l fornece a matriz de rigidez tangente local \mathbf{K}_l :

$$\mathbf{K}_l = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{u}_l^2} = \frac{\partial \mathbf{f}_l}{\partial \mathbf{u}_l}. \quad (11)$$

A cada incremento de carga, as forças internas do elemento, a matriz de rigidez e a matriz de transformação \mathbf{B} são atualizadas.

2.2 Formulação inelástica: acoplamento MRPR/MCD

Neste estudo, o Método da Rótula Plástica Refinado (MRPR) é utilizado para capturar o avanço da plastificação nos pontos nodais dos elementos finitos, do início do escoamento até a plastificação total da seção transversal, com a formação da rótula plástica. Para quantificar o desenvolvimento da plasticidade e monitorar a degradação da rigidez da seção transversal nos pontos nodais dos elementos, são utilizadas as regidezes generalizadas, calculadas através do Método da Compatibilidade de Deformação (MCD), implementada por Lemes [19] no CS-ASA.

A Figura 2 apresenta um elemento finito de viga-coluna delimitado por pontos nodais i e j no sistema local corrotacional, utilizado nas modelagens desse trabalho.

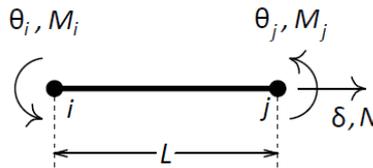


Figura 2. Elemento finito no sistema corrotacional.

Nesse sistema local de referência, a relação força-deslocamento (Eq. 11) do elemento pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{Bmatrix}}_{\text{Forma incremental}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \underbrace{\Delta \mathbf{f}_l = \mathbf{K}_l \Delta \mathbf{u}_l}_{\text{Forma compacta}}. \quad (12)$$

em que ΔN , ΔM_i e ΔM_j são incrementos de força normal e momentos fletores, e $\Delta \delta$, $\Delta \theta_i$ e $\Delta \theta_j$ são incrementos de deslocamento axial e rotações, respectivamente.

Os termos relativos à flexão presentes na matriz \mathbf{K}_l são calculados através do MCD considerando a tangente à relação momento-curvatura ($M \times \Phi$). Para tal, os termos de flexão são calculados inicialmente nos nós i e j do elemento, e em seguida se estabelecer uma variação linear desses parâmetros ao longo do comprimento do elemento (Ziemian e McGuire [26]), ou seja:

$$EI \ x = \left[\left(1 - \frac{x}{L} \right) EI_{T,i} + \frac{x}{L} EI_{T,j} \right]. \quad (13)$$

na qual L é o comprimento do elemento, e $EI_{T,i}$ e $EI_{T,j}$ são os parâmetros de rigidez à flexão obtidos nos pontos nodais i e j .

Ao utilizar a derivada segunda das funções de interpolação de Hermite chega-se na matriz de rigidez reduzida \mathbf{k}^* , com termos associados apenas à flexão (McGuire *et al.* [27]):

$$\mathbf{k}^* = \int_0^L \mathbf{N}^T EI_T x \mathbf{N} dx . \quad (14)$$

com,

$$\mathbf{N} = \left[N_1 = \frac{2}{L} \left(2 - \frac{3x}{L} \right) \quad N_2 = \frac{2}{L} \left(1 - \frac{3x}{L} \right) \right] . \quad (15)$$

sendo N_1 e N_2 funções de interpolação relativas aos graus de liberdade de rotação. Usando as Equações (13) e (15) em (14), e realizando a integração, chega-se a:

$$\mathbf{k}^* = \begin{bmatrix} \frac{3EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} & \frac{EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} \\ \frac{EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} & \frac{EI_{T,i} + 3EI_{T,j}}{L} \end{bmatrix} . \quad (16)$$

Finalmente, considerando que a rigidez axial no elemento é dada pela média das rigidezes nos pontos nodais, define-se os coeficientes da matriz de rigidez do elemento \mathbf{K}_e (Eq. 14):

$$\begin{aligned} k_{11} &= EA^* = \frac{EA_{T,i} + EA_{T,j}}{2}; & k_{22} &= \left(\frac{EI_1}{L} \right)^* = \frac{3EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L} \\ k_{23} &= k_{32} = \left(\frac{EI_2}{L} \right)^* = \frac{EI_{T,i} + EI_{T,j}}{L}; & k_{33} &= \left(\frac{EI_3}{L} \right)^* = \frac{EI_{T,i} + 3EI_{T,j}}{L} \end{aligned} . \quad (17)$$

em que $EA_{T,i}$ e $EA_{T,j}$ são os parâmetros de rigidez axial tangente à relação momento curvatura e $EI_{T,i}$ e $EI_{T,j}$ são os parâmetros de rigidez à flexão mencionados anteriormente. Os parâmetros de rigidez são discutidos mais adiante.

Método da Compatibilidade de Deformações (MCD)

O MCD é uma técnica baseada na teoria de Euler-Bernoulli para avaliação da degradação de seções transversais compactas (AISC LRFD [28]) através do emprego generalizado de modelos constitutivos que levam em consideração as deformações sofridas por um elemento, ao ser submetido a um determinado esforço externo. Para tal, admite-se que o campo de deformações seja contínuo e que a seção permaneça plana após a deformação, como ilustrado na Fig. 3.

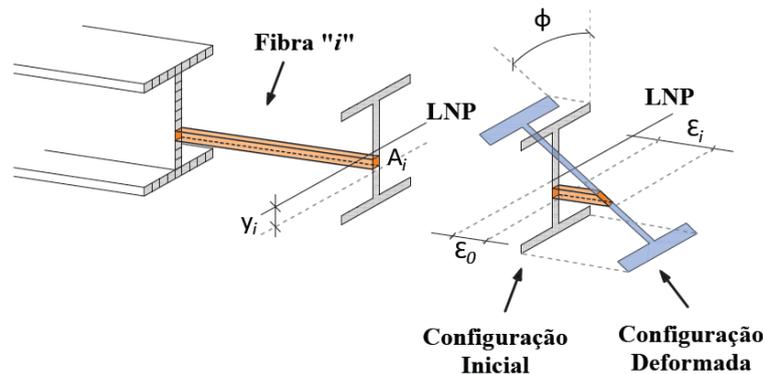


Figura 3. Campo de deformações para um problema plano (Lemes [19]).

O modelo constitutivo trilinear foi adotado neste estudo para descrever o aço à temperatura ambiente. O trecho referente ao primeiro quadrante deste modelo é exibido na Fig. 4, e pode ser definido através da Eq. 20 (Lemes *et al.* [29]; Lemes [19]):

$$\sigma = \begin{cases} -f_2 + E_{a3} \varepsilon + \varepsilon_2, & \text{se } -\varepsilon_u \geq \varepsilon > -\varepsilon_2 \\ -f_y + E_{a2} \varepsilon + \varepsilon_y, & \text{se } -\varepsilon_2 \geq \varepsilon \geq -\varepsilon_y \\ E_a \varepsilon, & \text{se } -\varepsilon_y < \varepsilon < \varepsilon_y \\ f_y + E_{a2} \varepsilon - \varepsilon_y, & \text{se } \varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2 \\ f_2 + E_{a3} \varepsilon - \varepsilon_2, & \text{se } \varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_u \end{cases} \quad (18)$$

em que f_y , f_2 , f_u , ε_y , ε_2 e ε_u são as tensões e deformações limítrofes dos trechos lineares da relação constitutiva e os parâmetros E_a , E_{a2} , e E_{a3} são os módulos de elasticidade correspondentes a cada trecho. O valor de ε_y é determinado pela relação f_y/E_a e o valor de ε_2 corresponde a $10 \times \varepsilon_y$.

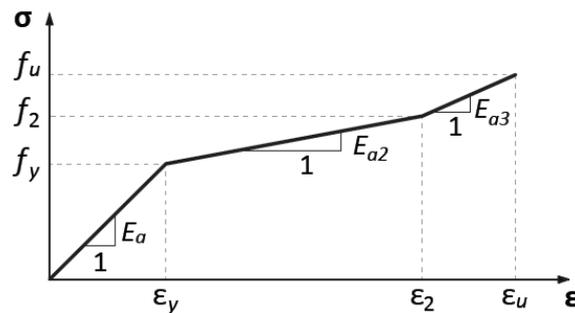


Figura 4. Relação constitutiva do aço dos perfis: modelo trilinear (Lemes [19]).

As tensões residuais são aplicadas diretamente sobre o perfil e seguem, o modelo do EN 1993-1-2:2005 [30] para perfis I, baseado na proposta do ECCS [31].

Conhecendo o modelo constitutivo do material adotado, é possível determinar o comportamento da seção transversal através da sua relação momento-curvatura ($M \times \Phi$).

Relação momento-curvatura e rigidezes generalizadas

A relação momento-curvatura ($M \times \Phi$) representa o comportamento da seção transversal para determinado esforço axial, permitindo definir o regime (elástico, elastoplástico, plástico) no qual a seção se encontra para diferentes valores do momento fletor. Ela é obtida através do método de *Newton-Raphson*, aliada à estratégia de incrementos proposta por Zubyan [32], que determina o momento em função da curvatura:

$$M_{j+1} = M_j + \Phi EI. \quad (19)$$

em que j refere-se ao incremento anterior e $j+1$ ao incremento atual, Φ é um valor de incremento constante para a curvatura e EI é a rigidez a flexão da seção transversal.

Para determinar a relação momento-curvatura, realiza-se inicialmente a discretização da seção transversal em fibras (Fig. 3), de forma que seja possível captar a deformação axial, ε , no centroide plástico (CP) de cada fibra e, utilizando a relação constitutiva dos materiais adotados, determinar os valores da tensão e do módulo de elasticidade tangente em cada uma delas.

Para captar a deformação axial ε no CP das fibras, são utilizadas a área e a posição da fibra em relação ao CP da seção transversal, minimizando problemas de convergência no método de *Newton-Raphson* (Caldas [33]; Chen *et al.* [34]; Sfakianakis [35]).

A configuração deformada de um perfil I genérico para uma combinação de esforço normal e momento fletor é representada na Fig. 3. A deformação axial na i -ésima fibra, ε_i é dada por:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 + \Phi y_i + \varepsilon_{ri}. \quad (20)$$

na qual ε_0 é a deformação axial no CP da seção, Φ é a curvatura, y_i é a distância entre os centroides plásticos da fibra analisada e da seção transversal, e ε_{ri} é a deformação residual na i -ésima fibra.

Matricialmente, com ε_0 e Φ sendo posições do vetor de deformações \mathbf{X} , tem-se:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & \Phi \end{bmatrix}^T. \quad (21)$$

O equilíbrio da seção é atingido quando:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} \cong 0. \quad (22)$$

em que o vetor de forças externas é dado por:

$$\mathbf{f}_{ext} = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}. \quad (23)$$

sendo N o esforço normal e M o momento fletor.

O vetor de forças internas é dado por integrais clássicas para a força normal e o momento fletor, ou seja:

$$\mathbf{f}_{int} = \begin{Bmatrix} N_{int} = \int_A \sigma[\varepsilon, \varepsilon_0, \Phi] dA \\ M_{int} = \int_A \sigma[\varepsilon, \varepsilon_0, \Phi] y dA \end{Bmatrix}. \quad (24)$$

no qual N_{int} corresponde à força normal e M_{int} corresponde ao momento fletor.

Utilizando a expansão em série de Taylor e admitindo que haja equilíbrio no ponto $\mathbf{X} + \delta\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}) = 0$, sabendo que $\delta\mathbf{X} = \mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k$, e isolando a parcela \mathbf{X}^{k+1} , que é a configuração deformada da seção transversal na iteração $k + 1$ tem-se:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \left[\mathbf{F}' \mathbf{X}^k \right]^{-1} \mathbf{F} \mathbf{X}^k. \quad (25)$$

em que \mathbf{F}' é a matriz constitutiva da seção transversal ou matriz Jacobiana do problema não linear (Eq. 22). Essa matriz é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{F}' = \left(- \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \begin{bmatrix} f_{11} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \varepsilon_0} & f_{12} = \frac{\partial N_{int}}{\partial \Phi} \\ f_{21} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \varepsilon_0} & f_{22} = \frac{\partial M_{int}}{\partial \Phi} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

cujos termos são:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \int_A E_T dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} A_i; & f_{12} &= \int_A E_T y dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i \\ f_{21} &= \int_A E_T y dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i A_i; & f_{22} &= \int_A E_T y^2 dA = \sum_{i=1}^{n_{fib}} E_{T,i} y_i^2 A_i \end{aligned} \quad (27)$$

em que E_T é resultado da derivada da tensão σ em relação à deformação ε .

À medida que as forças internas variam e a seção se deforma, o CP, antes fixo, muda de posição, conforme a seção começa a se plastificar. Essa atualização da posição do CP da seção é importante na obtenção da rigidez à flexão tangente à curva $M \times \Phi$.

A Fig. 5(a) fornece o processo incremental-iterativo a ser resolvido a nível da seção transversal. A cada incremento do vetor de deformações \mathbf{X} , verifica-se o equilíbrio de forças na seção utilizando um

critério de convergência (Eq. 24). Ao atingir a configuração deformada da seção transversal compatível com o par de esforços N e M , ou seja, no momento que se obtém convergência do processo incremental-iterativo (Fig. 5(b)), as componentes da matriz constitutiva \mathbf{F}' são usadas na obtenção das rigidezes generalizadas axial (EA_T) e à flexão (EI_T) (Chiorean [36]; Lemes [19]), cujas expressões são:

$$EA_T = f_{11} - \frac{f_{12}f_{21}}{f_{22}}; \quad EI_T = f_{22} - \frac{f_{12}f_{21}}{f_{11}}. \quad (28)$$

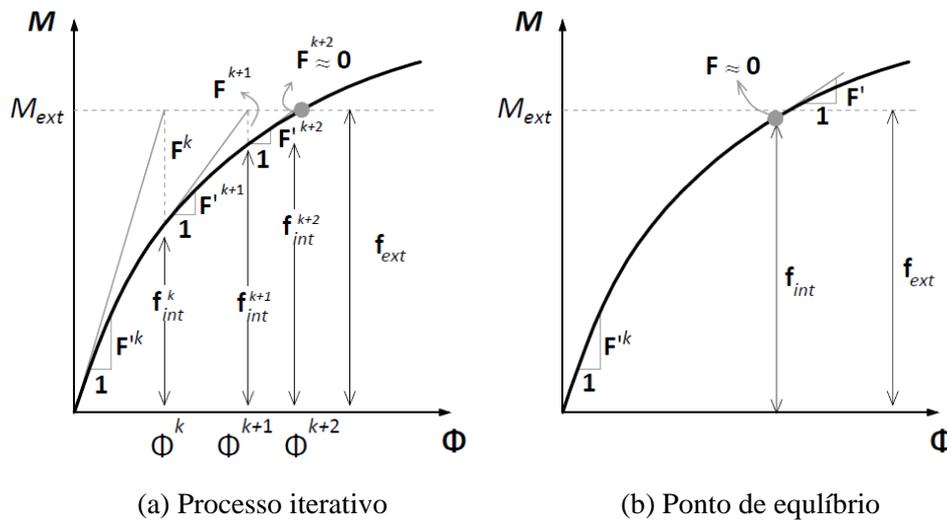


Figura 5. Relação $M \times \Phi$ para o cálculo das rigidezes generalizadas.

Esse procedimento numérico pode ser usado na montagem da curva de interação esforço normal – momento fletor (NM), um conjunto de pares ordenados nos quais para cada valor de esforço normal N , há um momento máximo M da relação momento-curvatura correspondente.

Curva NM e início da plastificação

Para um determinado valor de esforço normal N atuante na seção transversal, são dados incrementos no momento fletor M , de forma que o momento fletor último resistente seja atingido quando o determinante da matriz constitutiva \mathbf{F}' for igual a zero, indicando assim uma tangente horizontal à curva momento-curvatura ($M \times \Phi$). Esse procedimento é repetido para vários valores de N , chegando-se então a vários pares de pontos NM que permitem a definição com certa precisão da curva de interação.

Quando a primeira fibra da seção apresentar deformação axial ε maior que a deformação de início de escoamento do aço, a fibra em questão inicia o processo de degradação e conseqüentemente a seção começa a perder resistência. Nesse instante, a relação momento-curvatura passa a apresentar comportamento não linear. O momento fletor do par NM nesse ponto é o momento de início de plastificação.

2.3 Solução do Problema Estático Não Linear

À medida que a análise não linear vai sendo realizada, a matriz de rigidez é atualizada constantemente em busca do estado de equilíbrio, considerando as não linearidades envolvidas no problema. Uma estratégia incremental iterativa de duas etapas é utilizada para atualizar essa matriz:

Etapa 1 – Etapa Predita: Realiza a obtenção dos deslocamentos incrementais a partir de determinado acréscimo de carregamento. Neste trabalho, o incremento inicial do parâmetro de carga, $\Delta\lambda_0$ é determinado através do Método do Deslocamento Generalizado (MDG; Yang e Kuo [37]), e ao fim da

primeira etapa o parâmetro de carga e o vetor de deslocamentos nodais totais são atualizados. Muito provavelmente esses vetores não correspondem a um ponto de equilíbrio do sistema estrutural, sendo necessário ajustá-los através de correções, o que ocorre na Etapa 2.

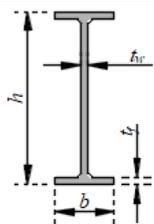
Etapa 2 – Etapa Corretiva: Realizada a avaliação das forças internas através do método de *Newton-Raphson*. A estratégia de iteração idealizada por esse método é repetida até que o vetor de forças residuais, seja anulado, o que indica que o equilíbrio do sistema foi atingido. Para traçar a trajetória de equilíbrio completa, além dos pontos críticos da estrutura, o parâmetro de carga λ sofre correções durante o ciclo iterativo, utilizando a estratégia baseada na Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais (NMDR) proposta por Chan [38].

Após a obtenção da solução corretiva, as variáveis incrementais e totais são atualizadas. O vetor de forças internas é então comparado ao vetor de forças externas, e o equilíbrio é verificado (através do vetor de forças residuais). Caso a estrutura esteja em equilíbrio, é feito um novo incremento do carregamento externo; em caso negativo, o processo corretivo é refeito que o equilíbrio seja atingido.

3 Exemplo Numérico

Esta seção tem como objetivo verificar a aplicabilidade das formulações apresentadas na seção anterior para diversos modelos constituídos por arcos metálicos. As seções transversais utilizadas são descritas na Tabela.1.

Tabela 1. Dimensões dos perfis utilizados (espessuras fictícias)

	SEÇÕES	h (mm)	t_w (mm)	b (mm)	t_f (mm)
	S1 (10UB29)	261,30	7,70	151,00	12,30
	S2	261,30	9,63	151,00	10,00
	S3	261,30	5,01	151,00	14,00
	S4	280,00	7,70	137,45	12,30
	S5	240,00	7,70	149,97	12,30

O material utilizado é um aço com módulo de elasticidade $E = 200\text{GPa}$ e resistência de escoamento $\sigma_y = 250\text{MPa}$. O comportamento desse aço é descrito através do modelo constitutivo trilinear (Fig. 4, Seção 2). Os modelos numéricos são criados a partir de duas configurações geométricas, que representam o arco abatido e o arco pouco abatido e são exibidos na Fig. 6. As condições de carregamento adotadas estão representadas na Fig. 7.

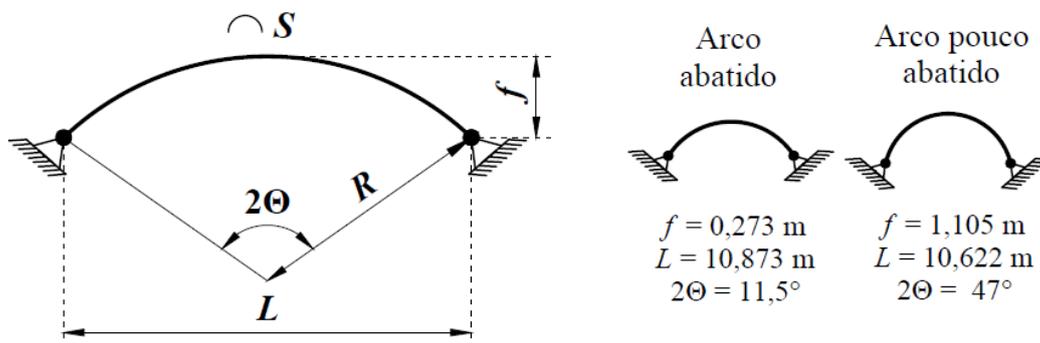


Figura 6. Configurações geométricas adotadas.

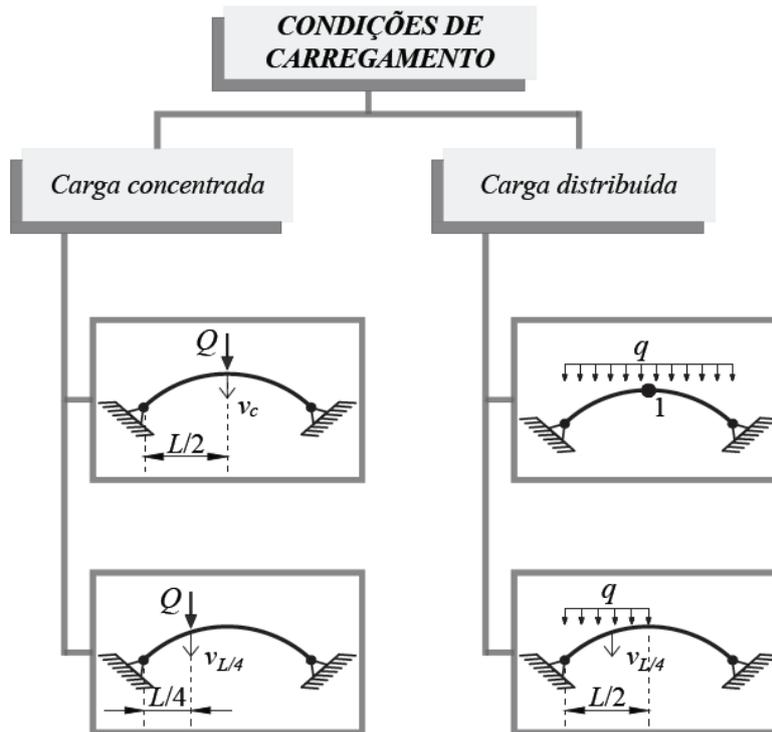


Figura 7. Condições de carregamento adotadas.

Os arcos com perfil I 10UB29 foram inicialmente estudados por Pi e Trahair [3], e seus resultados são apresentados neste exemplo. Os demais arcos têm seus resultados comparados aos obtidos no Mastan2. A seguir são analisadas as malhas de discretização, trajetórias de equilíbrio, influência do carregamento e da relação de abatimento f/L e a capacidade de carga de diversos modelos de arcos metálicos.

3.1 Trajetórias de Equilíbrio

Para traçar uma trajetória de equilíbrio apropriada, o primeiro passo é determinar a malha de elementos finitos ao ser utilizada no comprimento do arco, bem como o número de divisões da seção transversal que será adotada. Esse estudo é de grande importância, uma vez que os arcos apresentam, naturalmente, um comportamento fortemente não linear.

Estudo da malha

Foram analisadas várias malhas de elementos finitos e divisões na seção transversal para os diversos modelos retratados neste trabalho, considerando as diferentes características geométricas, de carregamento e seção transversal, chegando às seguintes considerações:

- Por se tratar de perfis bastante semelhantes, a escolha da seção transversal não influenciou a escolha da malha de discretização e divisões da seção transversal;
- As condições de contorno também não foram relevantes na escolha da malha de discretização;
- São necessárias entre 45 e 60 divisões na seção transversal. O maior valor foi utilizado em todos os modelos (20 divisões em cada um dos flanges e 20 divisões na alma).
- A Tabela 2 apresenta o número de elementos necessários na discretização do arco em cada modelo estudado, para se chegar a resultados assertivos. De um modo geral, é necessário maior refinamento para o arco abatido. Com relação ao carregamento, observou-se que as cargas simétricas exigiram também um menor refinamento que as assimétricas, que acentuam o comportamento não linear dos arcos.

Tabela 2. Número de elementos utilizados na discretização dos arcos

CARGA	ARCOS	
	ARCO ABATIDO ($2\Theta = 11,5^\circ$)	ARCO POUCO ABATIDO ($2\Theta = 47^\circ$)
C.C. $L/2$	8	8
C.C. $L/4$	200	16
C.D. Vertical (AC)	100	16
C.D. Vertical (MA)	200	100

Nota: AC = carga atuante no arco completo; MA = carga atuante até o meio do arco

Trajétoria de equilíbrio: Seção S1 (10UB29)

Foram realizadas análises de arcos abatidos e pouco abatidos, biapoiados, com Seção S1 e sob as quatro condições de carregamento mencionadas na Fig. 7. As Figuras. 8 – 11 apresentam os caminhos não lineares de equilíbrio para esses modelos, sendo: modelo com carga concentrada no meio do vão L (Fig. 8); carga concentrada a 1/4 do vão L (Fig. 9); carga vertical distribuída em todo o vão L do arco (Fig. 10); e carga distribuída até o meio do arco (Fig. 11). Na representação da resposta da estrutura, o deslocamento vertical, v_c , no topo ou $v_{L/4}$ a 1/4 do vão do arco é tomado como referência e adimensionalizado através da flecha, f ; o carregamento, representado por Q ou q , é parametrizado em relação à segunda carga de flambagem elástica de uma coluna de comprimento equivalente S (eixo de maior inércia; Pi e Trahair [3]).

Os resultados obtidos via CS-ASA foram comparados àqueles de Pi e Trahair [3] para os arcos sob carga concentrada e carga radial. O software MASTAN2 foi utilizado no estudo de todos os modelos e contribui com dois resultados diferentes, um adotando o módulo de elasticidade tangente, E_t , e o outro adotando o módulo de elasticidade tangente modificado, E_{tm} . Esse último incorpora na sua expressão a influência do momento fletor (Gonçalves [39]; Ziemian e McGuire [23]).

Dessas figuras percebe-se que os resultados encontrados via CS-ASA estão próximos aos da literatura e do MASTAN2 em todos os casos. Segundo Pi e Trahair [3], para os carregamentos concentrados os arcos abatidos, em geral, perdem sua estabilidade por ponto limite. Os arcos pouco abatidos em geral perdem estabilidade por bifurcação.

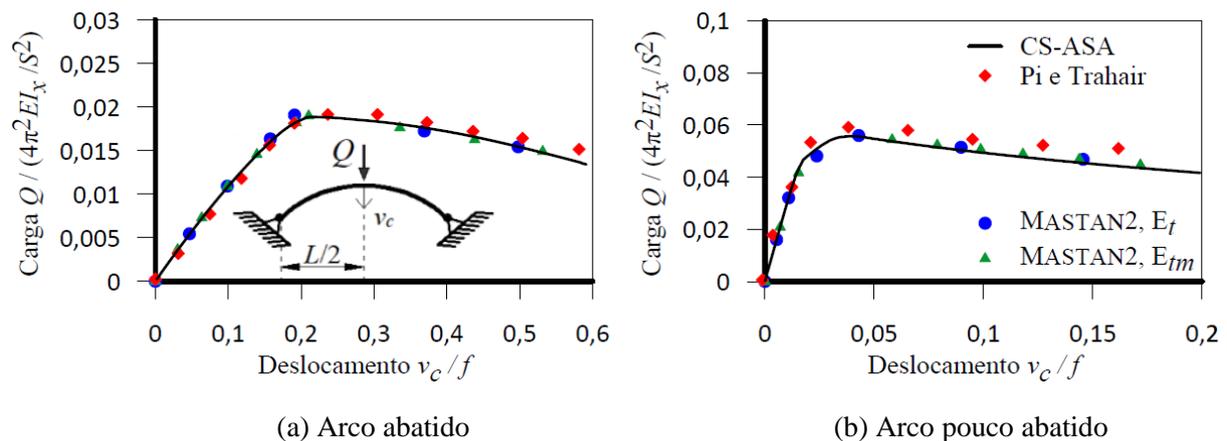


Figura 8. Trajetórias de equilíbrio: arcos sob carga concentrada no topo

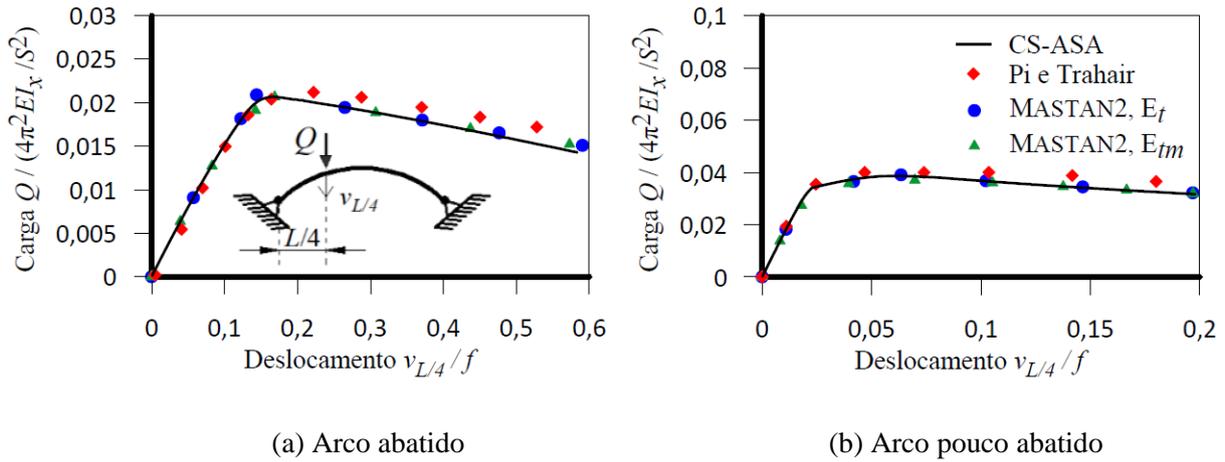


Figura 9. Trajetórias de equilíbrio: arcos sob carga concentrada à L/4

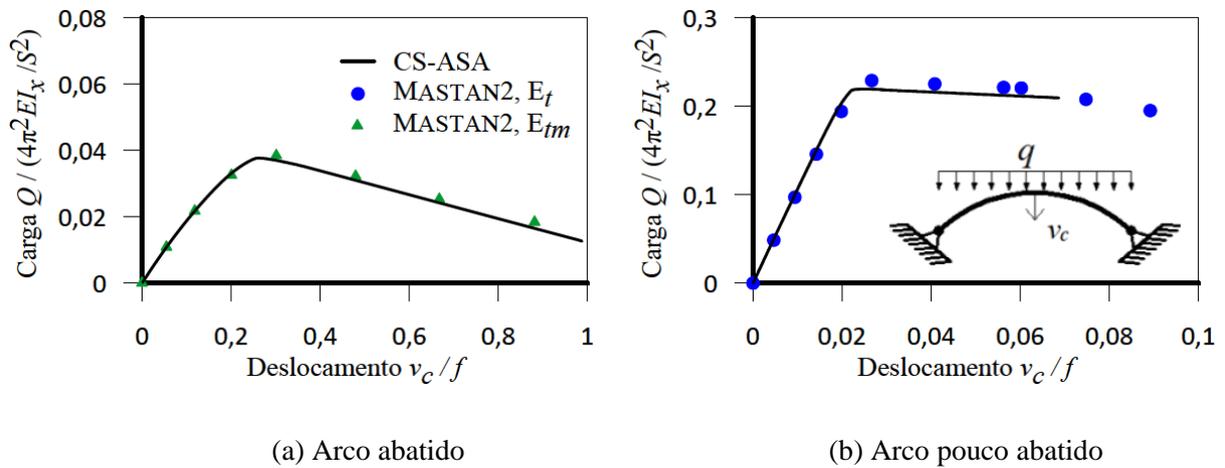


Figura 10. Trajetórias de equilíbrio: arcos sob carga vertical distribuída

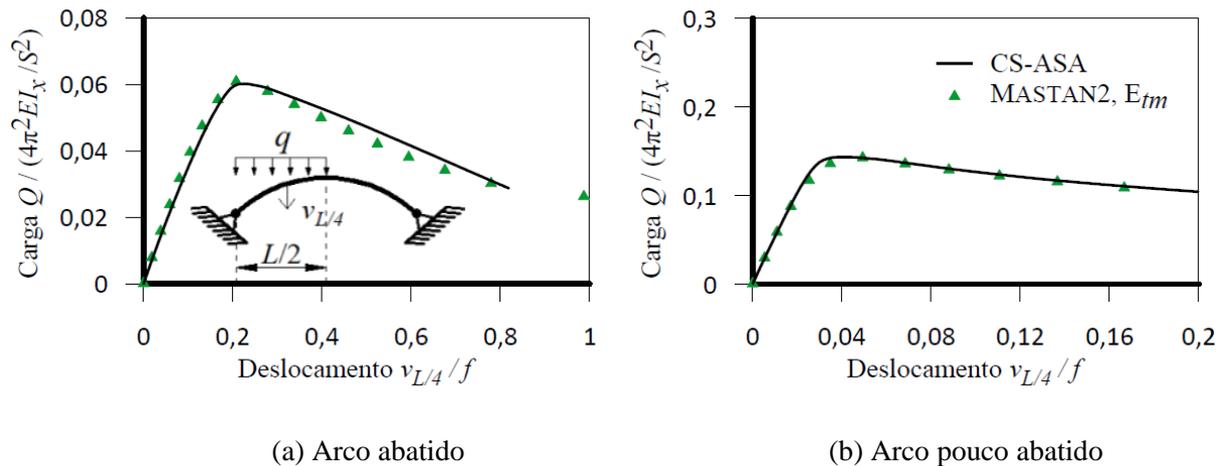


Figura 11. Trajetórias de equilíbrio: arcos sob carga vertical distribuída parcial

Trajétória de equilíbrio: Seções S1 à S5

Nesse estudo foram criados cinco modelos estruturais de arcos abatidos com $2\Theta = 11,5^\circ$, biapoiados, sob carga concentrada no topo do arco, com as Seções de S1 à S5, com o objetivo de estudar como pequenas alterações na seção transversal impactam a trajetória de equilíbrio dos arcos.

A Figura 12 apresenta a trajetória de equilíbrio para as os modelos com seção transversal S4 e S5 para as condições biapoiada (Fig.12a) e biengastada (Fig.12b). Os resultados encontrados via CS-ASA são similares aos encontrados na modelagem via MASTAN2, o que evidencia o bom funcionamento das formulações citadas no capítulo anterior para a determinação do comportamento estrutural de arcos em perfil I com as duas condições de contorno.

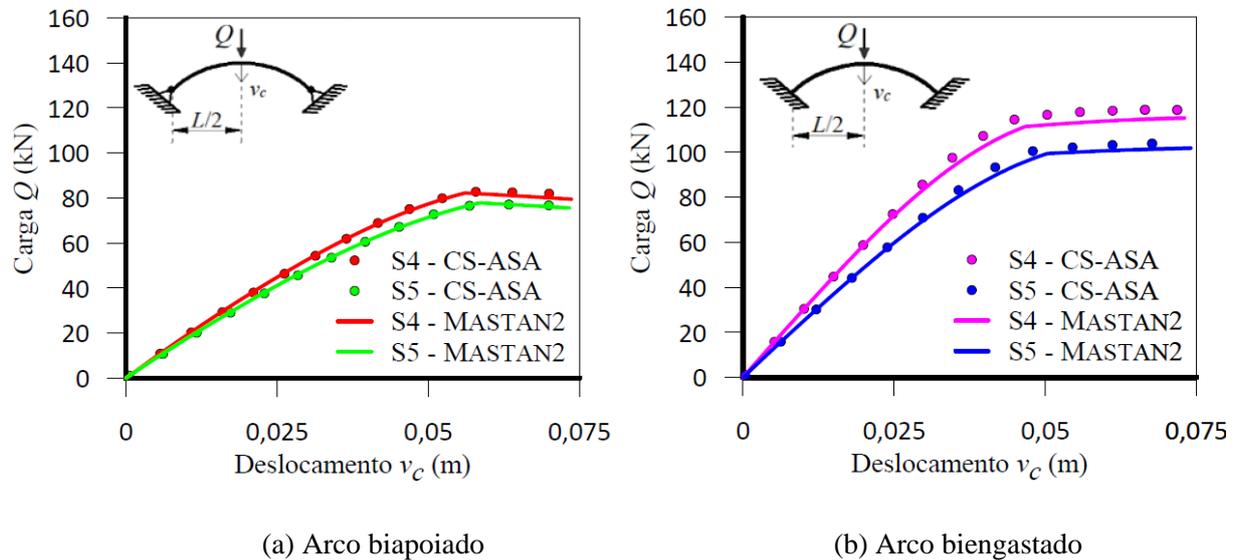


Figura 12. Trajetórias de equilíbrio para arcos com seções S4 e S5

A comparação entre a trajetória de equilíbrio dos cinco modelos é realizada na Fig. 13. Ao comparar as seções transversais, partindo da Seção S1 (10UB29), a Seção S2 tem a alma mais espessa e as mesas mais finas que a Seção S1. Já a Seção S3 tem as mesas mais espessas e a alma mais fina que a Seção S1. Em ambos os casos, os perfis S2 e S3 resistem ligeiramente menor que o perfil S1. Para o modelo com seção S2, a redução da espessura da mesa determinou não só a redução da carga crítica, mas também maior deslocamento v_c quando a carga crítica é atingida. Comparando os modelos com seções S4 e S5 entre si, era de se esperar que o perfil com maior inércia (Seção S4) tivesse maior carga crítica, o que de fato ocorre. No momento em que esses atingem as respectivas cargas críticas, o deslocamento v_c no topo do arco é coincidente. Outra comparação interessante a ser realizada ocorre entre os modelos com seções S1, S3 e S4. Embora a Seção S1 tenha módulo de inércia um pouco menor que as seções S3 e S4 e que a Seção S3 tenha módulo plástico um pouco maior que S1 e S4, o modelo com Seção S3 apresenta carga crítica ligeiramente menor que S1 e S4. Isso se deve á espessura da alma do perfil S3, cujo parâmetro de esbeltez λ (Anexo G, NBR8800:2008 [40]) é quase o dobro das outras duas seções.

3.2 Estudo da Relação f/L

Mantendo o valor do comprimento do arco $S = 10,89\text{m}$ constante e variando o valor do ângulo interno 2Θ de 5° até 220° , foram obtidas as trajetórias de equilíbrio ilustradas nas Figs. 14(a) e (b) para 6 arcos com diferentes valores de f/L . Na Fig.14(a) são representados os caminhos não lineares para os arcos submetidos a uma carga concentrada no topo (caso simétrico) e na Fig. 14(b) são representados os resultados considerando a carga concentrada em $L/4$ (caso assimétrico). A razão f/L está relacionada com o nível de abatimento do arco e, como verificado através dessas figuras, exerce grande influência sobre o comportamento deste.

Nos dois casos à medida que o valor de f/L aumenta (arco menos abatido), a carga crítica se torna mais elevada. No caso simétrico (Fig. 14(a)), a resistência aumenta inicialmente de forma rápida a cada aumento de f/L , depois aumenta mais lentamente até que passa a cair para valores de $f/L > 0,4195$. No caso assimétrico (Fig. 14(b)), a resistência aumenta acentuadamente para as primeiras relações f/L do arco e depois o aumento passa a ser mais constante para cada aumento de f/L . Nessa

figura, é possível notar que, para arcos com $f/L < 0,0109$ e para arcos com $f/L > 0,5868$, o modelo com caso de carregamento assimétrico desempenha melhor função estrutural, já que tem carga crítica maior. Já para o caso de $0,0109 > f/L > 0,5868$ o modelo com caso de carregamento simétrico apresenta melhor desempenho estrutural.

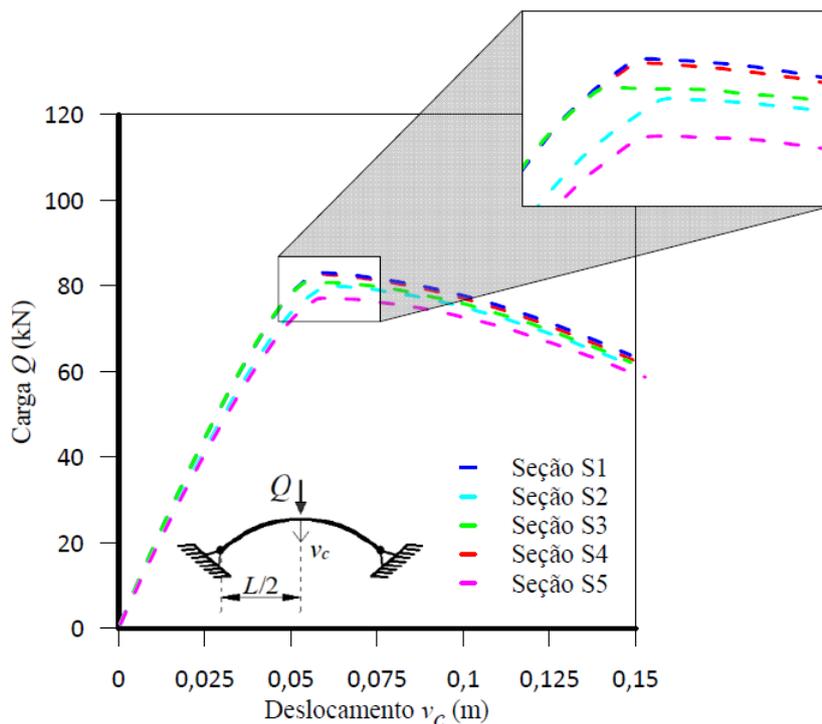
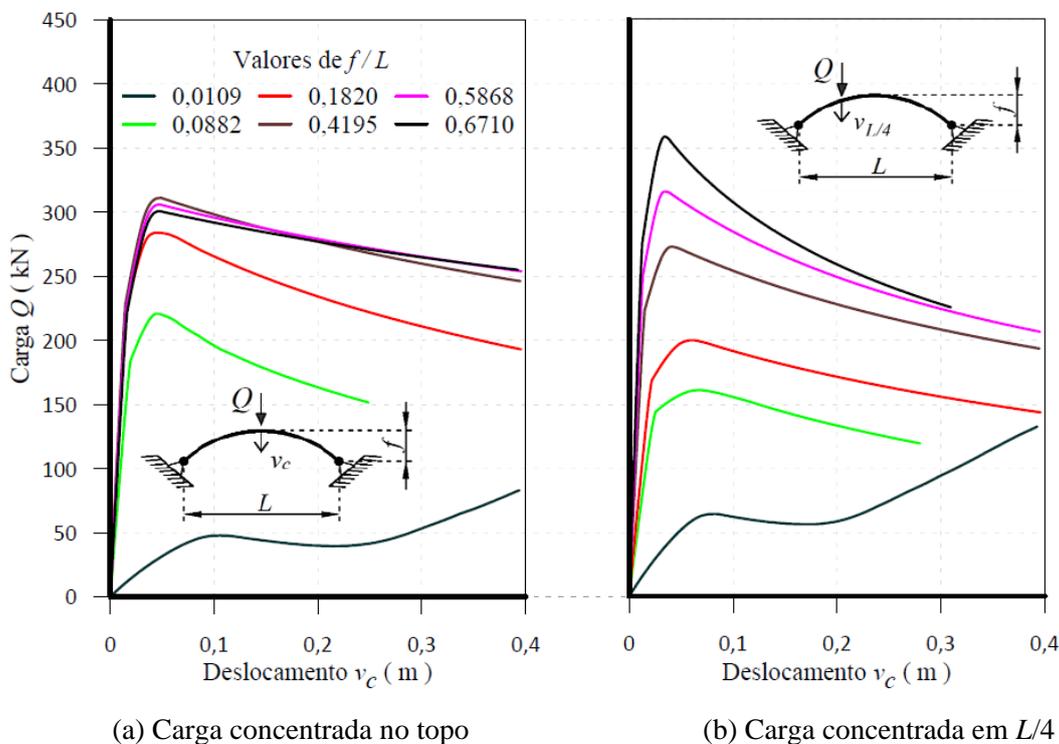


Figura 13. Comparação das trajetórias de equilíbrio para os cinco modelos de arcos.



(a) Carga concentrada no topo

(b) Carga concentrada em $L/4$

Figura 14. Trajetórias de equilíbrio para diferentes valores de f/L

3.3 Capacidade Resistente da Seção

Avalia-se agora a capacidade resistente da seção transversal do arco através da curva de interação esforço normal x momento fletor (NM), considerando a flexão em torno do eixo de maior inércia. A Fig. 15 fornece a curva de resistência para um arco com perfil I 10UB29 (Seção S1). Os modelos utilizados correspondem a um arco abatido ($2\Theta = 11,5^\circ$) e um arco pouco abatido ($2\Theta = 47^\circ$), ambos biapoiados, com carga distribuída uniforme. Nessa mesma figura pode ser avaliada a variação NM no ponto 1 (ver detalhe na Fig.15). Nota-se que, para os dois modelos, acontece a plastificação total da seção transversal no ponto 1. Nessa figura é possível observar que os esforços normais são predominantes no modelo pouco abatido em relação ao modelo abatido, e o momento fletor é muito maior no modelo de arco abatido.

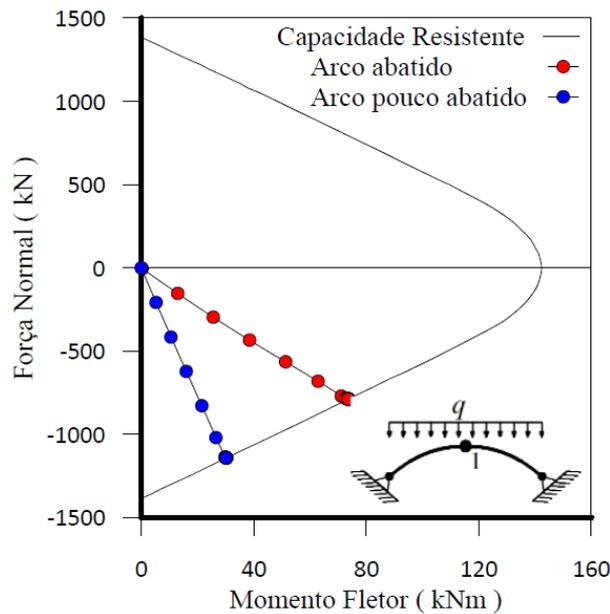


Figura 15. Capacidade resistente do perfil I 10UB29 e variação NM da seção 1

4 Conclusões

Pode-se afirmar que a utilização da formulação do Referencial Corrotacional (RCR) e o acoplamento do Método da Rótula Plástica Refinada (MRPR) — que considera a plastificação na seção transversal de forma gradativa, mas apenas nos pontos nodais dos elementos finitos —, ao Método da Compatibilidade de Deformações (MCD) — que foi utilizado na avaliação das curvas de resistência e na obtenção das rigidezes axial e à flexão generalizadas, retornaram resultados com boa precisão na análise do comportamento não linear inelástico de segunda ordem dos arcos estudados. Os resultados obtidos via CS-ASA (Silva [1]) apresentaram boa concordância com aqueles da literatura e/ou com os das análises via MASTAN2 (Ziemian e McGuire [2]).

Algumas conclusões específicas também podem ser apresentadas:

Sobre a malha de discretização da estrutura e divisões da seção transversal:

Em todos os modelos analisados observou-se grande sensibilidade da resposta da estrutura em relação à discretização adotada, principalmente com relação ao número de elementos finitos ao longo do arco, mas também ao número de divisões da seção transversal. Quanto mais abatido for o arco, e quanto mais assimétrica for a carga, maior o número de elementos são necessários ao longo do arco.

Isso se deve ao fato dessas duas características aumentarem o grau de não linearidade da estrutura consideravelmente.

Sobre o carregamento atuante:

No caso das cargas concentradas verticais aplicadas, a posição da carga teve grande influência na resistência dos arcos com diferentes relações de abatimento f/L (sendo f a flecha e L o vão do arco). Portanto, é necessário um estudo criterioso envolvendo o posicionamento da carga, específico para cada configuração de arco, de modo a extrair o seu melhor desempenho estrutural. Trata-se de análise relevante para os arcos usados como elementos estruturais principais em pontes e coberturas, com pontos específicos de posicionamento das cargas concentradas.

Sobre a relação f/L :

As trajetórias de equilíbrio obtiveram, no geral, boa concordância com os dados de literaturas utilizadas ou análises numéricas realizadas via MASTAN2.

A relação de abatimento do arco f/L mostrou grande influência na resistência dos arcos. Para um arco de mesmo comprimento S , quanto maior é o valor de f/L , mais resistente é o arco, ou seja, quanto menos abatido é o arco, mais resistente ele se torna. Além desse comportamento típico dos arcos relativo à influência da relação de abatimento, a posição da carga aplicada no arco também influencia a relação de abatimento x carga crítica, como pôde ser observado na Fig.14.

Agradecimentos

Os autores agradecem às agências federais (CAPES e CNPq) e estadual (FAPEMIG), UFOP (através do PROPEC e PROPP) e Fundação Gorceix, o apoio recebido para o desenvolvimento desta pesquisa.

Referências

- [1] SILVA, A. R. D., 2009. *Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- [2] ZIEMIAN, R. D.; MCGUIRE, W., 2000. *MASTAN2*, v. 1.0, distributor Wiley, New York.
- [3] PI, Y.-L.; TRAHAIR, N. S., 1999. *In-plane buckling and design of steel arches*. Journal of Structural Engineering, v.125, p. 1291-1298.
- [4] PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A.; UY, B., 2002. *In-plane stability of arches*. International Journal of Solids and Structures, v. 39(1), p. 105–125.
- [5] MOON, J.; YOON, K.-Y.; LEE, T.-H.; LEE, H.-E., 2007. *In-plane elastic buckling of pin-ended shallow parabolic arches*. Engineering Structures, v. 29(10), p. 2611–2617.
- [6] PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A. 2015. *In-Plane Analyses of Elastic Three-Pinned Steel Arches*. Journal of Structural Engineering, v. 141(2), p. 06014009/1-4.
- [7] XU, Y.J.; GUI, X.M.; ZHAO, B.; ZHOU, R.Q., 2014. *In-Plane Elastic Stability of Arches under a Radial Concentrated Load*. Engineering, v. 6, p. 572-583.
- [8] GUO, Y.-L.; CHEN, H.; PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A., 2016. *In-plane strength of steel arches with a sinusoidal corrugated web under a full-span uniform vertical load: Experimental and numerical investigations*. Engineering Structures, v. 110, p. 105–115.
- [9] TRAHAIR, N. S.; PI, Y.-L.; CLARKE, M. J.; PAPANGELIS, J. P., 1997. *Plastic Design of Steel Arches*. Advances in Structural Engineering, v. 1(1), p. 1–9.
- [10] PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A.; TIN-LOI, F., 2008. *In-plane strength of steel arches*. Advanced Steel Construction, v. 4 (4), p. 306-322.

- [11] HEIDARPOUR, A.; PHAM, T. H.; BRADFORD, M. A., 2010a. *Nonlinear thermoelastic analysis of composite steel–concrete arches including partial interaction and elevated temperature loading*. *Engineering Structures*, v. 32(10), p. 3248–3257.
- [12] PI, Y.-L.; LIU, C.; BRADFORD, M. A.; ZHANG, S., 2012. *In-plane strength of concrete-filled steel tubular circular arches*. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 69(1), p. 77–94.
- [13] HAMED, E.; CHANG, Z.-T.; RABINOVITCH, O., 2015. *Strengthening of Reinforced Concrete Arches with Externally Bonded Composite Materials: Testing and Analysis*. *Journal of Composites for Construction*, v. 19(1), p. 04014031/1-15.
- [14] PI, Y.-L.; TRAHAIR, N. S., 1996a. *In-plane inelastic buckling and strengths of steel arches*. *Journal of Structural Engineering*, v.122, p. 734-747.
- [15] PI, Y. L.; TRAHAIR, N. S., 1994a. *Nonlinear Inelastic Analysis of Steel Beam-Columns. I: Theory*. *Journal of Structural Engineering*, v. 120(7), p. 2041–2061.
- [16] PI, Y. L.; TRAHAIR, N. S., 1994b. *Nonlinear Inelastic Analysis of Steel Beam-Columns. II: Applications*. *Journal of Structural Engineering*, v. 120(7), p. 2062–2085.
- [17] CHAPMAN, S. J., 2003. *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, 2nd edn.
- [18] LEMES, Í. J. M., 2015. *Análise Avançada via MRPR de Estruturas Mistas de Aço e Concreto*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- [19] LEMES, I. J. M., 2018. *Estudo Numérico Avançado de Estruturas de Aço, Concreto e Mistas*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- [20] SILVA, J. L., 2016. *Formulações corrotacionais 2D para análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- [21] BARROS, R. C., 2016. *Avaliação Numérica Avançada do Desempenho de Estruturas de Aço Sob Temperaturas Elevadas*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- [22] PIRES, D., 2018. *Análise Numérica Avançada de Estruturas de Aço e de Concreto Armado em Situação de Incêndio*. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- [23] BATTINI, J.M., 2002. *Co-rotational beam elements in instability problems*. PhD Thesis. Royal Institute of Technology. Department of Mechanics, Stockholm, Sweden.
- [24] TANG, Y. Q.; ZHOU, Z. H.; CHAN, S. L., 2015. *Nonlinear beam-column element under consistent deformation*. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 15, n. 5, p. 1450068/1-24.
- [25] CHHANG, S.; BATTINI, J.-M.; HJIAJ, M., 2017. *Energy-momentum method for co-rotational plane beams: A comparative study of shear exible formulations*. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 134, p. 41-54.
- [26] ZIEMIAN, R. D.; MCGUIRE, W., 2002. *Modified tangent modulus approach, a contribution to plastic hinge analysis*. *Journal of Structural Engineering*, v.128, p. 1301-1307.
- [27] MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D., 2000. *Matrix Structural Analysis*. 2nd. ed., *Faculty Books*. 7.
- [28] AISC LRFD, 2016. *Specification for structural steel buildings*. American Institute of Steel Construction, Chicago, Illinois, USA.
- [29] LEMES, Í. J. M.; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R. D.; ROCHA, P. A. S., 2017. *Nonlinear analysis of two-dimensional steel, reinforced concrete and composite steel-concrete structures via coupling SCM/RPHM*. *Engineering Structures*, v. 147, p. 12-26.
- [30] EN 1993-1-2:2005 - European Committee for Standardization. *Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1-2: General Rules, Structural Fire Design*. Brussels.
- [31] ECCS, 1983. *Ultimate limit state calculation of sway frames with rigid joints*. European Convention for Constructional Steelwork, pub. n°. 33.
- [32] ZUBYDAN, A. H., 2013. *Inelastic large deflection analysis of space steel frames including H-shaped cross-section members*. *Engineering Structures*, v. 48, p. 155-165.
- [33] CALDAS, R. B., 2004. *Análise Numérica de Pilares Mistos Aço-Concreto*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.

- [34] CHEN, S.; TENG, J. G.; CHAN, S. L., 2001. *Design of biaxially loaded short composite columns of arbitrary section*. Journal of Structural Engineering, v. 127, n. 6, p. 678-685.
- [35] SFAKIANAKIS, M. G., 2002. *Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete section of arbitrary shape by fiber model and computer graphics*. Advances in Engineering Software, v. 33, p. 227-242.
- [36] CHIOREAN, C. G., 2013. *A computer method for nonlinear inelastic analysis of 3D composite steel-concrete frame structures*. Engineering Structures, v. 57, p. 125-152.
- [37] YANG, Y.; KUO, S., 1994. *Theory & analysis of nonlinear framed structures*. [S.l.]: Prentice Hall.
- [38] CHAN, S. L., 1988. *Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 26, p. 2657-2669.
- [39] GONÇALVES, G.A., 2013. *Modelagem do comportamento inelástico de estruturas de aço: membros sob flexão em torno do eixo de menor inércia*. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- [40] NBR 8800, 2008. *Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios*. Associação Brasileira de Normas Técnicas.