

## COMBINANDO AS TÉCNICAS DE BUSCA LINEAR COM CONTINUAÇÃO PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS ESTRUTURAIS NÃO LINEARES

**Jackson S. Rocha Segundo**

**Ricardo A. M. Silveira**

**Andrea R. D. Silva**

**Rafael C. Barros**

*jacksonsrsegundo@gmail.com*

*ricardo@ufop.edu.br*

*andreardsilva@ufop.edu.br*

*rafaelcesario@hotmail.com*

*Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto  
Campus Universitário s/n, Morro do Cruzeiro, 35400-000, Ouro Preto, MG, Brasil*

**Abstract.** The demand for computational tools that simulate the real behavior of structures has been intensified. Such numerical simulations usually involve highly nonlinear problems. For nonlinear static problems, in particular, it is fundamental the implementation and use of numerical strategies to trace the structure equilibrium paths in a complete way, overcoming critical points (limit and bifurcations points). In the Finite Element Method (FEM) context, where incremental-iterative strategies are usually adopted, the nonlinear solvers must have a high level of efficiency in the two phases of the solution process (predictor and corrector), for each load step. In solving the nonlinear algebraic equations, it is quite common that Newton-Raphson's iterations do not converge or require an excessive number of iterations near the critical points. Therefore, the linear search optimization technique appears as an additional sophistication. Basically, this technique aims to stagger the corrective displacements vector in the iterative phase, seeking to guarantee and accelerate the convergence of the process. The purpose of this work is to verify the efficiency of linear search technique coupled with Newton-Raphson iterations and different path-following methods, and verify its influence on the nonlinear solver efficiency. The effectiveness of the linear search algorithm implemented is verified in solving slender structures with accentuated nonlinearity. It is previously perceived that such a resource is triggered near load limit points (with more success when applied to structures with these critical points), accelerates the iterative process and increases the chances of convergence.

**Keywords:** nonlinear structural analysis, line search, finite element method

## 1 Introdução

A engenharia estrutural tem um grande objetivo: tornar os sistemas estruturais mais econômicos e, conseqüentemente, mais atrativos financeiramente. Para alcançar esse objetivo, a estrutura deve apresentar relação peso/capacidade portante otimizada. A disponibilidade de materiais de alta resistência e técnicas construtivas apuradas têm sido fatores preponderantes para que essa meta seja alcançada, pois possibilitam a utilização de elementos estruturais cada vez mais esbeltos. Essa categoria de elementos particularmente sensíveis aos efeitos de segunda ordem exigem o desenvolvimento de técnicas numéricas sofisticadas e um melhor conhecimento do comportamento estrutural para a sua análise.

Posto isso, a busca por ferramentas computacionais capazes de realizar análises que simulam o real comportamento estrutural tem se intensificado. Tais análises — estáticas e dinâmicas — precisam ser capazes de resolver problemas não lineares. As estáticas, mais precisamente, necessitam de estratégias numéricas que consigam encontrar o caminho de equilíbrio estrutural de forma completa — ultrapassando assim os pontos críticos ao longo desse caminho não linear. Destaca-se, portanto, a necessidade de *solvers* não lineares — compatíveis com a robustez das formulações disponíveis para essa classe de problemas — que, em conjunto, possam efetuar a análise da forma mais eficiente disponível.

No âmbito do Método dos Elementos Finitos (MEF), em que normalmente são utilizadas estratégias incrementais iterativas para problemas não lineares, os *solvers* devem ter alto nível de eficácia nas duas etapas do processo, reduzindo assim o custo computacional e permitindo a análise de problemas mais complexos, com menos simplificações e maior quantidade de fontes de não linearidade.

Ao resolver equações algébricas não lineares resultantes de uma discretização do MEF, é bastante comum que a usual iteração de Newton-Raphson não convirja (ou requeira um número excessivo de iterações). Surge, portanto, como uma sofisticação adicional a esses métodos, a técnica de otimização da busca linear. Essa técnica de “programação matemática” é uma característica importante de várias estratégias numéricas para otimização irrestrita, com uma ampla gama de procedimentos para análise não lineares em elementos finitos que podem ser aplicadas com um vasto conjunto de soluções iterativas.

A busca linear objetiva escalonar o vetor de deslocamentos corretivos da fase iterativa procurando garantir e acelerar a convergência do processo. As finalidades deste trabalho são: determinar a eficiência da associação da busca linear com diferentes estratégias de continuação associadas às iterações de Newton-Raphson (NR); e verificar a influência dos parâmetros da busca linear na eficiência do solver.

A estratégia da busca linear foi implementada no programa CS-ASA (*Computational System for Advanced Structural Analysis*; Silva [1]). Esse programa foi desenvolvido com base no MEF e realiza análises não lineares estáticas e dinâmicas de estruturas. A eficiência da busca linear é verificada para diferentes estruturas com não linearidade acentuada: pórtico, coluna e viga. Os detalhes para a metodologia usada para solução do problema estrutural não linear, caracterizada por um esquema de solução incremental iterativa, são apresentados. A estratégia da busca linear também é descrita.

Cabe destacar que a técnica da busca linear associada às iterações de NR tem sido alvo de pesquisas. Merecem destaque: Gil e Murray [2], que propuseram um algoritmo para otimização usando métodos de descida; Fletcher [3], que, além da busca linear, apresentou outros métodos práticos de otimização; Lee [4], que estudou a eficiência desse método em análises numéricas, destacando a sua importância na resolução de problemas altamente não lineares; Crisfield [5,6,7], que apresentou a metodologia da estratégia da busca linear no contexto do MEF; e Jeremic [8], que utilizou um algoritmo de busca linear para melhorar a convergência no processo iterativo de NR. Trabalhos recentes trazem o tema “busca linear”, destacando a sua importância no cenário da mecânica computacional. Fujiwara *et al.* [9] e Okimoto *et al.* [10], por exemplo, combinaram a busca linear e o Método de Newton-Raphson (MNR) no sentido de acelerar a convergência do processo

iterativo. Ritto-Corrêa e Camotim [11] usaram a busca linear com os métodos de comprimento de arco.

## 2 Solução do problema estático não linear

O comportamento não linear de um sistema estrutural deve ser estudado por meio do controle de um conjunto de parâmetros. Para entender a resposta da estrutura e identificar possíveis ocorrências de fenômenos de instabilidade é necessário entender como as suas configurações de equilíbrio variam de acordo com a alteração de alguns parâmetros de controle. As trajetórias ou caminhos de equilíbrio — que representam graficamente, por exemplo, a curva carga-deslocamento da estrutura —, são obtidas com tais análises.

Nessas representações, a abcissa geralmente representa uma componente do deslocamento nodal de interesse e a ordenada o parâmetro de carga. Durante a trajetória, a estrutura pode sofrer mudanças qualitativas em relação à estabilidade. A Fig. 1 ilustra uma trajetória de equilíbrio, na qual cada ponto representa uma configuração de equilíbrio do sistema. Na mesma figura estão indicados os pontos críticos da trajetória, que são os pontos limites (de carga ou deslocamento) e de bifurcação.

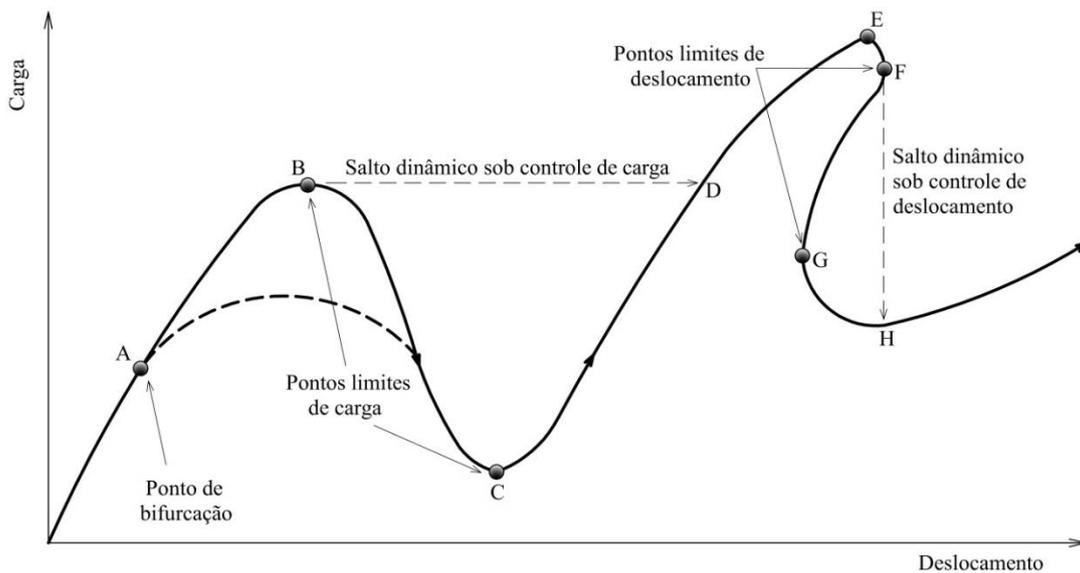


Figura 1. Trajetória de equilíbrio (Pires [12])

No contexto do MEF, a equação que governa o equilíbrio do sistema estrutural pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \lambda \mathbf{F}_r \quad (1)$$

em que  $\mathbf{F}_r$  é um vetor do carregamento externo de referência (apenas a sua direção é importante) e  $\lambda$  é definido como uma grandeza escalar responsável pelo escalonamento de  $\mathbf{F}_r$ ;  $\mathbf{F}_i$  é o vetor de forças internas que é função dos deslocamentos,  $\mathbf{U}$ , nos pontos nodais da estrutura.

Como já mencionado, o esquema incremental iterativo é o mais usual para a solução do problema estrutural representado pela Eq. (1). Em um contexto computacional, para cada passo de carga, tem-se duas etapas distintas:

- I. Inicialmente, a partir da última configuração de equilíbrio obtida, é selecionado um incremento de carga,  $\Delta\lambda^0$ , definido aqui como incremento inicial do parâmetro de carga. Depois da determinação de  $\Delta\lambda^0$ , chega-se ao incremento dos deslocamentos nodais  $\Delta\mathbf{U}^0$ . O parâmetro  $\Delta\lambda^0$  e o vetor  $\Delta\mathbf{U}^0$  definem a chamada solução incremental predita;
- II. Na segunda etapa procura-se corrigir a solução incremental predita através de um processo iterativo — e dessa forma restaurar o equilíbrio do sistema estrutural.

A Fig. 2 ilustra graficamente a metodologia incremental iterativa para um único acréscimo de carga. A última configuração de equilíbrio da estrutura é representada pelas coordenadas ( ${}^t\mathbf{U}$ ;  ${}^t\lambda$ ). A partir dessa configuração, é selecionado o incremento de carga  $\Delta\lambda^0$ , e calculado o incremento do vetor de deslocamentos nodais  $\Delta\mathbf{U}^0$ . A solução ( ${}^t\mathbf{U}+\Delta\mathbf{U}^0$ ;  ${}^t\lambda+\Delta\lambda^0$ ) normalmente não satisfaz a Eq. (1) que pode ser reescrita, na forma incremental, como:

$$\mathbf{g} = \lambda\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

em que  $\mathbf{g}$  representa o vetor de desequilíbrio entre forças externas e internas (ou vetor gradiente). Nas seções seguintes serão determinadas de maneira mais detalhada as duas etapas do processo incremental iterativo.

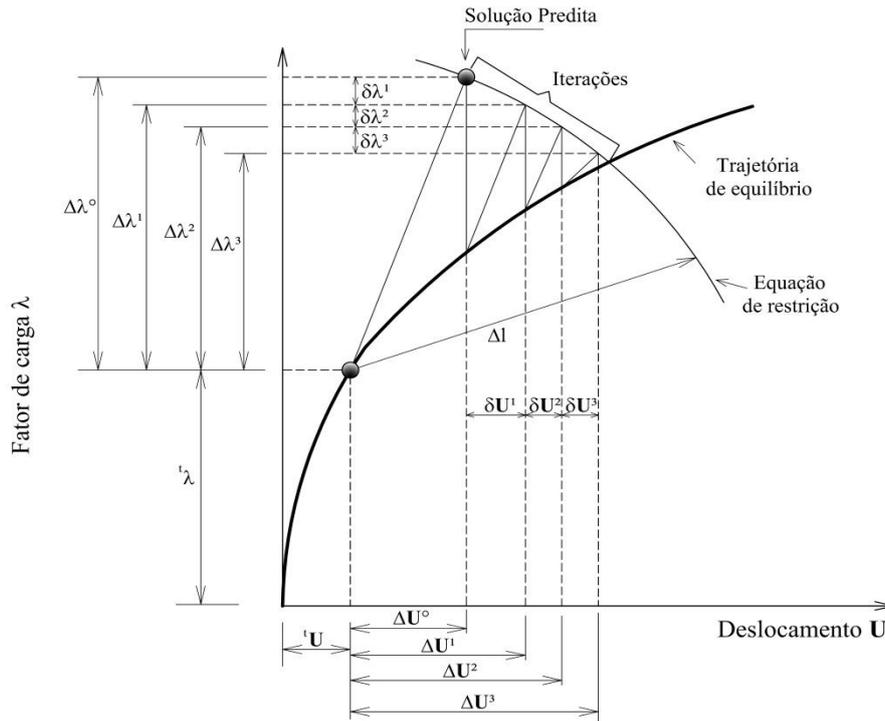


Figura 2. Esquema incremental iterativo (Pires [12])

## 2.1 Solução incremental predita

A primeira etapa para obtenção da solução incremental predita, ou solução incremental inicial tangente ( $\Delta\lambda^0$ ,  $\Delta\mathbf{U}^0$ ), consiste na montagem, usando informações da última configuração de equilíbrio da estrutura, da matriz de rigidez tangente,  $\mathbf{K}$ . Obtém-se na sequência o vetor de deslocamentos nodais tangenciais,  $\delta\mathbf{U}_r$ , com a seguinte expressão:

$$\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r. \quad (3)$$

Por meio de uma estratégia de incremento de carga é possível fazer a seleção automática do incremento inicial do parâmetro de carga  $\Delta\lambda^0$ . Algumas das estratégias que estão presentes no CS-ASA já permitem essa escolha. Pode-se vincular tal seleção, por exemplo, a uma equação de restrição, como ilustrado na Figura 3.2 a restrição do comprimento de arco (Crisfield [6]).

Após a definição do incremento inicial,  $\Delta\lambda^0$ , determinam-se os deslocamentos nodais incrementais,  $\Delta\mathbf{U}^0$ , escalonando-se de  $\delta\mathbf{U}_r$ , ou seja,

$$\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0 \delta\mathbf{U}_r. \quad (4)$$

São atualizados então o parâmetro de carga e os deslocamentos nodais totais por meio do seguinte procedimento:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0 \quad (5)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0 \quad (6)$$

em que  ${}^t\lambda$  e  ${}^t\mathbf{U}$  caracterizam o ponto de equilíbrio do sistema no último passo de carga, também indicado na Figura 3.2.

As Equações (5) e (6) nem sempre satisfazem as condições de equilíbrio, como mencionado anteriormente. Dessa forma, é necessário realizar um ciclo de iterações com o intuito de buscar o equilíbrio do sistema. A próxima seção traz a elucidação do processo iterativo.

## 2.2 Ciclo iterativo

O objetivo do MNR, em uma análise numérica, é determinar as raízes de uma determinada equação ou sistema de equações não lineares. No problema estrutural, a equação cujas raízes precisam ser determinadas é dada pela Eq. (1). Em um esquema padrão do MNR, apenas o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ , é corrigido durante o ciclo iterativo. O parâmetro de carga,  $\lambda$ , segue inalterado durante essa etapa. Ao aplicar o ciclo iterativo dessa maneira, só é possível obter a trajetória de equilíbrio até o primeiro ponto limite de carga. Caso se deseje obter o caminho de equilíbrio de forma completa, é necessário permitir a alteração de  $\lambda$  durante o processo iterativo.

Nesse processo numérico iterativo, o problema consiste em estabelecer uma série de correções para determinada estimativa inicial da raiz, até que se obtenha um valor satisfatório dentro da precisão requerida (Cook *et. al.* [13]). Com base na técnica geral proposta por Batoz e Dhatt [14], que permite a variação do parâmetro de carga, pode-se considerar uma mudança nos deslocamentos nodais governada pela seguinte equação de equilíbrio:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = -\mathbf{g}(\mathbf{U}^{(k-1)}, \lambda^k) \quad (7)$$

em que  $\mathbf{g}$  representa o vetor de forças desequilibradas, ou gradiente, que deverá se anular ao longo do ciclo iterativo, indicando que um novo ponto de equilíbrio da estrutura foi atingido. Esse vetor, como mostrado na equação anterior, é função tanto dos deslocamentos nodais totais,  $\mathbf{U}$ , calculados na última iteração ( $k-1$ ), como do parâmetro de carga,  $\lambda$ , na iteração corrente ( $k$ ), agora uma incógnita do problema, ou seja:

$$\lambda^k = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (8)$$

sendo  $\delta\lambda^k$  a correção do parâmetro de carga. Substituindo (8) em (7), chega-se a:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = -\left[\mathbf{F}_i^{(k-1)} - (\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k)\mathbf{F}_r\right]. \quad (9)$$

Na equação anterior,  $\mathbf{F}_i$  denota o vetor das forças internas;  $\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r$  representa o total das forças internas que atuaram na iteração anterior; e os termos  $k$  e  $k-1$  referem-se às iterações presente e passada, respectivamente.

Observe que a Eq. (9) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{U}^k = -\mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda^k\mathbf{F}_r \quad (10)$$

que é a equação a ser trabalhada durante o ciclo iterativo.

A partir da Eq. (10), os deslocamentos nodais iterativos,  $\delta\mathbf{U}^k$ , podem ser divididos em duas parcelas:

$$\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k \quad (11)$$

sendo:

$$\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{g}^{(k-1)} \quad (12)$$

$$\delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{F}_r. \quad (13)$$

Nas equações anteriores,  $\delta\mathbf{U}_g$  é a correção que seria obtida caso fosse aplicado o método

convencional do MNR com o incremento do parâmetro de carga constante; já  $\delta\mathbf{U}_r$  é o vetor de deslocamentos iterativos resultante da aplicação de  $\mathbf{F}_r$ .

Em um processo que inclui a estratégia de busca linear, a Eq. (11) modifica-se para:

$$\delta\mathbf{U}^k = \eta(\delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k) \quad (14)$$

sendo  $\eta$  um valor escalar que determina o tamanho do passo iterativo. A Seção 2.3 deste trabalho traz maiores explicações a respeito da busca linear e das adequações necessárias para incluir esse procedimento em um *solver* de um programa, para análises não lineares, baseado em elementos finitos.

Existe também a possibilidade de utilizar o método de Newton-Raphson modificado (NRM), no qual a matriz de rigidez não é atualizada continuamente durante o processo iterativo. Nesse caso,  $\delta\mathbf{U}_r$ , na iteração corrente, será igual ao vetor de deslocamentos tangenciais  $\delta\mathbf{U}_r$  calculado através da Eq. (3). A Figura 3 ilustra a diferença entre os métodos Newton-Raphson Padrão (NRP) (em que a matriz de rigidez é atualizada a cada iteração) e NRM (em que a matriz de rigidez é mantida constante durante o ciclo iterativo).

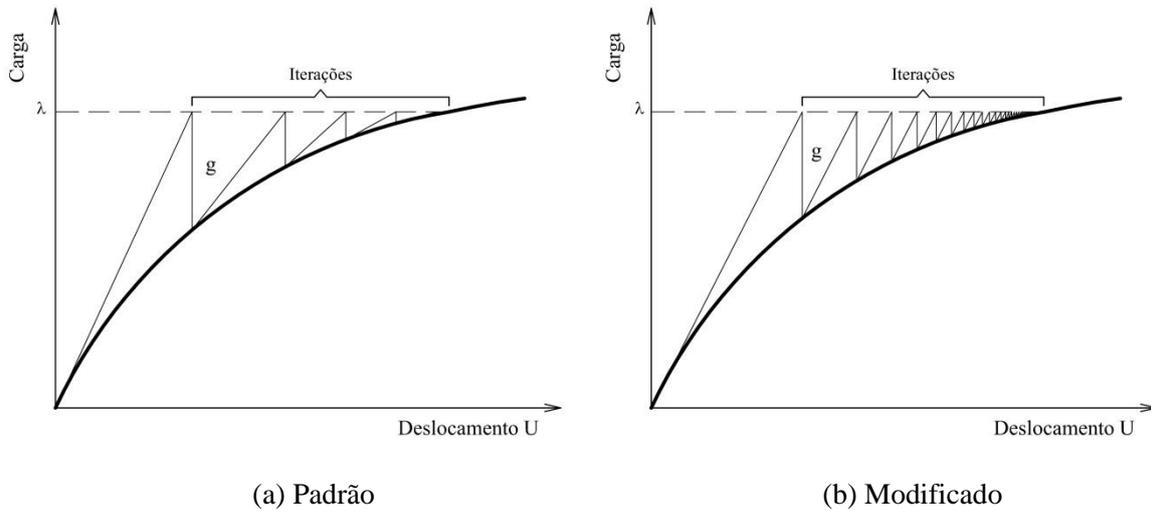


Figura 3. Representação gráfica do MNR Padrão e Modificado (Pires [12])

A correção do parâmetro de carga,  $\delta\lambda^k$ , única incógnita da Eq. (11) é determinada por alguma estratégia de iteração. Com a determinação de  $\delta\lambda^k$ , pode-se calcular a correção dos deslocamentos através da Eq. (12).

Uma vez obtida a solução iterativa,  $\delta\lambda^k$  e  $\delta\mathbf{U}^k$ , parte-se para a atualização das variáveis incrementais do problema:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k \quad (15)$$

$$\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k \quad (16)$$

e totais:

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k \quad (17)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k. \quad (18)$$

Como em qualquer processo numérico, a solução calculada é apenas uma aproximação da exata. Dessa forma, é preciso definir limites de tolerância para interrupção do processo iterativo. O processo é interrompido quando um ou dois critérios de convergência são satisfeitos. O primeiro critério de convergência — calculado no início da iteração corrente utilizando parâmetros da iteração anterior — é baseado em relações de forças e definido de acordo com:

$$\zeta_1 = \frac{\|\mathbf{g}^{(k-1)}\|}{\|\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r\|} \leq \zeta \quad (19)$$

em que o numerador representa a norma Euclidiana do vetor das forças desequilibradas na iteração anterior; o denominador, por sua vez, é a norma Euclidiana do vetor de incremento de carregamento externo, sendo  $\zeta$  um fator de tolerância fornecido pelo analista.

O segundo critério de convergência, verificado ao final de cada iteração, é baseado em relações de deslocamentos e definido como:

$$\zeta_2 = \frac{\|\delta\mathbf{U}^k\|}{\|\Delta\mathbf{U}^k\|} \leq \zeta \quad (20)$$

na qual o numerador é a norma Euclidiana dos deslocamentos iterativos e o denominador norma Euclidiana dos deslocamentos incrementais.

A Tabela 1 ilustra os procedimentos descritos nesta seção e na anterior, com as modificações necessárias para incluir a busca linear (itens sublinhados), que será explicada na seção seguinte.

Tabela 1. Metodologia incremental iterativa para análise estática não linear

<p><b>1. SOLUÇÃO INCREMENTAL TANGENTE:</b> <math>\Delta\lambda^0</math> e <math>\Delta\mathbf{U}^0</math></p> <p><b>1a.</b> Monta-se a matriz de rigidez tangente: <math>\mathbf{K}</math></p> <p><b>1b.</b> Resolva: <math>\delta\mathbf{U}_r = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_r</math></p> <p><b>1c.</b> Define <math>\Delta\lambda^0</math> usando uma estratégia de incremento de carga</p> <p><b>1d.</b> Determina: <math>\Delta\mathbf{U}^0 = \Delta\lambda^0\mathbf{U}_r</math></p> <p><b>1e.</b> Atualiza as variáveis na configuração <math>t + \Delta t</math>:  <math>{}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^0</math> e <math>{}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^0</math></p> <p><b>2. PROCESSO ITERATIVO NEWTON-RAPHSON:</b> <math>k = 1, 2, 3, \dots</math></p> <p><b>2a.</b> <u>Se <math>k \neq 1</math> ou a busca linear estiver ativada, pule para a etapa 2c</u></p> <p><b>2b.</b> Avalia o vetor de forças internas: <math>{}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)} = {}^t\mathbf{F}_i + \mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(k-1)}</math></p> <p><b>2c.</b> Calcula o vetor de forças residuais: <math>\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{(t+\Delta t)}\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - {}^{(t+\Delta t)}\mathbf{F}_i^{(k-1)}</math></p> <p><b>2d.</b> <u>Salva o vetor <math>\mathbf{g}</math> em <math>\mathbf{g}_0</math></u></p> <p><b>2e.</b> Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em forças ou em forças e deslocamentos conjuntamente</p> <p><b><u>SIM</u></b> (Critério de forças): <i>Pare o processo iterativo e siga para o item 3</i></p> <p><b>2f.</b> Se Newton-Raphson padrão, atualiza a matriz de rigidez tangente <math>\mathbf{K}</math></p> <p><b>2g.</b> Obtém a correção do parâmetro de carga, <math>\delta\lambda^k</math>, usando uma estratégia de iteração</p> <p><b>2h.</b> Determina o vetor de correção dos deslocamentos nodais: <math>\delta\mathbf{U}^k = \delta\mathbf{U}_g^k + \delta\lambda^k\delta\mathbf{U}_r^k</math>,  com:  <math>\delta\mathbf{U}_g^k = -\mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{g}^{(k-1)}</math> e <math>\delta\mathbf{U}_r^k = \mathbf{K}^{-1(k-1)}\mathbf{F}_r</math></p> <p><b>2i.</b> Verifica a convergência, caso seja utilizado o critério baseado em deslocamentos ou em forças e deslocamentos conjuntamente</p> <p><b><u>SIM</u></b> (Critério de deslocamentos): <i>Pare o processo iterativo e siga para o item 3</i></p> <p><b><u>SIM</u></b> (Critério de força e deslocamentos): <i>Pare o processo iterativo e siga para o item 3, apenas se houve a convergência no item 2e</i></p> <p><b>2j.</b> Atualiza o parâmetro de carga, <math>\lambda</math> e o vetor de deslocamentos nodais, <math>\mathbf{U}</math>:  a) <i>Incremental:</i> <math>\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^k</math> e <math>\Delta\mathbf{U}^k = \Delta\mathbf{U}^{(k-1)} + \delta\mathbf{U}^k</math>  b) <i>Total:</i> <math>{}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta\lambda^k</math> e <math>{}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}^k</math></p> <p><b>2k.</b> <u>Busca linear está ativada?</u></p> <p><b><u>SIM:</u></b> <u>Realiza o procedimento através de um dos algoritmos das Tabelas 2 e 3 detalhadas na Seção 2.3</u></p> <p><b>2l.</b> Retorna ao passo 2</p> <p><b>3. REALIZA UM NOVO INCREMENTO DE CARGA E RETORNA AO ITEM 1</b></p>
--

### 2.3 Busca Linear

No método da “busca linear” procura-se escolher o tamanho ideal do “passo” na direção que minimiza a função objetivo. Esse procedimento procura escalonar a solução corretiva — obtida por meio das iterações de NR — de forma a se atingir o equilíbrio do sistema estrutural da forma mais rápida possível.

A correção do vetor de deslocamentos nodais obtida passa a ter uma variável adicional, como mostrado a seguir:

$$\delta \mathbf{U}^k = \eta (\delta \mathbf{U}_g^k + \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}_r^k) \quad (21)$$

em que  $\eta$  é o tamanho do comprimento do passo iterativo, sendo a única variável se for usada a busca linear. No processo usual do MNR, o escalar  $\eta$  é igual a 1, como explicitado na Eq. (11).

A busca linear procura determinar o valor de  $\eta$  que torne a energia potencial total do sistema estrutural,  $\Pi$ , um valor mínimo. Em outras palavras, a busca procurará  $\eta$  que encaminhe o problema para a direção do equilíbrio estável.

Para que a solução do problema estrutural seja estacionária em  $\eta$  e, portanto, a estrutura esteja em equilíbrio, é necessário que a derivada da energia potencial total em função dessa variável seja nula. Dessa forma:

$$S(\eta) = \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{g}(\eta, \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^k) = 0. \quad (22)$$

Se a busca fosse exata, a procura seria pelo menor valor positivo de  $\eta$  que solucione a Eq. 22. Porém, na prática, é ineficiente aplicar uma busca linear exata. Em vez disso, é utilizado uma busca linear inexata que procura tornar o módulo de  $S(\eta)$  pequeno em comparação com o módulo de  $S_0$ , ou seja,

$$r(\eta) = \left| \frac{S(\eta)}{S_0} \right| < \beta_{BL} \quad (23)$$

na qual  $S_0$  é dado por:

$$S(\eta = 0) = \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{g}_0(\eta = 0) \quad (24)$$

e  $\beta_{BL}$  é o coeficiente de tolerância da busca linear.

Para que seja possível aplicar uma busca linear em descida padrão, é necessário que  $S_0$  seja negativo, pois assim a direção iterativa corrente estará em uma direção de descida energética — fator determinante, uma vez que a busca está fundamentada em um critério energético.

Então, assumindo a existência dos declives,  $S$ , que podem ser facilmente calculados, através das Eq. (22) e (24), a partir do produto interno das forças desequilibradas  $\mathbf{g}$  e da direção de deslocamento iterativo  $\delta \mathbf{U}$ , é necessário apenas aplicar um procedimento de interpolação simples para executar a busca linear.

A generalização do processo de interpolação simples para obtenção do valor do escalar  $\eta$  é dada por:

$$\eta_{j+1} = \left| \frac{-S_0}{S_j - S_0} \right|. \quad (25)$$

Esse processo envolve uma interpolação entre as “descidas” atuais e a em  $\eta = 0$  — e nem sempre será apropriado. No lugar da interpolação pode ser usada uma extrapolação, que não deve ser levada longe demais, sendo uma amplificação máxima necessária ao processo. De maneira semelhante, é necessário introduzir um comprimento de passo mínimo.

Deve ser enfatizado ainda que, para muitas iterações, a primeira tentativa de comprimento de passo,  $\eta = 1$ , irá satisfazer imediatamente a tolerância da busca linear. Portanto, nenhum cálculo

extrarresidual seria necessário por conta do deste procedimento. O único trabalho extra, em relação a uma estratégia sem busca linear, seria, nessas circunstâncias, o cálculo do produto interno dado pela Eq. (22) (com  $\eta = 1$ ) que é quase insignificante quando comparado com o gasto computacional gerado por outros cálculos.

O processo de busca é elucidado através de dois algoritmos apresentados pelas Tabelas 2 e 3. A Tabela 2 apresenta um algoritmo mais simples que está associado a técnicas de continuações que não precisam da resolução de equações de segundo grau, enquanto a Tabela 3 apresenta um algoritmo ligeiramente mais complicado que associa a busca com estratégias de continuação não linearizadas.

A explicação para a necessidade de dois algoritmos distintos reside no acoplamento (ou não) entre as variáveis da busca e da restrição da técnica de continuação. As variáveis da busca linear e das estratégias linearizadas são completamente desacopladas. Como exemplo, a equação de restrição proposta por Riks [15] reescrita pra incluir a variável  $\eta$  da busca linear é dada por:

$$\eta \delta \mathbf{U}^k \mathbf{T} \Delta \mathbf{U}^0 + \eta \delta \lambda^k \Delta \lambda^0 \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0 \quad (26)$$

o que leva a mesma equação para obtenção de  $\delta \lambda^k$  que Riks [15] propôs.

Por outro lado, para estratégias não linearizadas existe o acoplamento entre as restrições do método e a variável  $\eta$  da busca linear. Utilizando a estratégia de comprimento de arco cilíndrico para ilustrar:

$$\left( \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \eta \delta \mathbf{U}^k \right)^T \left( \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \eta \delta \mathbf{U}^k \right) - \Delta l^2 = 0 \quad (27)$$

indicando um total acoplamento entre as variáveis da busca e a restrição. Sendo assim, são necessários alguns ajustes para considerar a variação do parâmetro de carga à medida que o processo de busca linear é executado. Mais detalhes a respeito podem ser encontrados em Crisfield[7].

Tabela 2. Algoritmo da busca linear para estratégias linearizadas de iteração

**1.** Calcula o produto interno  $S_0$  relacionado com o nível de carga atual

$$S_0 = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{g}_0 - \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_r$$

Se  $S_0 > 0$ , abandona a busca linear e retorna para o processo iterativo

**2. LAÇO DA BUSCA LINEAR**  $i = 1, 2, 3, \dots$

**2a.** Calcula o vetor de forças residuais  $\mathbf{g}_i$  com  $\eta_i$  relacionado com o nível de carga atual

**2b.** Calcula o produto interno  $S_i$  atual

$$S_i = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{g}_i$$

**2c.** Se  $\left| \frac{S_i(\eta)}{S_0} \right| \leq \beta_{BL}$ , aceita a solução com  $\eta_i$  antes de passar para a próxima iteração

**2d.** Se a verificação de tolerância do item anterior não for satisfeita, aplica a interpolação da busca linear para obter  $\eta_{i+1}$

**2e.** Atualiza o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ :

a) *Incremental:*  $\Delta \mathbf{U}^k = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \eta_{i+1} \delta \mathbf{U}^k$

b) *Total:*  ${}^{(t+\Delta t)} \mathbf{U}^k = {}^t \mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^k$

**2f.** Retorna para o item 2

Tabela 3. Algoritmo da busca linear para estratégias não linearizadas de iteração

---

**1.** Calcula o produto interno  $S_0$  relacionado com o nível de carga atual

$$S_0 = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{g}_0 - \delta \lambda^k \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_r$$

Se  $S_0 > 0$ , abandona a busca linear e retorna para o processo iterativo

**2.** Calcula os produtos internos  $d_1$  —  $d_8$  e  $c_1$  e  $c_2$ .

$$d_1 = \Delta \lambda^{(k-1)} \delta \mathbf{U}_r^k \quad d_2 = \delta \mathbf{U}_g^k \delta \mathbf{U}_r^k \quad d_3 = \delta \mathbf{U}_g^k \delta \mathbf{U}_g^k \quad d_4 = \Delta \lambda^{(k-1)} \delta \mathbf{U}_g^k \quad c_1 = \delta \mathbf{U}_r^k \delta \mathbf{U}_r^k$$

$$d_5 = \mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{U}_g^k \quad d_6 = \delta \mathbf{U}_g^k \mathbf{g}_0 \quad d_7 = \delta \mathbf{U}_r^k \mathbf{g}_0 \quad d_8 = \Delta \lambda^{(k-1)} \Delta \lambda^{(k-1)} \quad c_2 = \mathbf{F}_r^T \delta \mathbf{U}_r^k$$

**3. LAÇO DA BUSCA LINEAR**  $i = 1, 2, 3, \dots$

**3a.** Calcula o vetor de forças residuais  $\mathbf{g}_i$  com  $\eta_i$  relacionado com o nível de carga atual

**3b.** Calcula os produtos internos  $e_{1,i}$  e  $e_{2,i}$

$$e_{1,i} = \delta \mathbf{U}_g^k \mathbf{g}_i \quad e_{2,i} = \delta \mathbf{U}_r^k \mathbf{g}_i$$

**3c.** Calcula o produto interno  $S_i$  atual

$$S_i = e_{1,i} + \delta \lambda_i e_{2,i}; \text{ e } S_0 \text{ atual}$$

$$S_0 = d_6 + \delta \lambda_i (d_5 + d_7) + \delta \lambda_i^2 c_2$$

Se  $S_0 > 0$ , abandona a busca linear e retorna para o processo iterativo

**3d.** Se  $\left| \frac{S_i(\eta)}{S_0} \right| \leq \beta_{BL}$ , aceita a solução com  $\eta_i$  e  $\delta \lambda_i$  antes de passar para a próxima iteração

**3e.** Se a verificação de tolerância do item anterior não for satisfeita, aplica a interpolação da busca linear para obter  $\eta_{i+1}$  no nível de carga  $\delta \lambda_i$

**3f.** Para obter  $\delta \lambda_{i+1}$ , resolva:

$$a_1 (\delta \lambda_{i+1})^2 + a_2 (\delta \lambda_{i+1}) + a_3 = 0, \text{ com}$$

$$a_1 = \eta^2 c_1; \quad a_2 = 2\eta d_1 + 2\eta^2 d_2; \quad a_3 = \eta^2 d_3 + 2\eta d_4 + [d_8 - \Delta l^2]$$

**3g.** Calcula o produto interno  $S_i$  atual

$$S_i = e_{1,i} + \delta \lambda_i e_{2,i} + \delta \lambda_{i+1} d_5 + \delta \lambda_i \delta \lambda_{i+1} c_2; \text{ e } S_0 \text{ atual}$$

$$S_0 = d_6 + \delta \lambda_{i+1} (d_5 + d_7) + \delta \lambda_{i+1}^2 c_2$$

Se  $S_0 > 0$ , abandona a busca linear e retorna para o processo iterativo

**3h.** Se a verificação de tolerância do item anterior não for satisfeita, aplica a interpolação da busca linear para obter  $\eta_{i+1}$  no nível de carga  $\delta \lambda_{i+1}$

**3i.** Se  $\eta_{i+1}$  obtido no item anterior for próximo o suficiente do último  $\eta_{i+1}$ , aceita o último  $\eta_{i+1}$  calculado com seu respectivo  $\delta \lambda_{i+1}$  que irá satisfazer a restrição da estratégia de iteração. Se não, retorna para o item 3f.

**3j.** Assumindo que agora tem-se  $\eta_{i+1}$  e  $\delta \lambda_{i+1}$  atualiza o parâmetro de carga,  $\lambda$ , e o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{U}$ :

a) *Incremental:*  $\Delta \lambda^k = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda_{i+1}^k$  e  $\Delta \mathbf{U}^k = \Delta \mathbf{U}^{(k-1)} + \eta_{i+1} \delta \mathbf{U}^k$

b) *Total:*  ${}^{(t+\Delta t)}\lambda^k = {}^t\lambda + \Delta \lambda^k$  e  ${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{U}^k = {}^t\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}^k$

**3k.** Retorna para o item 3

---

### 3 Resultados Numéricos

Nesta seção, pretende-se verificar a eficiência computacional da técnica da busca linear para análise estática não linear de estruturas. Serão apresentados resultados de análises em três sistemas estruturas que são usados frequentemente para validar estratégias de solução não linear visando a avaliar: a eficiência da estratégia quando associada com NRP e NRM; a influência da taxa de tolerância na eficiência do processo da busca; e a eficácia da busca com diferentes estratégias de iteração.

Os parâmetros fundamentais determinados para mensurar a eficiência da estratégia foram: número total incrementos ( $N_{tot}$ ) e iterações ( $I_{tot}$ ); número de iterações médias por incremento ( $I_{méd}$ ); tempo de processamento em segundos ( $CPU$ ); e número total de reinicializações ( $Rein$ ). É válido ressaltar que a reinicialização acontece quando se atinge o número máximo de iterações desejadas para o problema e não se obtém convergência para um dado incremento de carga. Sendo assim, é necessário que a análise retorne à última configuração de equilíbrio conhecida — e que se recomece o processo incremental iterativo considerando metade do valor encontrado para  $\Delta\lambda^0$ .

#### 3.1 Pórtico de Lee

O Pórtico de Lee é uma estrutura frequentemente utilizada para validar formulações de elementos finitos e estratégias de solução não linear. A Fig. 4 ilustra o problema a ser analisado nesta seção. Esse sistema é composto por um pilar e uma viga, com o comprimento  $L = 120$  cm e apoios de segundo gênero em ambas extremidades. A seção transversal dos elementos possui área  $A = 6$  cm<sup>2</sup>, momento de inércia  $I = 2$  cm<sup>4</sup> e coeficiente de forma  $k = 1$ . O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material que compõe os elementos são  $E = 720$  kN/cm<sup>2</sup> e  $\nu = 0,3$ , respectivamente. O carregamento externo é composto por uma carga vertical  $P = 1$  kN aplicada a  $0,2L$  da extremidade esquerda da viga.

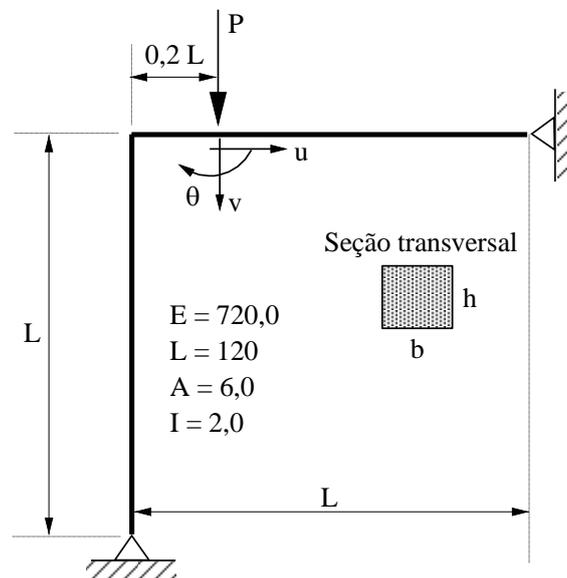


Figura 4. Pórtico de Lee: geometria e carregamento

Os primeiros estudos com essa estrutura foram desenvolvidos por Lee *et al.* [16]. Na sequência, diversos autores analisaram esse pórtico numericamente: Schweizerhof e Wriggers [17], Coulter e Miller [18], Chen e Blandford [19] e Pacoste e Eriksson [20]. Mais recentemente, Silva [1] e Silva [21] utilizaram este pórtico para validarem formulações implementadas no CS-ASA.

Esta seção procurará estudar a eficiência do processo de busca linear na análise colocando em evidência a atualização da matriz de rigidez durante o processo iterativo. Para o exemplo, usou-se uma

malha com 20 elementos e a formulação SOF-2 presente no CS-ASA. O critério de convergência escolhido foi o baseado em deslocamentos, com tolerância  $\zeta = 10^{-4}$ , o incremento inicial do parâmetro de carga foi  $\Delta\lambda^0 = 0,1$ , e 21 iterações máximas foram permitidas. Como estratégia de incremento de carga e iteração foi utilizada, para ambas, o deslocamento generalizado. Para análises com busca linear, o parâmetro de tolerância da busca foi  $\beta_{BL} = 0,6$ . Para comparação, foram utilizados os resultados obtidos por Schweizerhof e Wriggers [17]. As trajetórias de equilíbrio são retratadas na Fig. 5 para análises com NRP e na Fig. 6 para análises com NRM.

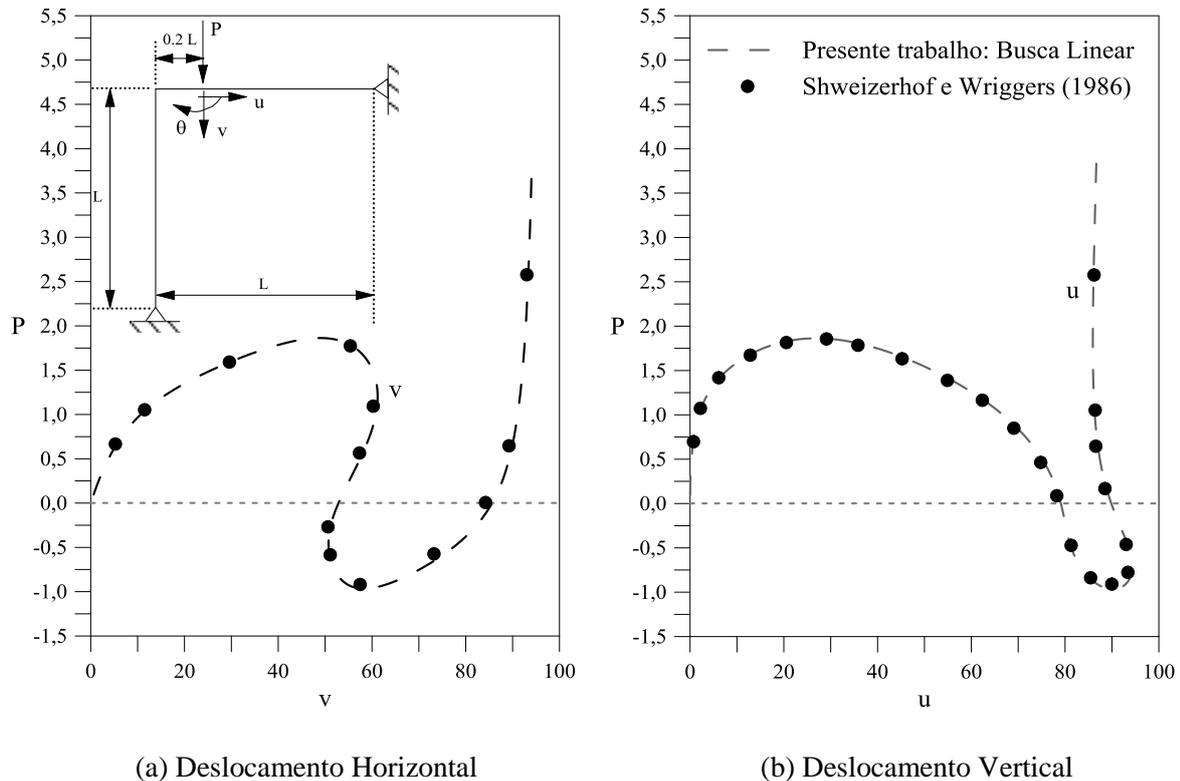


Figura 5. Trajetórias de equilíbrio para o Pórtico de Lee – NRP

As Tabelas 4 e 5 apresentam os resultados obtidos com o processo de busca linear e com o procedimento convencional para análises com NRP e NRM, respectivamente, para fins de comparação. Por meio dos resultados apresentados nas duas tabelas, é possível perceber a influência da busca na análise e um melhor desempenho quando esse procedimento é aplicado, tanto para análises utilizando NRP quanto NRM. Pode-se notar redução em todos os parâmetros relevantes (exceto iterações médias), evidenciando a eficiência que o processo de busca proporciona.

Tabela 4. Avaliação da eficiência computacional da busca linear associada a NRP

Busca linear					Processo convencional				
$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{méd}$	Rein	CPU	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{méd}$	Rein	CPU
412	4065	9,86	1	12,020	953	6459	6,78	2	16,540

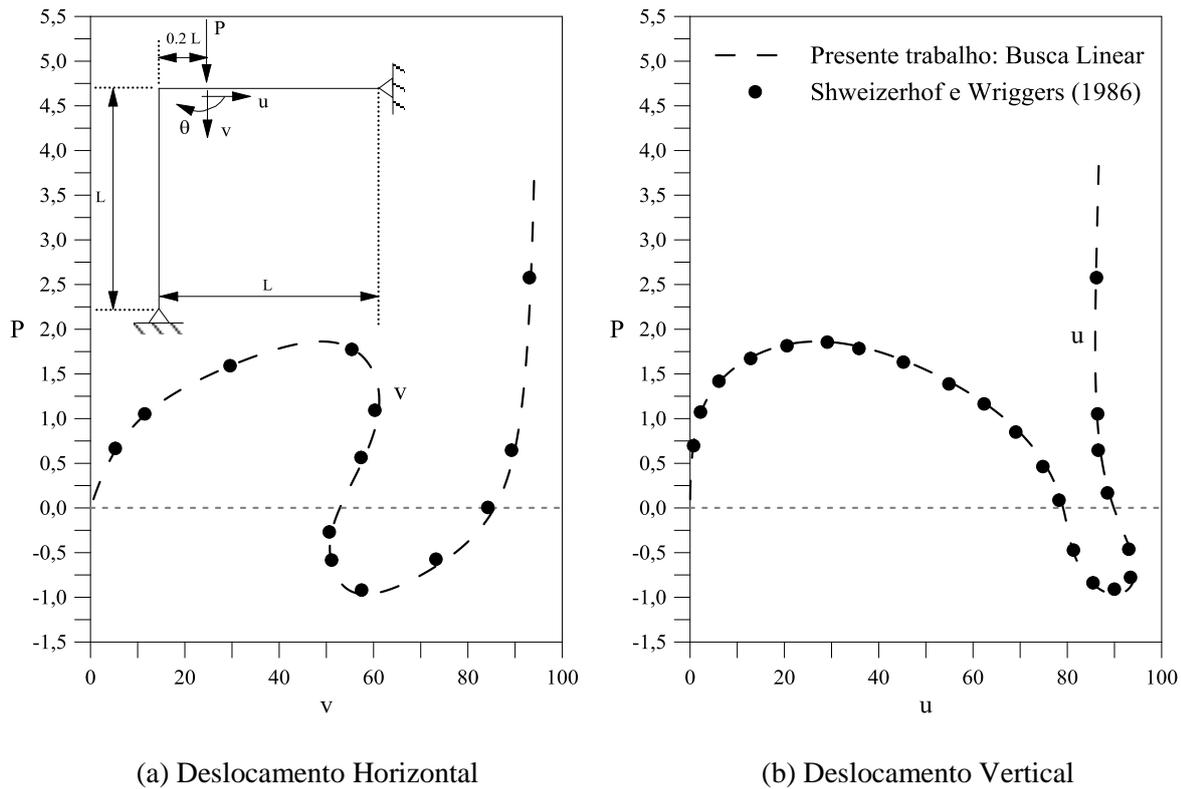


Figura 6. Trajetórias de equilíbrio para o Pórtico de Lee - NRM

Tabela 5. Avaliação da eficiência computacional da busca linear associada a NRM

Busca linear					Processo convencional				
$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{méd}$	Rein	CPU	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{méd}$	Rein	CPU
582	4571	7,85	2	11,930	1252	5802	4,63	3	15,560

É possível observar, por meio da comparação entre as análises com e sem atualização da matriz durante o processo iterativo, que a busca apresenta desempenho semelhante para esses métodos. Portanto, as análises das seções seguintes serão realizadas utilizando NRM, a fim de padronizar as análises deste trabalho.

### 3.2 Coluna Engastada Livre

Esta seção irá estudar uma coluna na qual uma das extremidades está engastada e a outra livre, como ilustra a Fig. 7. A coluna tem comprimento  $L$  e rigidez a flexão  $EI$ . O carregamento é constituído por uma carga pontual  $P$  vertical associada a uma pequena excentricidade ( $M = 0,001PL$ ), introduzida para evitar dificuldades numéricas associadas ao ponto de bifurcação.

O objetivo fundamental desta seção é verificar a influência da tolerância da busca linear  $\beta_{BL}$ . Utilizou-se diferentes valores deste parâmetro nas análises para constatar tal influência. O método de comprimento de arco de Ramm [22] foi utilizado em associação com o método de NRM. O critério de convergência adotado será o baseado em deslocamentos, com tolerância  $\zeta = 10^{-3}$ . O incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^0$ , para o primeiro passo incremental foi considerado igual a  $EI/(PL^2)$  com  $P = 1$ , com 21 iterações máximas permitidas. Empregou-se uma malha com 10 elementos finitos e formulação SOF-2.

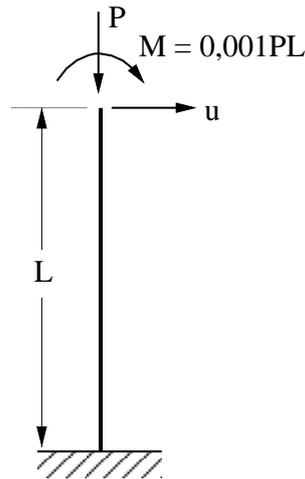


Figura 7. Coluna engastada livre

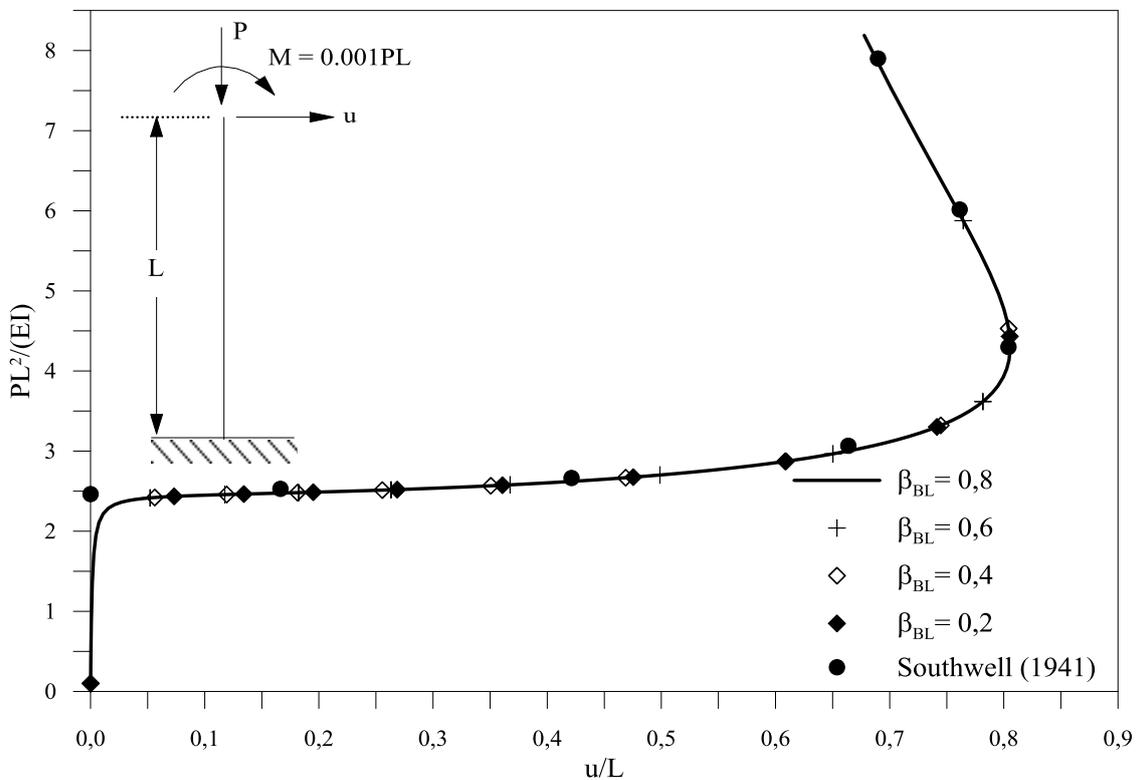


Figura 8. Trajetórias de equilíbrio para a viga engastada livre

Os caminhos não lineares de equilíbrio são exibidos na Fig. 8. Como fonte de avaliação dos resultados obtidos, utilizou-se a solução analítica apresentada por Southwell [23]. Por sua vez, a Tabela 6 apresenta os resultados através dos parâmetros relevantes para uma análise não linear.

Ao comparar os parâmetros entre análises, é possível perceber o melhor desempenho computacional com o processo de busca, com qualquer valor para tolerância, quando comparado com o processo convencional. Nota-se uma redução substancial no número de incrementos de carga e iterações totais. O número de falhas do processo de convergência também é reduzido quando o processo de busca é aplicado, evidenciando a característica de facilitar/acelerar a convergência que o método tem.

Tabela 6. Avaliação da eficiência computacional da busca linear

Valor de $\beta_{BL}$	$N_{tot}$	$I_{tot}$	$I_{méd}$	Rein	CPU
Convencional	238	2505	10,53	3	2,62
$\beta_{BL} = 0,8$	128	1354	10,58	0	1,69
$\beta_{BL} = 0,6$	140	1439	10,28	2	1,84
$\beta_{BL} = 0,4$	147	1514	10,30	1	2,15
$\beta_{BL} = 0,2$	148	1546	10,45	0	2,14

Entretanto, como pode ser visto através da Tabela 6, uma simples redução da tolerância da busca não garante mais rapidez à análise. É possível constatar ainda que diferentes estruturas apresentam valores ideais diferentes para  $\beta_{BL}$ . Entretanto, para a maioria das análises realizadas neste trabalho, valores entre 0,6 e 0,4 produziram bons resultados.

### 3.3 Viga Engastada Livre

O terceiro exemplo deste trabalho é um problema clássico na validação de modelos numéricos. Vários pesquisadores analisaram essa estrutura procurando validar as metodologias propostas por eles, incluindo Bathe e Bolourchi [24], cujos resultados serão utilizados para comparação com as análises desta pesquisa, Crisfield [25], Gummadi e Palazotto [26], Silva [1] e Silva [21].

Esta viga, Fig. 9, está engastada em uma de suas extremidades e submetida a um momento fletor na extremidade livre; tem comprimento  $L$ , seção transversal retangular e módulo de elasticidade  $E$ . Nesse estudo, o momento fletor aplicado na extremidade foi aumentado variando o parâmetro de carga de 0,0 a 2,0. Para  $\lambda = 2,0$ , tem-se que a viga se deforma com a extremidade livre rotacionando  $720^\circ$ .

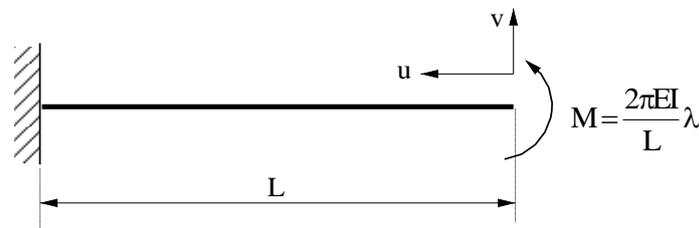


Figura 9. Viga engastada-livre

Com esta seção procura-se confirmar a funcionalidade do método de busca linear com diferentes estratégias de iteração, mantendo para todas a estratégia de incremento do comprimento de arco. Para isso, serão associadas ao método de NRM as técnicas de norma mínima dos deslocamentos e os comprimentos de arcos propostos por Riks [15] e Ramm [22], além do comprimento de arco cilíndrico. O número máximo de iterações permitidas foi igual a 21 e o incremento inicial do parâmetro de carga foi  $\Delta\lambda^0 = 0,1$ . O critério de convergência escolhido foi o baseado em deslocamentos, com tolerância  $\zeta = 10^{-3}$ . A tolerância da busca linear utilizada para as análises foi  $\beta_{BL} = 0,5$ . Foram utilizados 10 elementos finitos como malha e a formulação SOF-2 disponível no CS-ASA.

A Fig. 10 mostra as trajetórias de equilíbrio com as diferentes combinações de incremento de carga e de iteração. A Tabela 7 traduz os resultados em função dos parâmetros relevantes para uma análise não linear.

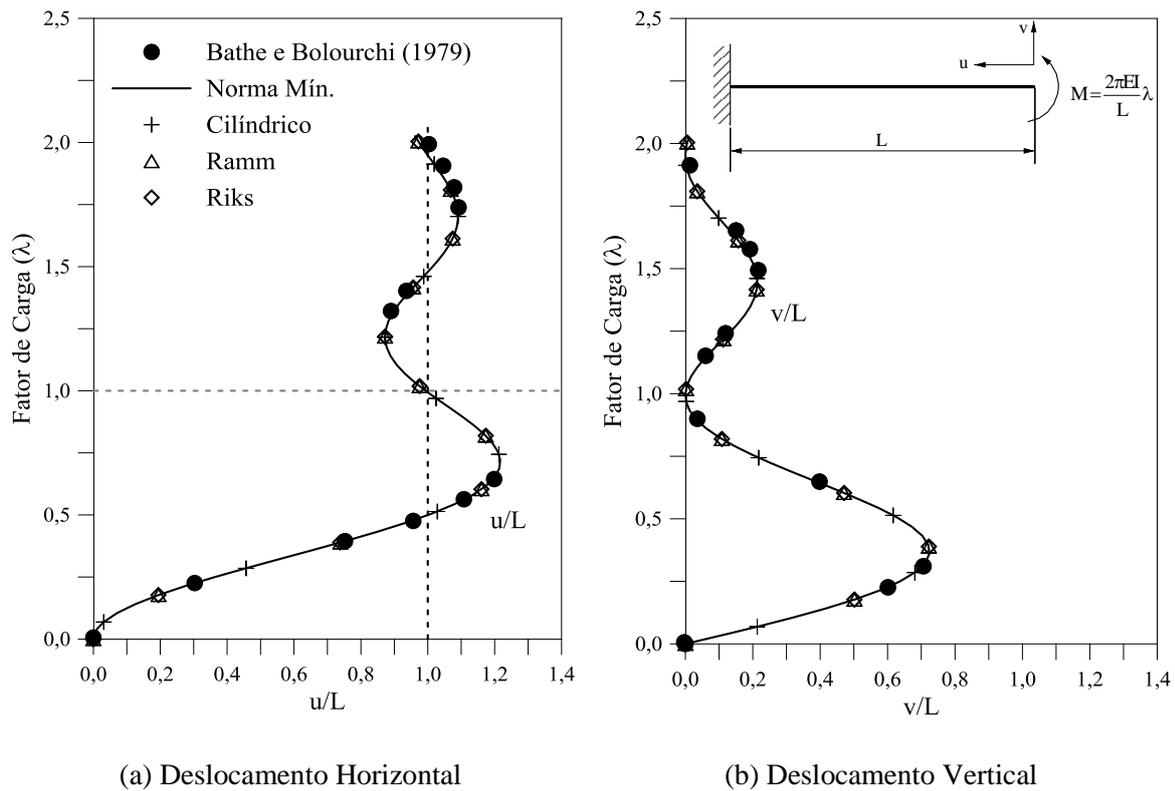


Figura 10. Trajetórias de equilíbrio para a viga engastada-livre

Tabela 7. Avaliação da eficiência computacional da busca linear associada a diferentes estratégias de iteração

Estratégia	Busca linear					Processo convencional				
	N <sub>tot</sub>	I <sub>tot</sub>	I <sub>méd</sub>	Rein	CPU	N <sub>tot</sub>	I <sub>tot</sub>	I <sub>méd</sub>	Rein	CPU
Norma Mín.	63	644	10,22	0	0,94s	85	892	10,49	0	1,12s
Cilíndrico	58	590	10,17	0	0,92s	87	914	10,51	0	1,16s
Ramm	251	2719	10,83	0	3,17s	418	4564	10,92	0	4,46s
Riks	251	2719	10,83	0	3,43s	418	4564	10,92	0	5,14s

Ao analisar os resultados, percebe-se que o método funciona adequadamente com diferentes estratégias de iteração, garantindo segurança ao analista em utilizar a busca linear. Para qualquer estratégia de iteração utilizada nesta seção, o método da busca reduz o  $N_{tot}$  e o  $I_{tot}$  acima de 30%. Ainda é possível visualizar a manutenção da similaridade que o processo convencional proporciona entre as estratégias de Ramm e Riks e norma mínima e comprimento de arco cilíndrico.

## 4 Conclusões

Foi proposto neste trabalho a inclusão de um algoritmo de busca linear para acelerar o processo de solução do sistema de equações não lineares do equilíbrio estrutural. Esta técnica que procura escalonar o vetor de correção iterativa, com a proposta de garantir e acelerar o processo de

convergência do método de Newton-Raphson.

A partir dos exemplos estruturais clássicos analisados no presente trabalho, conclui-se que a busca acoplada ao MNR produz resultados que comprovam a eficiência dessa associação. Observa-se que a busca é eficaz independentemente da associação com o método de NRP ou NRM. Fica comprovado que diferentes técnicas de continuação podem ser relacionadas com a estratégia da busca linear, que apresenta performance similar entre diferentes métodos.

A tolerância da busca, outro ponto estudado neste trabalho, torna-se um parâmetro muito influente no *solver* não linear. Apesar do processo de solução melhorar com diferentes valores do parâmetro da tolerância, a simples redução deste valor, tornando o processo mais rigoroso, não garante maior eficiência. Percebe-se também, que para diferentes estruturas, o valor ideal deste parâmetro difere. Porém, para análises realizadas por este estudo, valores entre 0,6 e 0,4 indicam uma boa redução no tempo de processamento das análises.

Portanto, esta estratégia apresentada aqui se torna relevante para análises estruturais não lineares, uma vez que os resultados indicam melhoras no funcionamento do *solver* e aplicabilidade com diferentes tipos de estrutura.

## Agradecimentos

Os autores são gratos à CAPES, CNPq, FAPEMIG, Fundação Gorceix, PROPEC e PROPP/UFOP pelo apoio financeiro recebido para o desenvolvimento deste trabalho.

## Referências

- [1] A. R. D. Silva. Sistema computacional para a análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil, 2009.
- [2] P. E. Gill and W. Murray. *Safeguarded step-length algorithms for optimizations using descent methods*. National Physical Laboratory Report NAL 37. Publisher, 1974.
- [3] R. Fletcher. *Practical methods of optimization*. Wiley, 2nd edition. Publisher, 1987.
- [4] S. H. Lee. Rudimentary considerations for effective line search method in nonlinear finite element analysis. *Computers & Structures*, vol. 32, n. 6, pp. 1287-1301, 1989.
- [5] M. A. Crisfield. An arc-length method including line search and accelerations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, pp. 1269-1289, 1983
- [6] M. A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Vol. 1. Wiley. Publisher 1991.
- [7] M. A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Vol. 2. Wiley. Publisher 1997.
- [8] B. Jeremic. Line search technique for elasto-plastic finite element computations in geomechanics. *Commun. Numer. Meth. Engng.*, n. 17, pp. 115-125, 2001.
- [9] K. Fujiwara, Y. Okamoto, A. Kameari and A. Ahagon. The Newton-Raphson method accelerated by using a line search – Comparison between energy functional and residual minimization. *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 41, n. 5, pp. 1724-1727, 2005.
- [10] Y. Okamoto, K. Fujiwara and R. Himeno, Exact minimization of energy functional for NR Method with line-search technique. *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 45, n. 3, pp. 1537-1552, 2009.
- [11] M. Ritto-Corrêa and D. Camotim. On the arc-length and other quadratic control methods: Established, less known and new implementation procedures. *Computers and Structures*, vol. 86, pp. 1353-1368, 2007.
- [12] D. M. Pires. Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil, 2012.
- [13] R. D. Cook, D. S. Malkus and M. E. Plesha. *Concepts and applications of finite element analysis*. Wiley, 3rd edition. Publisher, 1989.

- [14] J. L. Batoz and G. Dhatt. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 1262-1267, 1979.
- [15] E. Riks. The application of Newton's methods to the problems elastic stability. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 101, pp. 511-515.
- [16] S. Lee, F. S. Manuel and E.C. Rossow. Large deflections and stability of elastic frame. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 94, pp. 521-548, 1968.
- [17] K. H. Schweizerhof and P. Wriggers. Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 59, pp. 269-279, 1986.
- [18] B. A. Coulter and R. E. Miller. Numerical analysis of a generalized plane 'elastica' with non-linear material behavior. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, pp. 617-630, 1988.
- [19] H. Chen and G. E. Blandford. Work-increment-control method for nonlinear analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pp. 909-930, 1993.
- [20] C. Pacoste and A. Eriksson. Beam elements in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 144, pp. 163-197.
- [21] J. L. Silva. Formulações corrotacionais 2D para análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Deciv/EM/UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil, 2016.
- [22] E. Ramm. The Riks/Wempner Approach – An extension of displacement control method in non-linear analysis. *Non-linear Computational Mechanics*, ed. E. Hinton *et al.*, pp. 63-86, 1982.
- [23] R. V. Southwell. *An introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists*. Oxford University Press, 2nd edition, 1941.
- [24] K. J. Bathe and S. Bolourchi. Large displacement analysis of three dimensional beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, pp. 961-986.
- [25] M. A. Crisfield. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three dimensional, beam-elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 81, pp. 131-150, 1990.
- [26] L. N. B. Gummadi and A. N. Palazotto. Large strain analysis of beams and arches undergoing large rotations. *International Journal of Non-linear Mechanics*, vol. 33, pp. 615-645, 1998.