

## **ANÁLISE ESTRUTURAL NUMÉRICA DE PÓRTICOS PLANOS**

**Caroline Martins Calisto**

**Cristiane Caroline Campos Lopes**

*carolinemartinscalisto@yahoo.com.br*

*cristianecarolinelopes@yahoo.com.br*

*Universidade Federal de Minas Gerais*

*Avenida Antônio Carlos, 6627 – Escola de Engenharia, Departamento de Engenharia Estrutural,  
31270-901, Belo Horizonte - MG, Brasil*

**Hisashi Inoue**

*hisashi@ufsj.edu.br*

*Universidade Federal de São João del-Rei*

*Rodovia MG 443, km 7, 36420-000, Ouro Branco - MG, Brasil*

**Resumo.** As estruturas reticuladas podem ser divididas em estruturas planas e espaciais. Nesse trabalho serão abordadas as estruturas planas, mais especificamente os pórticos planos. Então, esse artigo apresenta o desenvolvimento de um programa em linguagem C++ que analisa numericamente essas estruturas. A formulação do programa se baseia no Método da Rigidez e é denominado de PORT2D. A sua versão possibilita obter os valores de esforços nas barras, as reações de apoios e os deslocamentos a partir dos seguintes dados de entrada: número de barras, número de nós, número de restrições de apoio, número de nós restringidos, módulo de elasticidade de material, número de barras carregadas e número de nós carregados. Para validar a estratégia proposta, os resultados obtidos pelo programa PORT2D são comparados com a resposta encontrada na literatura e com o software SAP2000. Em ambos os casos, os resultados obtidos pelo PORT2D mostraram ser numericamente coincidentes. Assim, o programa PORT2D apresenta resultados satisfatórios para a análise estrutural de pórticos planos.

**Palavras-chave:** Pórticos planos, Método da rigidez, Linguagem C++.

**Abstract.** The reticulated structures can be divided into plane and spatial structures. In this work will be approached the plane structures, more specifically the plane frames. So, this paper presents the development of a program in C++ language that does a numerical structural analysis of steel plane frames. The methodology is based on the Direct Stiffness Method and the program was called PORT2D. From some input data, its version makes possible to obtain the efforts in the beams, support reactions and displacements. In addition to the modulus of elasticity, the program input data are the number of beams, nodes, support restrictions, restricted nodes, beams loaded and nodes loaded. In order to validate the developed program, the results obtained were compared with the analytical solution and software SAP2000. In both cases, the results obtained by PORT2D were shown to be numerically coincident. Then, the PORT2D program presents satisfactory results for the structural analysis of steel plane frames.

**Keywords:** Steel plane frames, Direct stiffness method, C++ language.

## 1 Introdução

De acordo com Soriano & Lima [1] e Martha [2], os sistemas físicos que recebem e transmitem esforços são classificados como estruturas. Um modelo de estrutura a ser analisado é idealizado a partir de equações matemáticas e devem-se obter resultados aproximados aos da estrutura real. A análise dessas estruturas pode ser definida como sendo a fase do projeto estrutural na qual é possível prever o comportamento da estrutura. Diversos parâmetros podem ser utilizados para demonstrar esse comportamento, tais como tensões, deformações e deslocamentos. O objetivo dessa análise, que é denominada análise estrutural, é determinar os esforços das tensões, os deslocamentos e as deformações.

Esse artigo aborda os pórticos planos que possuem barras retas. Segundo Soriano [3], essas barras devem estar localizadas em um mesmo plano, geralmente o plano vertical e submetidas a esforços somente nesse plano de forma que haja momento fletor, força normal e força cortante em cada seção transversal de barra. Porém, para que isso ocorra, um dos eixos principais de inércia das seções transversais deve estar situado nesse plano. As barras podem ser denominadas de acordo com a função que exercem na estrutura ou podem ser chamadas como *elemento*. A denominação de elemento é comum na programação.

Soriano [3] e Gere & Weaver Jr. [4] definem que os pontos de encontro entre os elementos, as extremidades livres e os apoios são definidos como nós. Dessa maneira, o sistema será uma união de elementos unidimensionais que estão unidos de maneira pontual, identificando assim, um conjunto de pontos nodais presente na estrutura.

## 2 Fundamentação Teórica

Segundo Gere & Weaver Jr. [4] e White et al. [5], as condições básicas da análise estrutural são as condições de equilíbrio, de compatibilidade entre deformações e deslocamentos e sobre o comportamento dos materiais. Entretanto, nos problemas mais complexos não se consegue um sistema com o mesmo número de equações e de incógnitas. E para esses problemas, dois métodos básicos são usados para a análise estrutural: o método das forças e método dos deslocamentos, também conhecidos como método da flexibilidade e método da rigidez, respectivamente.

Tanto o método das forças quanto o método da rigidez possuem a mesma formulação matemática. Contudo, o presente artigo aborda unicamente o método da rigidez, no qual os deslocamentos dos nós das estruturas são os valores a se determinar.

Segundo Gere & Weaver Jr. [4] a primeira etapa a ser realizada para a análise de pórticos planos é a numeração das barras e dos nós. Os nós são numerados de 1 a  $n_j$ , no qual  $n_j$  representa o número de nós totais. Já as barras são numeradas de 1 a  $m$ , sendo  $m$  o número de barras totais. A ordem da numeração não influencia, contudo depois que a numeração está completa é necessário anotar os dois números de nós que se referem a cada barra. Esse procedimento é necessário para saber quais os elementos da matriz de rigidez de nó ( $\mathbf{S}_j$ ) e do vetor de carga equivalente ( $\mathbf{A}_E$ ) receberão as contribuições de cada barra.

Como foi dito anteriormente, cada nó poderá sofrer deslocamentos referentes à translação no plano  $x$ - $y$  e giro no sentido de  $z$ . Assim, para um nó  $j$  arbitrário os deslocamentos serão definidos como a seguir:

$3j - 2 =$  índice para a translação na direção de  $x$ ;

$3j - 1 =$  índice para a translação na direção de  $y$ ;

$3j =$  índice para a rotação no sentido de  $z$ .

Também se define o número de graus de liberdade ( $n$ ) que é obtido da Eq. (1):

$$n = 3n_j - n_r, \quad (1)$$

Na qual:  $n =$  número de graus de liberdade do pórtico plano;  $n_j =$  número de nós e  $n_r =$  número de restrições.

Como uma barra  $i$  terá  $k$  e  $j$  como nós em cada extremidade. Os possíveis deslocamentos referentes a esta barra serão definidos a partir das Eq. (2):

$$\begin{aligned} j1 &= 3j - 2, \\ j2 &= 3j - 1, \\ j3 &= 3j. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} k1 &= 3k - 2, \\ k2 &= 3k - 1, \\ k3 &= 3k. \end{aligned}$$

Para obter a matriz de rigidez de nó é recomendado que primeiramente seja feita a matriz  $S_{MD}$  para os eixos da estrutura para a  $i$ -ésima barra do pórtico conforme a Fig.1.

$$S_{MD} = \begin{bmatrix} \frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 & \left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) C_x C_y & -\frac{6EI_z}{L^2} C_y & -\left(\frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2\right) & -\left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) C_x C_y & -\frac{6EI_z}{L^2} C_y \\ \left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) C_x C_y & \frac{EA_x}{L} C_y^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_x^2 & \frac{6EI_z}{L^2} C_x & -\left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) C_x C_y & -\left(\frac{EA_x}{L} C_y^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_x^2\right) & \frac{6EI_z}{L^2} C_x \\ -\frac{6EI_z}{L^2} C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{4EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} C_y & -\frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{2EI_z}{L} \\ -\left(\frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2\right) & -\left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) C_x C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_y & \frac{EA_x}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 & \left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) C_x C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_y \\ -\left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) C_x C_y & -\left(\frac{EA_x}{L} C_y^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_x^2\right) & -\frac{6EI_z}{L^2} C_x & \left(\frac{EA_x}{L} - \frac{12EI_z}{L^3}\right) C_x C_y & \frac{EA_x}{L} C_y^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_x^2 & -\frac{6EI_z}{L^2} C_x \\ -\frac{6EI_z}{L^2} C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{2EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} C_y & -\frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

Figura 1. Matriz  $S_{MD}$  (Gere & Weaver Jr. [4])

Sendo  $E$  = módulo de elasticidade de material;  $A_x$  = área da seção transversal;  $L$  = comprimento da barra;  $C_x$  = co-seno diretor em  $x$  da barra;  $C_y$  = co-seno diretor em  $y$  da barra e  $I_z$  = momento principal de inércia da seção transversal da barra com relação ao eixo  $z_m$ .

É importante ressaltar que a barra arbitrária  $i$  tem influência nas rigidezes dos nós  $j$  e  $k$ . Sendo assim, utilizando como referência os índices subscritos, elementos da matriz  $S_{MD}$  são transferidos para a matriz de rigidez global ( $S_j$ ).

Na primeira coluna da matriz  $S_{MD}$  constam as ações de restrições de  $j$  e  $k$  quanto à translação unitária na direção  $x$  do nó  $j$  (índice  $j1$ ). Para alocar essa coluna na matriz de rigidez global ( $S_j$ ) considera-se que nos três primeiros coeficientes de rigidez há um somatório da contribuição de todas as barras, incluindo a barra  $i$ , que se juntam no nó  $j$ . Já os outros três coeficientes de rigidez incluem somente a contribuição da barra  $i$ . O procedimento é descrito abaixo nas Eq. (3).

$$\begin{aligned} (S_j)_{j1,j1} &= \sum S_{MD} + (S_{MD11})_i, \\ (S_j)_{j2,j1} &= \sum S_{MD} + (S_{MD21})_i, \\ (S_j)_{j3,j1} &= \sum S_{MD} + (S_{MD31})_i, \\ (S_j)_{k1,j1} &= (S_{MD41})_i, \\ (S_j)_{k2,j1} &= (S_{MD51})_i, \\ (S_j)_{k3,j1} &= (S_{MD61})_i. \end{aligned} \quad (3)$$

de modo semelhante, na segunda coluna da matriz  $S_{MD}$  constam as ações de restrições de  $j$  e  $k$ , porém nesse caso quanto à translação unitária na direção  $y$  da extremidade  $j$  da barra. E na terceira coluna da matriz  $S_{MD}$  constam as ações de restrições de  $j$  e  $k$  quanto ao giro unitário no sentido de  $z$  no nó  $j$ . Dessa maneira, a segunda e a terceira coluna da matriz  $S_{MD}$  são transferidas para a matriz  $S_j$  de acordo com as Eq. (4) e (5), respectivamente.

A quarta, quinta e sexta coluna de  $S_{MD}$  serão colocadas na matriz  $S_j$  da mesma maneira que a primeira, segunda e terceira colunas, respectivamente. Porém, nesse caso as translações e a rotação são referentes ao nó  $k$  (índice  $k1$ ) e os três primeiros termos serão feitos como os três últimos termos das equações anteriores e vice-versa, como segue nas Eq. (6), (7) e (8).

$$\begin{aligned}
 (S_j)_{j1,j2} &= \sum S_{MD} + (S_{MD12})_i, \\
 (S_j)_{j2,j2} &= \sum S_{MD} + (S_{MD22})_i, \\
 (S_j)_{j3,j2} &= \sum S_{MD} + (S_{MD32})_i, \\
 (S_j)_{k1,j2} &= (S_{MD42})_i, \\
 (S_j)_{k2,j2} &= (S_{MD52})_i, \\
 (S_j)_{k3,j2} &= (S_{MD62})_i.
 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
 (S_j)_{j1,j3} &= \sum S_{MD} + (S_{MD13})_i, \\
 (S_j)_{j2,j3} &= \sum S_{MD} + (S_{MD23})_i, \\
 (S_j)_{j3,j3} &= \sum S_{MD} + (S_{MD33})_i, \\
 (S_j)_{k1,j3} &= (S_{MD43})_i, \\
 (S_j)_{k2,j3} &= (S_{MD53})_i, \\
 (S_j)_{k3,j3} &= (S_{MD63})_i.
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 (S_j)_{j1,k1} &= (S_{MD14})_i, \\
 (S_j)_{j2,k1} &= (S_{MD24})_i, \\
 (S_j)_{j3,k1} &= (S_{MD34})_i, \\
 (S_j)_{k1,k1} &= \sum S_{MD} + (S_{MD44})_i, \\
 (S_j)_{k2,k1} &= \sum S_{MD} + (S_{MD54})_i, \\
 (S_j)_{k3,k1} &= \sum S_{MD} + (S_{MD64})_i.
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 (S_j)_{j1,k2} &= (S_{MD15})_i, \\
 (S_j)_{j2,k2} &= (S_{MD25})_i, \\
 (S_j)_{j3,k2} &= (S_{MD35})_i, \\
 (S_j)_{k1,k2} &= \sum S_{MD} + (S_{MD45})_i, \\
 (S_j)_{k2,k2} &= \sum S_{MD} + (S_{MD55})_i, \\
 (S_j)_{k3,k2} &= \sum S_{MD} + (S_{MD65})_i.
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 (S_j)_{j1,k3} &= (S_{MD16})_i, \\
 (S_j)_{j2,k3} &= (S_{MD26})_i, \\
 (S_j)_{j3,k3} &= (S_{MD36})_i, \\
 (S_j)_{k1,k3} &= \sum S_{MD} + (S_{MD46})_i, \\
 (S_j)_{k2,k3} &= \sum S_{MD} + (S_{MD56})_i, \\
 (S_j)_{k3,k3} &= \sum S_{MD} + (S_{MD66})_i.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Após a transferência da matriz  $S_{MD}$  para a matriz de rigidez global ( $S_j$ ), se necessário, deve ser realizada a organização da matriz, de tal maneira que a matriz  $S_j$  contenha as seguintes submatrizes da seguinte maneira, conforme a Fig. 2.

$$\mathbf{S}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{S}_{DR} \\ \mathbf{S}_{RD} & \mathbf{S}_{RR} \end{bmatrix}$$

Figura 2. Matriz  $S_j$  (Gere & Weaver Jr. [4])

A submatriz  $\mathbf{S}$  é uma matriz de rigidez simétrica e quadrada referente aos deslocamentos que não são conhecidos da estrutura, ou seja, aos graus de liberdade. A partir da inversa dessa matriz ( $\mathbf{S}^{-1}$ ) é possível calcular os deslocamentos conhecidos ( $\mathbf{D}$ ) de acordo com a Eq. (9).

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{A}_D - \mathbf{A}_{DL}), \tag{9}$$

Sendo:  $\mathbf{A}_D$  = vetor de ordem  $d \times 1$ , sendo  $d$  o número de deslocamentos desconhecidos, que representa as ações no pórtico original correspondentes aos deslocamentos do nó desconhecidos e  $\mathbf{A}_{DL}$

= vetor de ordem  $d \times 1$ , sendo  $d$  o número de deslocamentos desconhecidos, que representa as ações na estrutura restringida correspondentes aos deslocamentos do nó desconhecidos e causados pelas cargas.

A submatriz  $\mathbf{S}_{RD}$  é uma matriz retangular com as reações da estrutura referentes aos valores unitários de deslocamentos desconhecidos. A partir da matriz  $\mathbf{S}_{RD}$  obtida, é possível determinar a matriz de reações na estrutura real ( $\mathbf{A}_R$ ) a partir da Eq. (10).

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{A}_{RL} + \mathbf{S}_{RD}\mathbf{D}, \quad (10)$$

Sendo:  $\mathbf{A}_{RL}$  = matriz de reações de extremidade.

Já a submatriz  $\mathbf{S}_{DR}$  é a transposta da submatriz  $\mathbf{S}_{RD}$ , como está mostrado na Eq. (11).

$$\mathbf{S}_{DR} = \mathbf{S}'_{RD}. \quad (11)$$

Por fim, a submatriz  $\mathbf{S}_{RR}$  assim como a submatriz  $\mathbf{S}$  é simétrica e quadrada na qual constam as ações referentes às restrições de apoio.

A seguir, forma-se o vetor  $\mathbf{A}$  representado abaixo na Eq. (12) que é referente às ações externas que são aplicadas nos nós.

$$\mathbf{A} = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{3n_j-2}, A_{3n_j-1}, A_{3n_j}\}, \quad (12)$$

Na qual:  $\mathbf{A}_{3n_j-2}$  = componente em  $x$  da força aplicada no nó  $n_j$ ;  $\mathbf{A}_{3n_j-1}$  = componente em  $y$  da força aplicada no nó  $n_j$  e  $\mathbf{A}_{3n_j}$  = binário no sentido de  $z$  aplicada no nó  $n_j$ .

A matriz de ações de extremidade ( $\mathbf{A}_{ML}$ ) é organizada da seguinte maneira:  $(\mathbf{A}_{ML})_{i,1}$  = força na direção de  $x_M$  na extremidade  $j$ ;  $(\mathbf{A}_{ML})_{i,2}$  = força na direção de  $y_M$  na extremidade  $j$ ;  $(\mathbf{A}_{ML})_{i,3}$  = binário no sentido de  $z_M$  na extremidade  $j$ ;  $(\mathbf{A}_{ML})_{i,4}$  = força na direção de  $x_M$  na extremidade  $k$ ;  $(\mathbf{A}_{ML})_{i,5}$  = força na direção de  $y_M$  na extremidade  $k$  e  $(\mathbf{A}_{ML})_{i,6}$  = binário no sentido de  $z_M$  na extremidade  $k$ .

Dessa forma, obtém a matriz  $\mathbf{A}_{ML}$  de ordem  $m \times 6$  segundo a Fig. 3. Já para gerar o vetor de carga equivalente  $\mathbf{A}_E$  é realizado o método da rotação de eixos. As Eq. (13) representam as partes incrementais de  $\mathbf{A}_E$  considerando a contribuição da  $i$ -ésima barra:

$$\mathbf{A}_{ML} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{ML})_{1,1} & (\mathbf{A}_{ML})_{1,2} & (\mathbf{A}_{ML})_{1,3} & (\mathbf{A}_{ML})_{1,4} & (\mathbf{A}_{ML})_{1,5} & (\mathbf{A}_{ML})_{1,6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{A}_{ML})_{i,1} & (\mathbf{A}_{ML})_{i,2} & (\mathbf{A}_{ML})_{i,3} & (\mathbf{A}_{ML})_{i,4} & (\mathbf{A}_{ML})_{i,5} & (\mathbf{A}_{ML})_{i,6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{A}_{ML})_{m,1} & (\mathbf{A}_{ML})_{m,2} & (\mathbf{A}_{ML})_{m,3} & (\mathbf{A}_{ML})_{m,4} & (\mathbf{A}_{ML})_{m,5} & (\mathbf{A}_{ML})_{m,6} \end{bmatrix}$$

Figura 3. Matriz  $\mathbf{A}_{ML}$  (Gere & Weaver Jr. [4])

$$\begin{aligned} (A_E)_{3j-2} &= \sum A_{ML} - (\mathbf{A}_{ML})_{i,1}C_{Xi} + (\mathbf{A}_{ML})_{i,2}C_{Yi}, \\ (A_E)_{3j-1} &= \sum A_{ML} - (\mathbf{A}_{ML})_{i,1}C_{Yi} - (\mathbf{A}_{ML})_{i,2}C_{Xi}, \\ (A_E)_{3j} &= \sum A_{ML} - (\mathbf{A}_{ML})_{i,3}, \\ (A_E)_{3k-2} &= \sum A_{ML} - (\mathbf{A}_{ML})_{i,4}C_{Xi} + (\mathbf{A}_{ML})_{i,5}C_{Yi}, \\ (A_E)_{3k-1} &= \sum A_{ML} - (\mathbf{A}_{ML})_{i,4}C_{Yi} - (\mathbf{A}_{ML})_{i,5}C_{Xi}, \\ (A_E)_{3k} &= \sum A_{ML} - (\mathbf{A}_{ML})_{i,6}. \end{aligned} \quad (13)$$

O vetor de cargas combinadas  $\mathbf{A}_C$  é igual ao somatório do vetor de cargas nodais reais  $\mathbf{A}$  com o vetor de cargas nodais equivalentes  $\mathbf{A}_E$  conforme a Eq. (14).

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{A} + \mathbf{A}_E. \quad (14)$$

É importante ressaltar que o vetor  $\mathbf{A}_C$  se subdivide em dois vetores. Nos vetores  $\mathbf{A}_D$  e  $-\mathbf{A}_{RL}$  na primeira e segunda parte do vetor  $\mathbf{A}_C$ , respectivamente. Os significados desses dois subvetores já foram apresentados anteriormente.

Como os efeitos das cargas sobre as barras são colocados na forma de cargas nodais equivalentes, tem-se  $\mathbf{A}_{DL} = 0$ . Logo a Eq. (9) se transforma na Eq. (15).

Então, é possível calcular os deslocamentos nodais  $\mathbf{D}$  e a partir desse resultado obter as reações de apoio  $\mathbf{A}_R$  de acordo com a Eq. (10). Finalmente, utilizando a Eq. (16) e realizando as substituições de  $[\mathbf{S}_M]_i$  e de  $[\mathbf{R}_T]_i$  de acordo com as Fig. 4, 5 e 6, têm-se as Eq. (17).

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_D. \quad (15)$$

$$\{A_M\}_i = \{A_{ML}\}_i + [S_M]_i[R_T]_i\{D_J\}_i. \quad (16)$$

$$S_M = \begin{bmatrix} \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

Figura 4. Matriz de rigidez de barra ( $S_M$ ) (Gere & Weaver Jr. [4])

$$R_T = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R} \end{bmatrix}$$

Figura 5. Matriz de transformação de rotação ( $R_M$ ) (Gere & Weaver Jr. [4])

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_X & C_Y & 0 \\ -C_Y & C_X & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 6. Matriz de rotação ( $R$ ) (Gere & Weaver Jr. [4])

Na qual:  $D_J$  = vetor que contém em sua primeira parte o vetor  $D$  e o restante é preenchido com zeros.

$$\begin{aligned} (A_M)_{i,1} &= (A_{ML})_{i,1} + \frac{EA_{Xi}}{L_i} \left\{ [(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}] C_{Xi} + [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}] C_{Yi} \right\}, \\ (A_M)_{i,2} &= (A_{ML})_{i,2} + \frac{12EI_{Zi}}{L_i^3} \left\{ -[(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}] C_{Yi} + [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}] C_{Xi} \right\} + \\ &\quad \frac{6EI_{Zi}}{L_i^2} [(D_J)_{j3} + (D_J)_{k3}], \\ (A_M)_{i,3} &= (A_{ML})_{i,3} + \frac{6EI_{Zi}}{L_i^2} \left\{ -[(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}] C_{Yi} + [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}] C_{Xi} \right\} + \\ &\quad \frac{4EI_{Zi}}{L_i} \left[ (D_J)_{j3} + \frac{1}{2}(D_J)_{k3} \right], \\ (A_M)_{i,4} &= (A_{ML})_{i,4} + \frac{EA_{Xi}}{L_i} \left\{ -[(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}] C_{Xi} - [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}] C_{Yi} \right\}, \\ (A_M)_{i,5} &= (A_{ML})_{i,5} + \frac{12EI_{Zi}}{L_i^3} \left\{ [(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}] C_{Yi} - [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}] C_{Xi} \right\} - \\ &\quad \frac{6EI_{Zi}}{L_i^2} [(D_J)_{j3} + (D_J)_{k3}], \\ (A_M)_{i,6} &= (A_{ML})_{i,6} + \frac{6EI_{Zi}}{L_i^2} \left\{ -[(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}] C_{Yi} + [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}] C_{Xi} \right\} + \\ &\quad \frac{4EI_{Zi}}{L_i} \left[ \frac{1}{2}(D_J)_{j3} + (D_J)_{k3} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

### 3 Objetivo

As estruturas reticuladas podem ser divididas em estruturas planas e espaciais. Nesse trabalho serão abordadas as estruturas planas, mais especificamente os pórticos planos. O objetivo é analisar via computacional através da linguagem C++ os pórticos planos. Para isso, um programa computacional foi criado. Como resultados serão obtidos os valores de esforços nas barras, as reações de apoios e os deslocamentos, que são os dados necessários para o dimensionamento de estruturas. O programa será útil para os estudantes e profissionais da área de estruturas, para obterem os valores para os dimensionamentos de modo rápido e preciso.

### 4 Descrição do Programa

Foi usado um programa de desenvolvimento de software chamado *Visual Studio C++ Express 2015*, sendo que neste foi elaborado um software para análise estrutural de pórticos planos em linguagem C++. A Fig. 7 abaixo representa o fluxograma do programa.

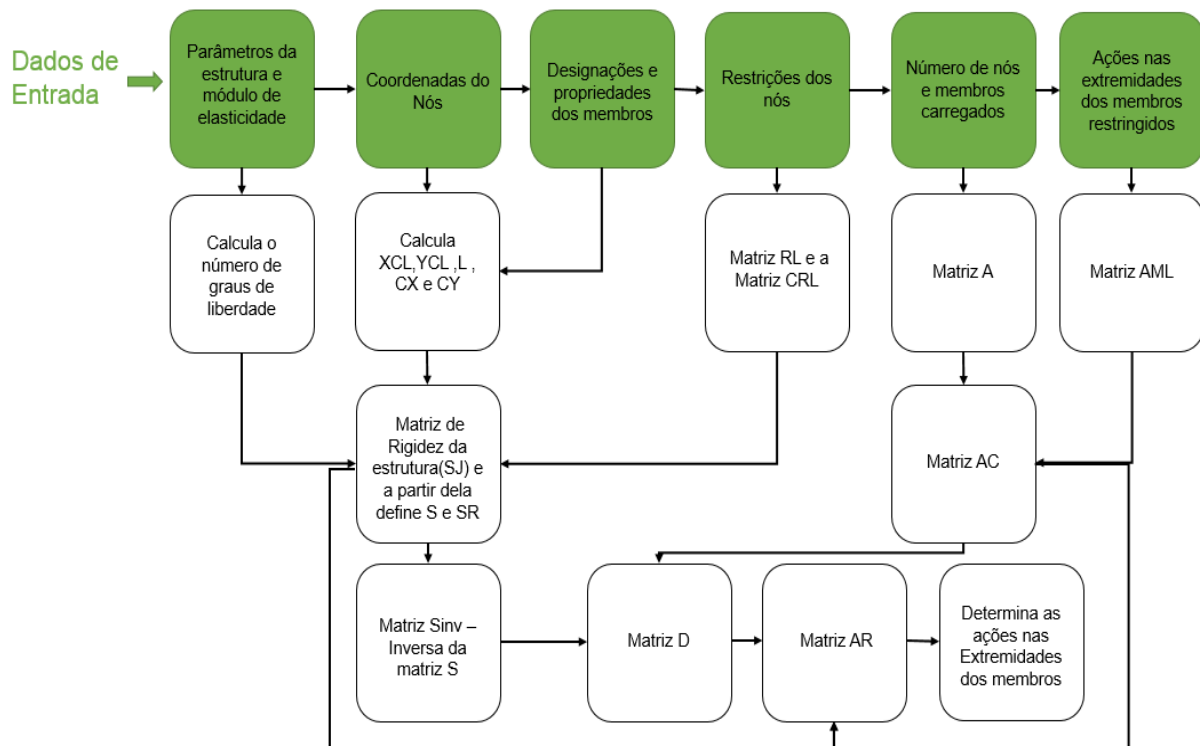


Figura 7. Fluxograma do funcionamento do programa

Os dados de entrada serão lidos de um arquivo fornecido pelo usuário. O programa desenvolvido para o cálculo de pórticos planos terá como dados de entrada: número de barras ( $M$ ), número de nós ( $NJ$ ), número de restrições de apoio ( $NR$ ), número de nós restringidos ( $NRJ$ ), módulo de elasticidade de material ( $E$ ). Sendo posteriormente obtido o número de graus de liberdade ( $N$ ) a partir do número de nós e do número de nós restringidos. Além disso, também são dados de entrada o número de nós carregados ( $NLJ$ ) e o número de barras carregadas ( $NLM$ ), os quais serão necessários para calcular os componentes  $x$  e  $y$  do comprimento da barra ( $XCL$  e  $YCL$ ), definir o comprimento da barra através desses valores ( $L$ ) além de calcular os co-senos diretores em  $x$  e  $y$  da barra ( $CX$  e  $CY$ ). Então, cria-se a matriz  $RL$  em função dos dados de nós restringidos e a partir dessa define-se a matriz  $CRL$ . Após, a matriz de cargas nodais ( $A$ ) é criada a partir dos dados de nós carregados.

Através dos dados das barras e da matriz  $RL$  é definida a matriz  $SMD$  que serve de base para a determinação dos valores da matriz de rigidez de nó ( $Sj$ ). A partir de  $Sj$  é possível definir os valores das

matrizes  $S$  e  $SR$ . A partir dos dados das barras e das barras carregadas define-se a matriz  $AE$  que contém as cargas nodais equivalentes. Da combinação das cargas nodais e das cargas nodais equivalentes é possível definir a matriz de cargas nodais combinadas ( $AC$ ). A partir da matriz  $S$  que é uma matriz derivada da matriz  $S_j$  e corresponde aos deslocamentos desconhecidos da estrutura, isto é, os graus de liberdade essa sub-rotina define a matriz inversa de  $S$  ( $S_{inv}$ ). Os valores da matriz  $SR$  são derivados da matriz  $S_j$  e contém as ações correspondentes as restrições dos apoios devidas aos valores unitários dos deslocamentos correspondentes aos graus de liberdade.

Com base nos valores das matrizes  $AC$  e  $S_{inv}$  são definidos os valores dos deslocamentos nodais ( $D$ ) e a partir das matrizes  $AC$ ,  $SR$  e  $D$  é possível definir as reações nos nós ( $AR$ ). Finalmente, define-se baseado nos dados das barras e das barras carregadas os valores das ações de extremidades das barras que compõem o pórtico plano.

## 5 Resultados

Com o objetivo de validar o programa criado, nessa seção os resultados numéricos do programa desenvolvido serão comparados com os resultados analíticos e com o programa SAP 2000 de um exemplo analisado por Gere & Weaver Jr. [4].

### 5.1 Exemplo

Na Fig. 8 tem-se um pórtico plano que possui duas barras, três nós, seis restrições e três graus de liberdade com  $E = 68,948$  GPa;  $L = 254$  cm;  $I_z = 41623,143$  cm<sup>4</sup>;  $P = 44,482$  kN e  $A_x = 64,516$  cm<sup>2</sup>.

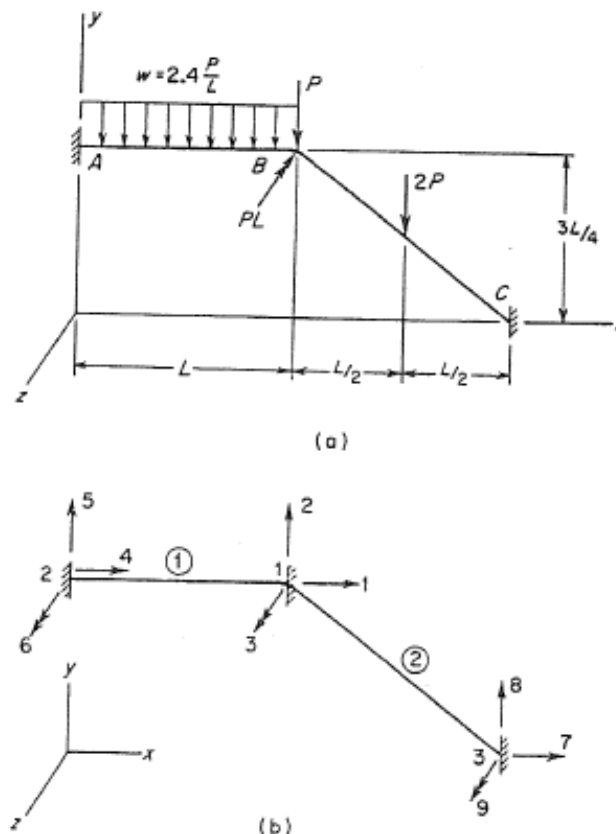


Figura 8. Pórtico plano (Gere & Weaver Jr. [4])

Tabela 1, Tab. 2, Tab. 3 e Tab. 4 também são dados do problema.



Tabela 1. Informação dos nós para o pórtico plano (Gere & Weaver Jr. [4])

Nó	Coordenadas (cm)		Lista de restrições		
	x	y	x	y	z
1	254,000	190,500	0	0	0
2	0,000	190,500	1	1	1
3	508,000	0,000	1	1	1

Tabela 2. Informação das barras para o pórtico plano (Gere & Weaver Jr. [4])

Barra	Nó j	Nó k	Área (cm <sup>2</sup> )	Momento de inércia (cm <sup>4</sup> )	Comprimento (cm)	Co-senos diretores	
						Cx	Cy
1	2	1	64,516	41623,143	254,000	1,000	0,000
2	1	3	64,516	41623,143	317,500	0,800	-0,600

Tabela 3. Informações das ações aplicadas nos nós (Gere & Weaver Jr. [4])

Nó	Força na direção de x (kN)	Força na direção de y (kN)	Momento no sentido de z (kN.cm)
1	0,000	-44,482	-11298,480
2	0,000	0,000	0,000
3	0,000	0,000	0,000

Tabela 4. Ações nas extremidades de barras restringidas devidas às cargas (Gere & Weaver Jr. [4])

Barra	(A <sub>ML</sub> ) <sub>i,1</sub> (kN)	(A <sub>ML</sub> ) <sub>i,2</sub> (kN)	(A <sub>ML</sub> ) <sub>i,3</sub> (kN.cm)	(A <sub>ML</sub> ) <sub>i,4</sub> (kN)	(A <sub>ML</sub> ) <sub>i,5</sub> (kN)	(A <sub>ML</sub> ) <sub>i,6</sub> (kN.cm)
1	0,000	53,379	2259,696	0,000	53,379	-2259,696
2	-26,689	35,586	2824,620	-26,689	35,586	-2824,620

## 5.2 Resultados obtidos analiticamente, pelo SAP 2000 e pelo programa PORT2D

Os resultados da matriz de rigidez, das ações nas extremidades de barras restringidas devidas às cargas e das ações de extremidade de barra finais para as três análises (analítica, SAP 2000 e PORT2D) mostraram ser coincidentes e estão apresentados nas Tab. 5 e Tab. 6.

Tabela 5. Deslocamentos de nós e reações de apoio

Nó	Deslocamento na direção de x (cm)	Deslocamento na direção de y (cm)	Rotação no sentido de z (rad)	Força na direção de x (kN)	Força na direção de y (kN)	Momento no sentido de z (kN.cm)
1	-0,052	-0,252	-0,002	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,000	0,000	90,121	58,450	4932,916
3	0,000	0,000	0,000	-90,121	181,754	-10049,998

Tabela 6. Ações de extremidade de barra

Barra	(A <sub>M</sub> ) <sub>i,1</sub> (kN)	(A <sub>M</sub> ) <sub>i,2</sub> (kN)	(A <sub>M</sub> ) <sub>i,3</sub> (kN.cm)	(A <sub>M</sub> ) <sub>i,4</sub> (kN)	(A <sub>M</sub> ) <sub>i,5</sub> (kN)	(A <sub>M</sub> ) <sub>i,6</sub> (kN.cm)
1	90,121	58,450	4932,916	-90,121	48,308	-3648,279
2	127,753	-20,150	-7650,201	-181,176	91,322	-10049,998

## 6 Conclusão

De acordo com Soriano & Lima [1] e Martha [2], ao se analisar um modelo estrutural idealizado, o objetivo é obter resultados próximos aos resultados apresentados nas literaturas, sendo possível prever o possível comportamento da estrutura.

Segundo Gere & Weaver Jr. [4] e White et al. [5], os problemas estruturais mais simples são facilmente resolvidos com as condições de equilíbrio, de compatibilidade entre deformações e deslocamentos e com informações sobre o comportamento dos materiais da estrutura. Porém, para problemas mais complexos não é possível conseguir um sistema que possua o mesmo número de equações e incógnitas. Assim, para esse último caso, podem ser utilizados dois métodos e um deles é o método da rigidez.

Ainda segundo Gere & Weaver Jr. [4], apesar de ser possível resolver os problemas mais simples pelo método da rigidez manualmente, para estruturas mais complexas é necessária uma análise computacional.

De frente desse desafio, foi desenvolvido o programa PORT2D para a análise estrutural de pórticos planos. Utilizou-se o método da rigidez para realizar essa análise, sendo que a linguagem implementada foi a C++.

O programa PORT2D analisa estruturalmente pórticos planos com inércias e áreas de seções transversais constantes contendo restrições e ações aplicadas nos nós, e ações nas extremidades de barras restringidas devidas às cargas.

Para validar o programa PORT2D apresentaram-se os resultados de um exemplo da literatura de Gere e Weaver Jr. [4] resolvido analiticamente e por meio do software SAP 2000. Ao analisar os resultados, percebe-se que são coincidentes. Dessa maneira, considera-se que o programa PORT2D apresenta resultados satisfatórios para a análise estrutural de pórticos planos.

## Referências

- [1] Soriano, H. L., & Lima, S. d. (2006). *Análise de Estruturas - Método das Forças e Método dos Deslocamentos* (2ª ed.). Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda.
- [2] Martha, L. F. (2010). *Métodos Básicos da Análise de Estruturas*. Rio de Janeiro: CAMPUS - GRUPO ELSEVIER.
- [3] Soriano, H. L. (2005). *Análise de Estruturas - Formulação Matricial e Implementação Computacional*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda.
- [4] Gere, J. M., & Weaver Jr., W. (1981). *Análise de estruturas reticuladas*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois S.A.
- [5] White, R., Gergely, P., & Sexsmith, R. (1976). *Structural Engineering - Combined Edition - Vol.1: Introduction to Design Concepts and Analysis - Vol.2: Indeterminate Structures*. New York: John Wiley & Sons.