



XL CILAMCE
IBERO-LATIN AMERICAN
CONGRESS ON
COMPUTATIONAL
METHODS IN
ENGINEERING

NOVEMBER
11-14, 2019
Praiamar Natal Hotel & Convention
Natal, RN-BRAZIL

DISCRETIZAÇÃO MATEMÁTICA DAS EQUAÇÕES NECESSÁRIAS PARA MODELAGEM DE FLUIDO COMPRESSÍVEL BIDIMENSIONAL COM CVFEM

Bruno de Sousa Barros

Fábio Alfaia da Cunha

brunobarros02@hotmail.com

fabioalfaia@unb.com

Universidade de Brasília

St. Leste Projeção A, 72444240, Distrito Federal, Brasil

Abstract. The present work provides in details the discretization of a set of mathematical equations required to model a two-dimensional compressible fluid flow. The hypothesis of not viscous flow is considered in this work for effect of simplifying the equations, thus the compressible flow of the fluid can be described by the Euler equations. The control volume based finite element method – CVFEM was chosen to describe the differential equations of conservation. The numerical method uses unstructured mesh (based on triangular elements) to discretize the geometric domain and the polygonal control volumes for discretization of conservation equations. For that purposed, it was opted for the segregated solution of the momentum and mass conservation equations, by the use of primitive variables (velocity, pression and temperature) and co-located (integration of the momentum and mass conservation equations is done above the same control volume for pressure and velocity). A computational code programmed in MATLAB software language was developed to realize the numerical simulations of compressible flows, two-dimensional (planar or axisymmetric) and transients. The case of a subsonic / supersonic flow through a Channel with a Circular Arc Bump and the case of the supersonic flow through the convergent-divergent channel were used to verify the developed code. At the end of the work are presented results obtained by means of a numerical solution and these results are compared to results available in literature, to ascertain that the computational code developed works as it was expected.

Keywords: Compressible flow, Numerical simulation, CVFEM.

1 Introdução

A tecnologia de foguete híbrido tem atraído atenção considerável nas últimas décadas devido à sua capacidade de combinar muitas vantagens técnicas dos foguetes líquidos e sólidos, tais como simplicidade, segurança, reinicialização e baixo custo de desenvolvimento e operação. Dada a importância do tema, é apropriado à intensificação de estudos que possibilitem a compreensão destes tipos de propulsores. Os foguetes híbridos não atingiram desenvolvimento que os tornassem comerciais, como as outras tecnologias mencionadas. A combustão híbrida envolve muitos fenômenos que influenciam o processo de regressão do combustível sólido, incluindo a pirólise superficial do combustível, a mistura dos reagentes e a combustão da fase gasosa. Muitas pesquisas têm sido realizadas para investigar esses efeitos, a literatura recente inclui trabalhos que incluem a análise de efeitos de escala, a caracterização de combustível sólido, os métodos para aumentar a taxa de regressão (GALFETTI et. al. 2014).

A simulação computacional da combustão pode desempenhar um papel importante no projeto e na análise de um motor de foguete híbrido, economizando grande quantidade de despesas financeiras e reduzindo os esforços experimentais. Porém, um código computacional para simulação numérica do funcionamento de um motor de foguete híbrido deve ser capaz de simular a dinâmica do escoamento reagente, compressível e turbulento, considerando as simultâneas transferências de calor e de massa associadas ao consumo do combustível sólido.

O problema de simulação descrito é muito grande. A divisão do problema em partes menores é necessária para que se possa avançar. Assim, tendo isto em mente, o problema de pesquisa aqui proposto consiste modelagem e a simulação numérica de escoamentos compressíveis, para posteriormente aplicar na simulação computacional de bocais convergentes divergentes. Para construção de um código de simulação a hipótese de escoamento não viscoso também será considerada, deste modo o escoamento compressível do fluido pode ser descrito pelas equações de Euler.

Para a realização das simulações é necessário a discretização matemática das equações governante. O maior problema encontrado nesse procedimento é o acoplamento pressão-velocidade, para tanto é utilizada a solução segregada, cuja a solução desse problema será vista em detalhes. O modelo é baseado no algoritmo de acoplamento pressão-velocidade-temperatura apresentado em ZHOU (1997). Feita a discretização é necessário à validação computacional do código proposto, para tal é utilizado problema crítico clássico, canal com lombada circular (arc bump), que é o problema mais utilizado para validações de códigos do tipo compressível.

2 Equações governantes

A hipótese de escoamento não viscoso é considerada neste trabalho para efeito de simplificação das equações de Navier Stokes. Deste modo o escoamento compressível do fluido pode ser descrito pelas equações de Euler.

$$\text{Conservação da massa} \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (1)$$

$$\text{x-Conservação de momento} \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = -\frac{\partial}{\partial x}(p) \quad (2a)$$

$$\text{y-Conservação de momento} \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = -\frac{\partial}{\partial y}(p) \quad (2b)$$

Equação da energia
$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v T) = \frac{1}{c_p} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (3)$$

Onde u e v são componentes da velocidade na direção x e y , respectivamente, p é a pressão, ρ é a densidade, T é a temperatura absoluta, k é condutividade térmica, C_p é o calor específico a uma pressão constante.

2.1 Discretização das equações de conservação

As equações de conservação podem ser representadas de forma genérica como:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = S^\phi \quad (4)$$

Em que $\mathbf{J} = \rho \mathbf{u} \phi$, com $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$. A Eq.(4) pode ser integrada sobre um volume de controle poligonal, V_i , associado a um nó interno do domínio de cálculo ou a um nó de fronteira, da seguinte forma:

$$\oint_{A_i} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{V_i} S^\phi dV \quad (5)$$

Para um termo de fluxo, com teorema da divergência de Gauss, é possível associar a integral volumétrica a uma integral de superfície:

$$\oint_{A_i} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{V_i} S^\phi dV \quad (6)$$

Em que $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j}$ é o vetor normal a superfície de controle A_i , que envolve o volume V_i .

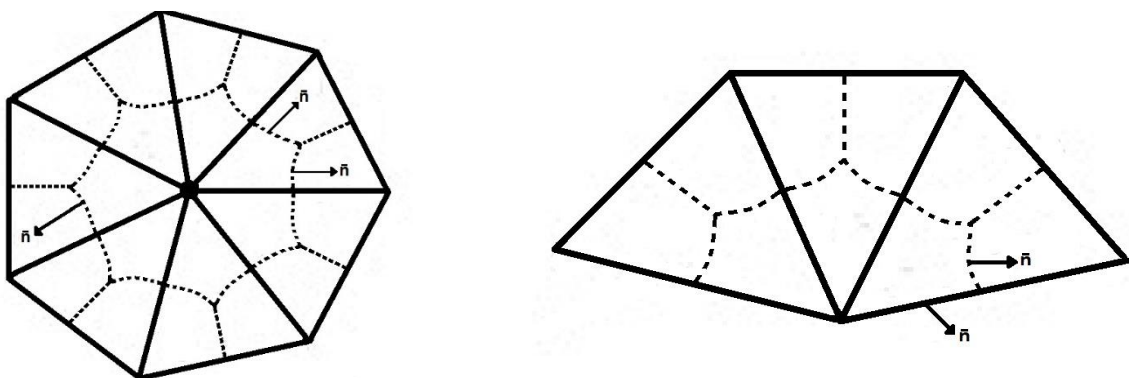


Figura 1. Volume de controle associado a um nó interno do domínio (V_i) ou a um nó de fronteira.

Para um volume de controle poligonal, a superfície que o envolve é composta por segmentos internos aos elementos triangulares. A integral sobre o volume de controle i pode ser representada da seguinte forma:

$$\int_{A_{ao}} \mathbf{J}_r \cdot \mathbf{n}_r dA + \int_{A_{oc}} \mathbf{J}_t \cdot \mathbf{n}_t dA + \left[\int_{A_i} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA + \begin{matrix} \text{contribuições similares} \\ \text{de outros elementos} \\ \text{associados ao nó 1} \end{matrix} \right] + \begin{matrix} \text{contribuições} \\ \text{de fronteira, se} \\ \text{aplicável} \end{matrix} = 0 \quad (7)$$

Só é necessário tratar de forma explícita as duas integrais internas ao elemento triangular para o i. Por se tratar de domínio bidimensional, uma espessura unitária é assumida na formulação de volume de controle, assim sendo, as integrais de superfície e volume de controle são reduzidas a equações de linha e área, respectivamente. Por isso, as áreas A_{ao} e A_{oc} , estão associadas, respectivamente, aos segmentos ao e co .

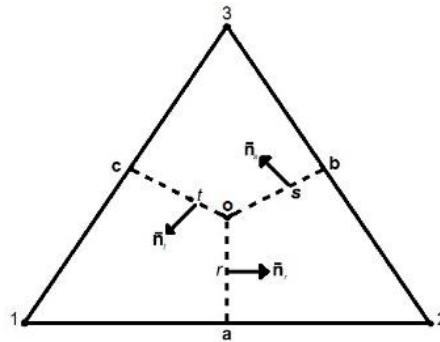


Figura 2. Elemento finito de três nós típicos

Para derivação de uma aproximação de solução da integração da Eq. (7) é necessário o conhecimento de ϕ em função dos seus valores nodais. O esquema de interpolação faz exatamente isso. O esquema ponderação de massa (Mass Weighted - MAW) usa taxas de fluxo de massa (\dot{m}_k) em cada superfície do volume de controle para calcular os valores de ϕ nos pontos de integração a partir de seus valores nodais. As taxas de fluxo de massa em cada superfície de controle podem ser calculadas como:

$$\dot{m}_r = \int_{A_{ao}} \rho \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{n}_r dA; \quad \dot{m}_s = \int_{A_{bo}} \rho \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_s dA \quad \text{e} \quad \dot{m}_t = \int_{A_{co}} \rho \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n}_t dA \quad (8)$$

De forma aproximada o cálculo dos fluxos mássicos pode ser feito da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{m}_r \\ \dot{m}_s \\ \dot{m}_t \end{pmatrix} = \frac{\rho}{2} \begin{bmatrix} u_r (y_o - y_a) - v_r (x_o - x_a) \\ u_s (y_o - y_b) - v_s (x_o - x_b) \\ u_t (y_o - y_c) - v_t (x_o - x_c) \end{bmatrix} \quad (9)$$

O fluxo de massa através de uma superfície particular é considerado positivo quando o vetor de velocidade no ponto de integração está na mesma direção que a normal assumida para a superfície (Ver Fig. 1). O valor do escalar ϕ no ponto de integração é simbolizado como ϕ_k . O cálculo de ϕ_k valor para as posições r, s e t é apresentado na Tabela 01.

Tabela 01. Determinação de ϕ_r , ϕ_s e ϕ_t .

Interpolação superfície r	Interpolação superfície s	Interpolação superfície t
Se $\dot{m}_r > 0$: $\phi_r = f\phi_t + (1-f)\phi_1$ onde $f = \min[\max(\dot{m}_t / \dot{m}_r, 0), 1]$	Se $\dot{m}_s > 0$: $\phi_s = f\phi_r + (1-f)\phi_1$ onde $f = \min[\max(\dot{m}_r / \dot{m}_s, 0), 1]$	Se $\dot{m}_t > 0$: $\phi_t = f\phi_s + (1-f)\phi_3$ onde $f = \min[\max(\dot{m}_s / \dot{m}_t, 0), 1]$
Se $\dot{m}_r < 0$: $\phi_r = f\phi_s + (1-f)\phi_2$ onde $f = \min[\max(\dot{m}_s / \dot{m}_r, 0), 1]$	Se $\dot{m}_2 < 0$: $\phi_s = f\phi_t + (1-f)\phi_3$ onde $f = \min[\max(\dot{m}_t / \dot{m}_s, 0), 1]$	Se $\dot{m}_t < 0$: $\phi_t = f\phi_r + (1-f)\phi_1$ onde $f = \min[\max(\dot{m}_r / \dot{m}_t, 0), 1]$

Pode-se agora aproximar, com o esquema de interpolação MAW, as integrais de superfície como $\int_{A_{co}} \mathbf{J}_r \cdot \mathbf{n}_r dA = \dot{m}_r \phi_r$ e $\int_{A_{co}} \mathbf{J}_t \cdot \mathbf{n}_t dA = \dot{m}_t \phi_t$, centradas no nó 1, o que conduz a:

$$\int_{A_{co}} \mathbf{J}_r \cdot \mathbf{n}_r dA + \int_{A_{co}} \mathbf{J}_t \cdot \mathbf{n}_t dA = \dot{m}_r \phi_r + \dot{m}_t \phi_t = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2 + C_{13}\phi_3 \quad (11)$$

Se as contribuições de cada elemento para o nó i forem somadas, uma equação algébrica pode derivada na seguinte forma:

$$a_i \phi_i = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b_i \quad (14)$$

Em que nb faz referência aos nós vizinhos ao nó i.

2.1 Acoplamento Pressão-Velocidade-Massa específica

As equações algébricas de conservação de quantidade de movimento podem ser obtidas a partir da Eq.(14), quando ϕ é substituído pelas componentes de velocidades $\left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle_i$ e $\left\langle \frac{\partial p}{\partial y} \right\rangle_i$ são incluídos conforme apresentado a seguir:

$$a_i u_i = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_{u,i} - V_i \left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle_i \quad (15a)$$

$$a_i v_i = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + b_{v,i} - V_i \left\langle \frac{\partial p}{\partial y} \right\rangle_i \quad (15b)$$

Um dos meios de acoplar pressão e velocidade é isolando as velocidades das Eqs. (15) e utilizando-as no cálculo dos fluxos de massa, gerando uma equação de Poisson para a pressão. As componentes de velocidade são reescritas da seguinte forma:

$$u_i = \hat{u}_i - d_i^u \left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle_i \quad (16a)$$

$$v_i = \hat{v}_i - d_i^y \left\langle \frac{\partial p}{\partial y} \right\rangle_i \quad (16b)$$

Em que: $\hat{u}_i = (\sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b_i^u) / a_i^u$; $\hat{v}_i = (\sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + b_i^v) / a_i^v$; $d_i^u = V_i / a_i^u$; $d_i^v = V_i / a_i^v$.

Os gradientes de pressão das Eqs. (16) são avaliados nos elementos e não nos volumes de controle. Por isso:

$$u_i = \hat{u}_i - d_i^u \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e \quad \text{com: } i = 1, 2, 3 \quad (17a)$$

$$v_i = \hat{v}_i - d_i^y \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_e \quad \text{com: } i = 1, 2, 3 \quad (17b)$$

Onde o subscrito e indica que os gradientes de pressão são avaliados sobre os elementos. Os gradientes de pressão das Eqs. (17) são obtidos da função de interpolação linear:

$$p = AX + BY + C \quad (18)$$

Da Eq. (17) calcula-se as componentes do vetor gradiente de p : $\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e = A$ e $\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_e = B$.

Equação de interpolação do momento

Para a solução da equação da conservação da massa é utilizada a função de interpolação dada pela Eq. (19):

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \quad (19)$$

Reconhecendo que $\hat{u} = N_1 \hat{u}_1 + N_2 \hat{u}_2 + N_3 \hat{u}_3$ e $d^u = N_1 d_1^u + N_2 d_2^u + N_3 d_3^u$, a função de interpolação da componente x de velocidade pode ser escrita como:

$$u = \hat{u} - d^u \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e \quad (20)$$

Este procedimento de interpolação associado à avaliação dos gradientes de pressão nos elementos evita o aparecimento de campos de pressão oscilatórios durante o processo iterativo de solução, pois simula o efeito das malhas deslocadas (PRAKASH & PATANKAR, 1985).

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_e = [(Y_2 - Y_3) p_1 + (Y_3 - Y_1) p_2 + (Y_1 - Y_2) p_3] / D \quad (21)$$

Prosseguindo, substituindo a Eq(21) na Eq(20) colocando as pressões em evidência e agrupando os termos, obtém-se:

$$u = f_1 p_1 + f_2 p_2 + f_3 p_3 + f_4 \quad (22)$$

Em que $f_1 = -(d^u / D)(Y_2 - Y_3)$, $f_2 = -(d^u / D)(Y_3 - Y_1)$, $f_3 = -(d^u / D)(Y_1 - Y_2)$. e $f_4 = \hat{u}$. Da mesma forma pode-se derivar a equação de v .

Solução da Equação da Conservação da Massa para Escoamento Compressível

A equação integral da conservação da massa será resolvida considerando o volume de controle i , como mostrado na figura 1:

$$\oint_A \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (23)$$

A seguinte linearização é assumida para o fluxo de massa (Zhou, 1997):

$$\oint_A \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \underbrace{\oint_A \rho^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA}_{\text{primeiro termo}} + \underbrace{\oint_A \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA}_{\text{segundo termo}} - \underbrace{\oint_A \rho^* \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA}_{\text{terceiro termo}} \quad (24)$$

Desenvolvimento do primeiro termo: $\oint_A \rho^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA$

De posse das componentes de velocidade, Eqs. (22), e considerando a seguinte decomposição da equação integral do fluxo de massa:

$$\oint_A \rho^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \int_a^o \rho^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA + \int_o^c \rho^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA + \left(\begin{array}{l} +\text{contribuições similares de outros} \\ \text{elementos associados ao node } i \\ +\text{condições de contorno, se aplicável} \end{array} \right) \quad (25)$$

A equação do fluxo de massa pode ser resolvida da seguinte forma:

$$\int_a^o \rho^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA + \int_o^c \rho^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = \left[(Y_o - Y_a)(\rho^* u)_r - (X_o - X_a)(\rho^* v)_r \right] + \left[(Y_c - Y_o)(\rho^* u)_t - (X_c - X_o)(\rho^* v)_t \right] \quad (26)$$

Substituindo as Eqs. (22) na equação acima e desenvolvendo:

$$\int_a^o \rho^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA + \int_o^c \rho^* \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = D_1^{ca} p_1 + D_2^{ca} p_2 + D_3^{ca} p_3 + D_4^{ca} \quad (27)$$

Em que $D_1^{ca} = A_1^c - A_1^a$, $D_2^{ca} = A_2^c - A_2^a$, $D_3^{ca} = A_3^c - A_3^a$ e $D_4^{ca} = A_4^c - A_4^a$. O procedimento é semelhante para a coordenada y.

Desenvolvimento do Segundo termo: $\int_A \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA$:

Inicialmente considera-se a seguinte decomposição da equação integral do fluxo de massa:

$$\int_A \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA = \int_a^o \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA + \int_o^c \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA \left(\begin{array}{l} +\text{contribuições similares de outros} \\ \text{elementos associados ao node i} \\ +\text{condições de contorno, se aplicável} \end{array} \right) \quad (28)$$

A parte explicita pode ser aproximada como:

$$\int_a^o \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA + \int_o^c \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA = \left[(Y_o - Y_a)(\rho u^*)_r - (X_o - X_a)(\rho v^*)_r \right] + \left[(Y_c - Y_o)(\rho u^*)_t - (X_c - X_o)(\rho v^*)_t \right] \quad (29)$$

Assumindo $\rho u^* = N_1 \rho_1 u_1^* + N_2 \rho_2 u_2^* + N_3 \rho_3 u_3^*$ e $\rho v^* = N_1 \rho_1 v_1^* + N_2 \rho_2 v_2^* + N_3 \rho_3 v_3^*$, depois substituindo-os na equação acima pode derivar a seguinte equação:

$$\int_a^o \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA + \int_o^c \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA = (B_1^c - B_1^a) \rho_1 + (B_2^c - B_2^a) \rho_2 + (B_3^c - B_3^a) \rho_3 \quad (30)$$

Tomando a equação de estado para um gás ideal é possível relacionar massa específica e a pressão:

$$\rho = p / (R_g T) \quad \text{ou} \quad \rho_i = p_i / (R_g T_i), \quad R_g = 287,05 \text{ J/(kgK)}, \quad \text{assim:}$$

$$\int_a^o \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA + \int_o^c \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA = p_1 \underbrace{(B_1^c - B_1^a) / (R_g T_1)}_{E_1^{ca}} + p_2 \underbrace{(B_2^c - B_2^a) / (R_g T_2)}_{E_2^{ca}} + p_3 \underbrace{(B_3^c - B_3^a) / (R_g T_3)}_{E_3^{ca}} \quad (31)$$

Ou simplesmente:

$$\int_a^o \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA + \int_o^c \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA = E_1^{ca} p_1 + E_2^{ca} p_2 + E_3^{ca} p_3 \quad (32)$$

Desenvolvimento do terceiro termo: $\iint_A \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA$:

$$\iint_A \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA = \int_a^o \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA + \int_o^c \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA \left(\begin{array}{l} +\text{contribuições similares de outros} \\ \text{elementos associados ao node } i \\ +\text{condições de contorno, se aplicável} \end{array} \right) \quad (33)$$

$$\int_a^o \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA + \int_o^c \rho \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dA = \left[(Y_c - Y_o)(\rho^* u^*)_t - (X_c - X_o)(\rho^* v^*)_t \right] - \left[(Y_a - Y_o)(\rho^* u^*)_r - (X_a - X_o)(\rho^* v^*)_r \right] = F^{ca} \quad (34)$$

Considerando os três termos da equação de conservação da massa:

$$\int_a^o \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA_n + \int_o^c \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA_n = p_1(D_1^{ca} + E_1^{ca}) + p_2(D_2^{ca} + E_2^{ca}) + p_3(D_3^{ca} + E_3^{ca}) + (F^{ca} + D_4^{ca}) \quad (35)$$

Acrescentando a contribuição das outras superfícies associadas aos outros elementos que partilham o nó i e introduzindo as contribuições dos termos independentes de p em um vetor b_i^p , a integral do fluxo de massa a cada nó do domínio pode ser escrita na forma algébrica:

$$\iint_A \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = a_i^p p_i - \sum_{nb} a_{nb}^p p_{nb} - b_i^p = 0 \quad (36)$$

Onde nb faz referência aos nós vizinhos a i . Ou simplesmente a equação algébrica da pressão:

$$a_i^p p_i = \sum_{nb} a_{nb}^p p_{nb} + b_i^p \quad (37)$$

Neste trabalho o problema do acoplamento pressão-velocidade é tratado seguindo os passos descritos em Zhou (1997). Em cada iteração do algoritmo calcula-se \mathbf{u} a partir de uma estimativa \mathbf{u}^* (valor mais recente de \mathbf{u}), depois verifica-se a convergência $\text{RMS}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^*) < \text{tol_vpc}$, em que $\text{RMS}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^*)$ é a Root-Mean-Square of the vector $(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^*)$ e tol_vpc é a tolerância de convergência do *velocity-pressure coupling*.

3 Validação do código compressível

Para a validação do código computacional foi considerado o caso teste, canal com lombada circular, que é um problema muito utilizado para validações numéricas de escoamentos compressíveis. Um escoamento a Mach M_1 , pressão estática p_1 e temperatura T_1 entra em um canal de comprimento $3L$ e altura L . Uma lombada de arco circular de altura h_B raio de corda L (raio entre as 2 extremidades da curva) está centrado na base (parede inferior) do canal. A altura da lombada está definida em termos de percentual do raio de corda. O escoamento sai do duto com Mach M_2 , pressão estática p_2 temperatura T_2 . Para o caso, problemas envolvendo escoamentos subsônico, transônico e supersônico através do canal foram solucionados. O problema é ilustrado esquematicamente na figura X1.

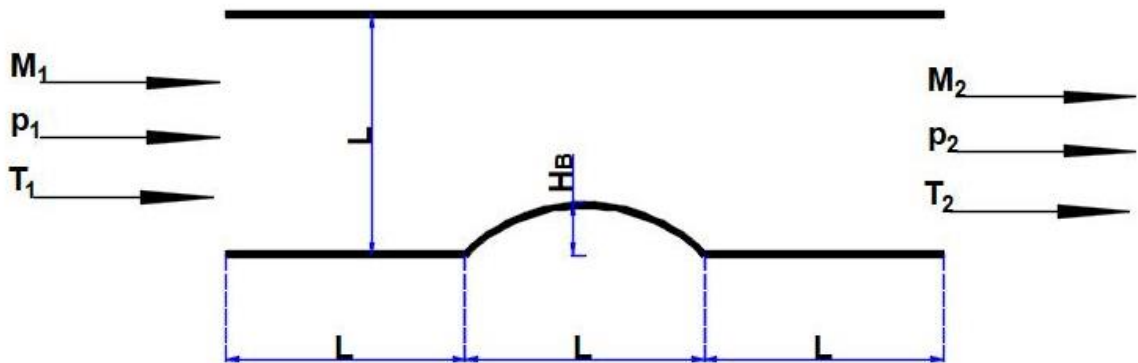


Figura 3. Geometria esquemática do canal com lombada circular

As condições de contorno utilizadas foram valores especificados na entrada, tangentes a parede e a condição de não deslizamento na parede inferior e superior do canal. Nos problemas solucionados neste trabalho, as pressões estáticas de entrada e saída foram definidas para serem equivalentes. Para os problemas do escoamento supersônico não foram requeridas condições de contorno para o fluxo de saída.

O CVFEM proposto foi utilizado com uma malha de 19081 elementos, como pode ser visualizado na figura X2, se optou por uma malha tão refinada, para se obter uma melhor e mais rápida convergência dos resultados.

Os resultados gerados pelo CVFEM propostos são comparados com o trabalho de Bertagnolio, F., & Sørensen, N. N[1]. Se optou por escolhe esse trabalho para referência e não o trabalho HAO ZHOU [2], que é a principal referencia desde artigo, pois apesar de o trabalho de Hao Zhou contém uma excelente discretização do caso, o mesmo não apresenta resultados com tanta qualidade, os resultados obtidos contém muitas variações e algumas discrepâncias para os trabalhos mais recentes do tipo. Para uma melhor visualização das simulações feitas nesse, será comentada em separado cada caso simulado.

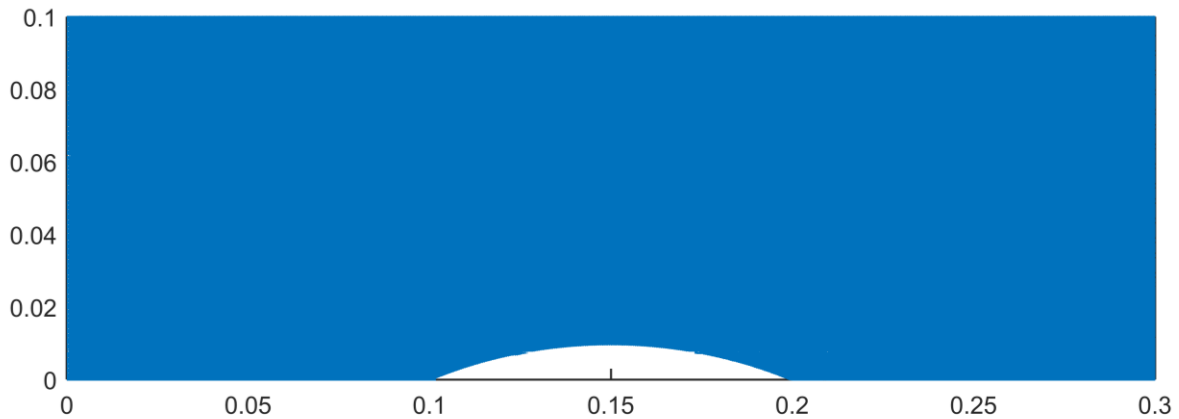


Figura 4. Malha usada na simulação

Caso subsônico

Na simulação do escoamento invíscido subsônico através do canal, o número de Mach de entrada foi inserido como igual a 0,5, e a altura do bump foi definida como 10% do valor de corda. As seguintes condições de geometria e fluxo foram utilizadas na simulação deste problema:

$$\begin{aligned}
 L &= 0,1m & p_1 &= 100kPa & p_2 &= 100kPa \\
 h_B &= 0,01m & T_1 &= 300K \\
 M_1 &= 0,5
 \end{aligned}$$

Nesse problema, as singularidades nos limites de frente e fuga da lombada geram distúrbios de pressões que se propagam a montante e jusante para prover moderadas variações no número de Mach. O escoamento então desacelera na região de fuga da lombada, uma vez que este permanece subsônico e invíscido, atingindo como valor mais alto de Mach igual a 0,69, de forma que não haverá perdas dissipativas e sendo assim, o fluxo deverá retornar ao número de Mach de entrada na saída. Como pode ser visualizado nos campos de Mach e pressão (figuras 5 e 6)

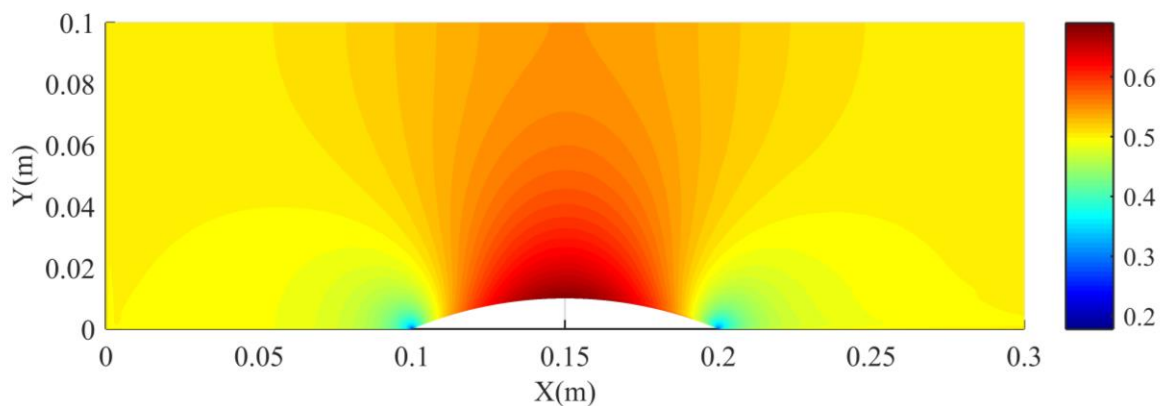


Figura 5. distribuição do número de Mach no canal

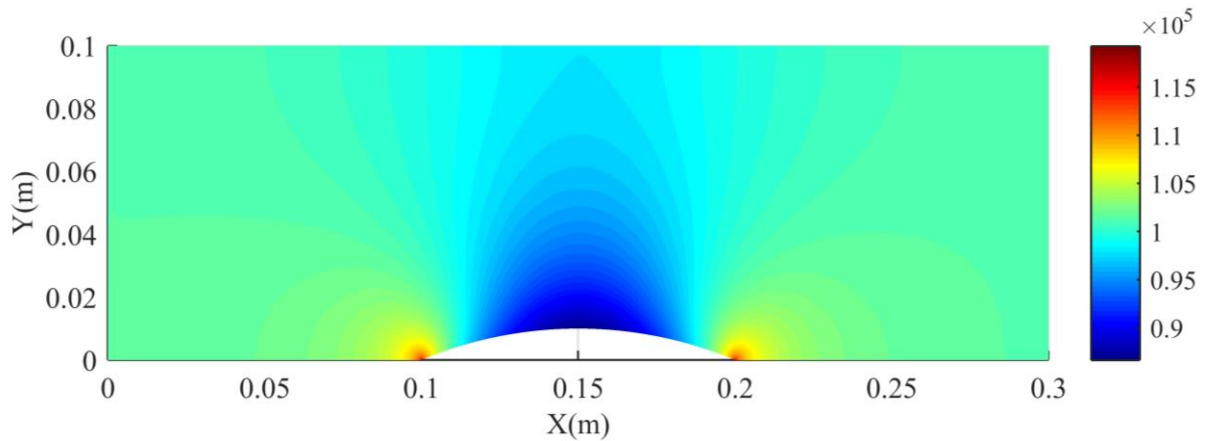


Figura 6. Distribuição do campo de pressão ao longo do canal

Quando comparados com os resultados obtidos, com recente trabalho de *Bertagnolio, F., & Sørensen, N. N* [1], se obteve uma excelente concordância dos resultados, tanto para a parede inferior aonde está localizado o arco, quanto para parede superior, como mostra a figura X5. Também é possível notar que no trabalho de referência o número de Mach não é exatamente igual ao da entrada, para a parede inferior, algo que ocorre para na simulação aqui feita, o que é uma melhoria da qualidade dos resultados obtidos.

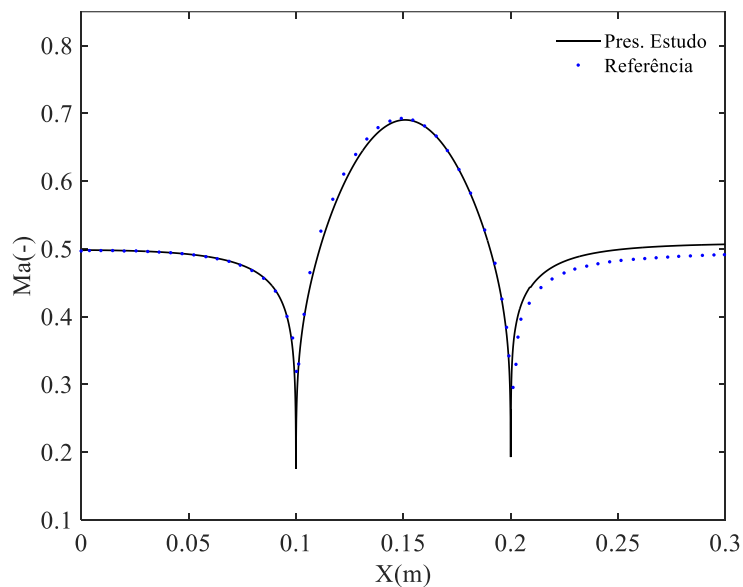


Figura 7(a). Comparação dos resultados obtidos na parede inferior com o trabalho de referência.



XL CILAMCE
IBERO-LATIN AMERICAN
CONGRESS ON
COMPUTATIONAL
METHODS IN
ENGINEERING

NOVEMBER
11-14, 2019
Praiamar Natal Hotel & Convention
Natal, RN-BRAZIL

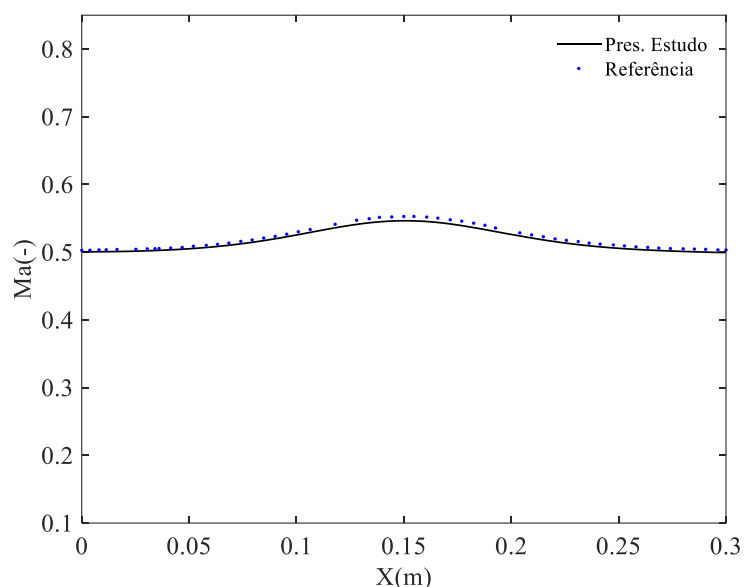


Figura 7(b). Comparação dos resultados obtidos na parede superior com o trabalho de referência.

Caso transônico

Para a simulação do caso transônico as condições iniciais e geométricas são idênticas ao caso anterior e diferindo apenas o número de Mach da entrada que desta vez foi definido como 0,675.

Como pode ser observado na figura 8, o número de Mach atinge um valor mínimo no limite inferior da saliência, também é possível que o mesmo acontece no caso anterior, mas com o aumento do número de Mach, a colisão se torna maior. O escoamento então é acelerado sobre a lombada formando uma região supersônica que é finalizada por um impacto normal (onda de choque) na região de fuga da saliência. Após o impacto, o escoamento recupera condições próximas as da entrada.

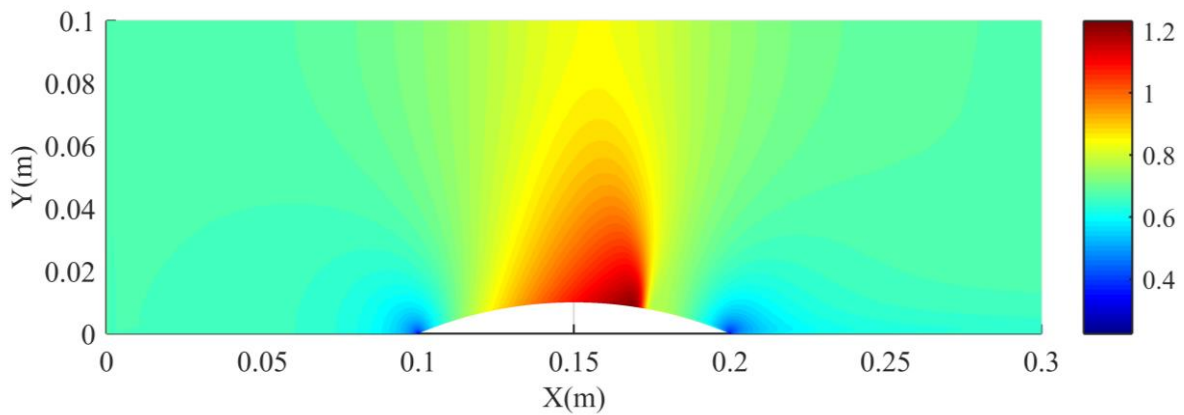


Figura 8. Campo de pressão para simulação transônica

A partir do impacto, a pressão de estagnação próxima a parede inferior do canal reduz, como pode ser observado na figura 9, então, o Mach de saída próximo a superfície a parede inferior é menor do que na entrada do ducto, isso se deve, para compensar as pressões estáticas de entrada e saída serem iguais. Haverá também uma recuperação de pressão no pós impacto. A redução do número de Mach na saída reflete a perda de pressão de estagnação.

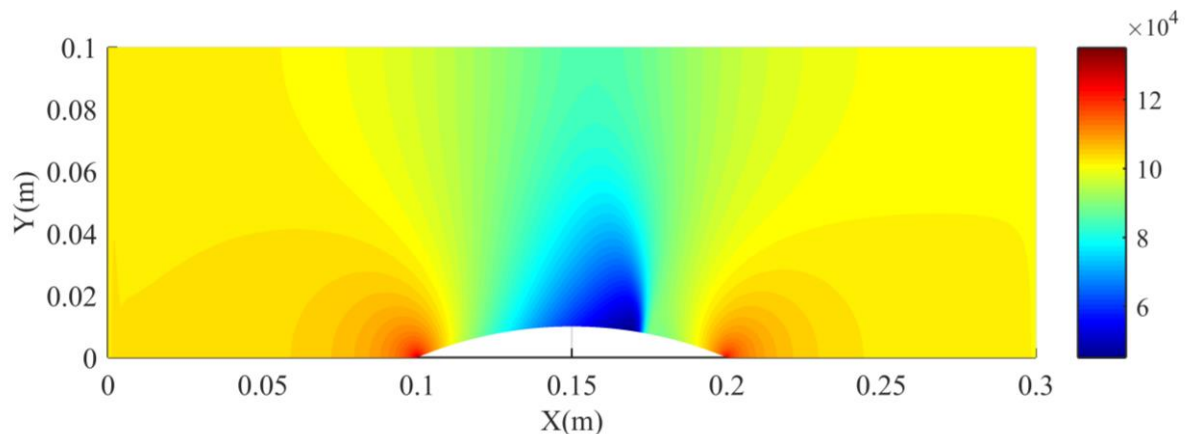


Figura 9. Campo de pressão para simulação transônica

Quando comparado aos resultados de referência, apresenta uma ótima concordância, tanto na parede superior quanto na parede inferior. A principal diferença se na amplitude do número de Mach para a parede inferior. No trabalho de referência, como pode ser visualizado na figura 10, atinge um número de Mach muito maior na zona crítica. Essa diferença, entre outros fatores, se dá por conta da malha utilizada, no trabalho de referência, ser menos refinada, gerando assim oscilações maiores de um elemento para o outro.

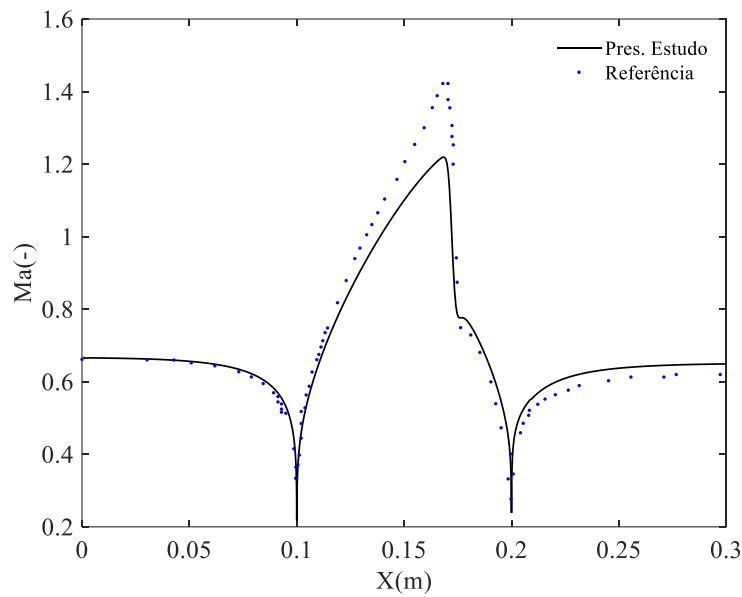


Figura 10(a). Comparação dos resultados obtidos na parede inferior com o trabalho de referência

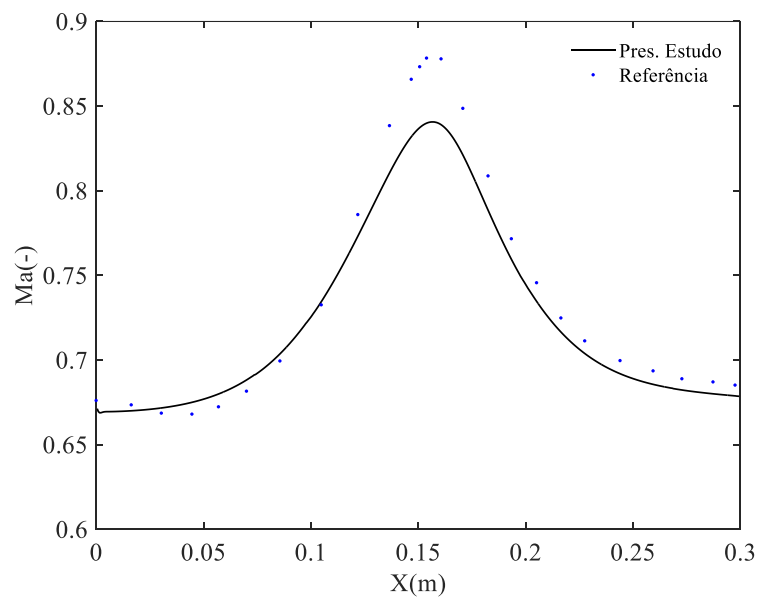


Figura 10(b). Comparação dos resultados obtidos na parede superior com o trabalho de referência.

Caso supersônico

A simulação supersônica, diferente das simulações anteriores, tem mudanças geométricas, a altura da saliência (H_b) agora é definida como 4% do comprimento de corda. Essa redução se dá pois para

simulações supersônicas é mais difícil atingir a convergência dos resultados. A pressão da saída, não foi definida como igual a da entrada, em resumo os seguintes valores foram usados nessa simulação:

$$\begin{aligned} L &= 0,1m & p_1 &= 100kPa \\ h_B &= 0,004m & T_1 &= 300K \\ & & M_1 &= 1,65 \end{aligned}$$

Diferente do escoamento em canal subsônico, que os distúrbios de pressão gerados por singularidades nos limites de frente e fuga da lombada podem se propagar a montante para prover um moderado decréscimo no número de Mach. Quando o escoamento é supersônico, entretanto, esses distúrbios coalescem (se unem) em impulsos oblíquos (figura 11). O limite de frente do choque extrapola-se (reflete) para a parede superior do canal, e interage como o limite de fuga do choque. Os limites de frente e de fuga, e os choques refletidos são então enfraquecidos pela propagação dentro do escoamento pela superfície convexa da bomba. Esse caso em específico, mostra por que esse é um problema clássico para validação de códigos de simulações numéricas, uma vez que três choques e os desvios próprios do fluxo através dos choques precisam ser capturados.

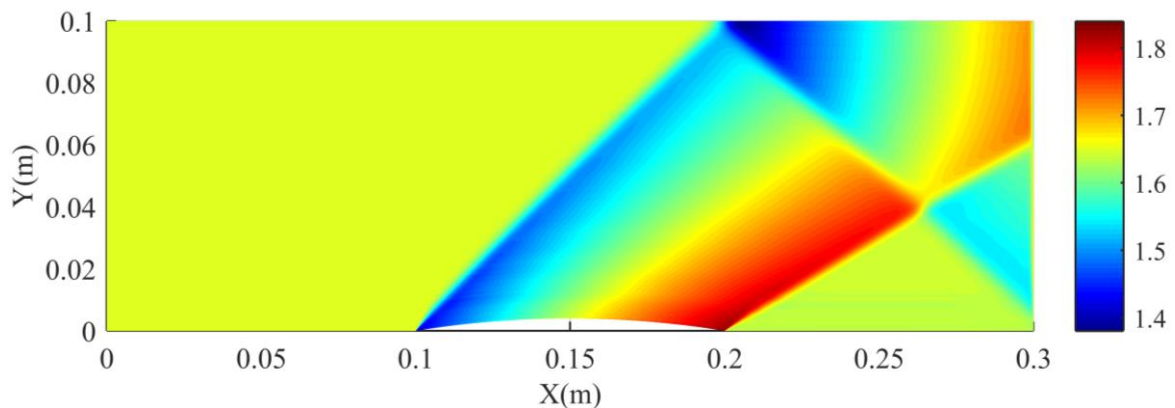


Figura 11. Distribuição do número de Mach para o caso supersônico, mostrando a reflexão das ondas de choque.

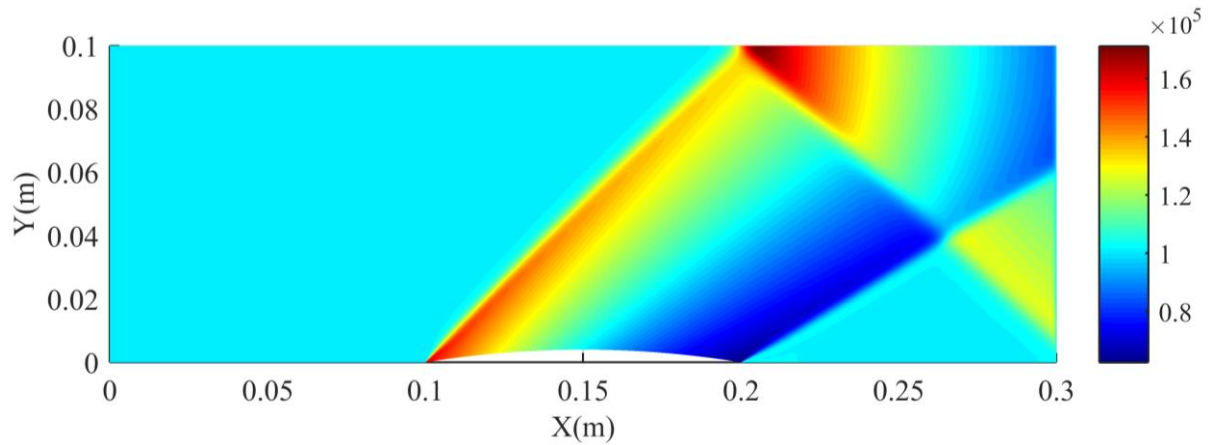


Figura 12. Distribuição do campo de pressão para o caso supersônico.

Quando comparado a literatura, esse apresentou algumas discrepâncias na zona crítica, como mostra a imagem 13. Isso de certa forma já se era esperado, pois a simulação para esse escoamento supersônico é extremamente severa, o código numérico deve ser capaz de detectar com exatidão 3 choques e suas respectivas reflexões. Para um próximo trabalho o código será melhorado deverá ser melhorado, se aproximando assim mais da literatura e até menos acrescentando melhorias a ela.

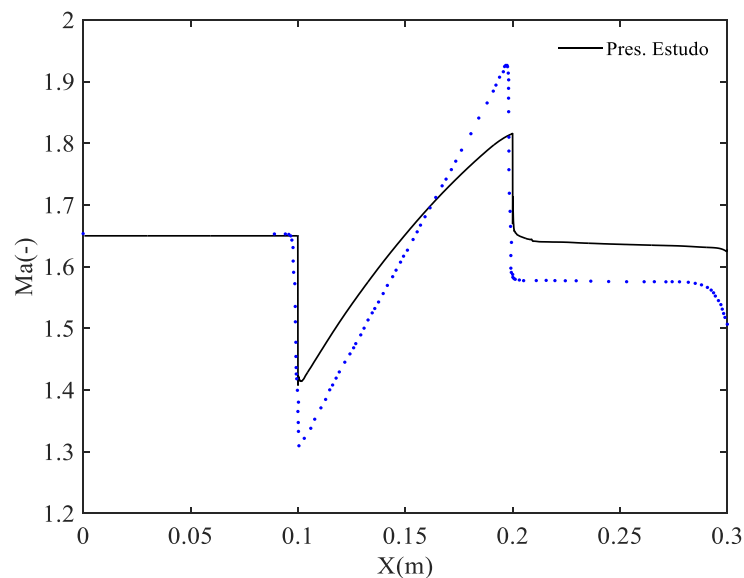


Figura 13(a). Comparação dos resultados obtidos na parede inferior com o trabalho de referência.

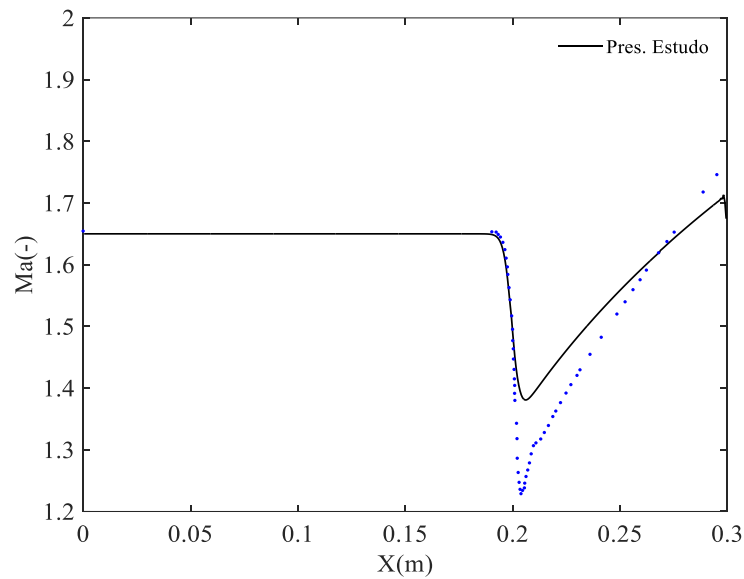


Figura 13(b). Comparação dos resultados obtidos na parede inferior com o trabalho de referência.

4 Conclusão

O presente trabalho, se mostrou muito consistente com a literatura. Apresentou uma boa convergência de resultados. Foi mostrado em detalhes a discretização das equações matemática, algo não muito usual em trabalhos do tipo. Podendo assim este servir de referência para novos trabalhos.

A nova fase da pesquisa consiste na aplicação dos conceitos desenvolvidos, para diferentes tipos de geometrias de bocais. Servindo assim para a validação de geometrias e a busca pela otimização das mesmas.

Para futuras pesquisas se sugere a utilização de um de um grau de interpolação maior no fluxo de massa, gerando assim resultados com uma convergência mais rápida, não sendo assim necessário a utilização de uma malha tão discretizada. Ganhando assim performance computacional.

Referências

- [1] Galfetti, L.; Nasuti, F.; Pastrone, D.; Russo, A.M. (2014). “An Italian Network to Improve Hybrid Rocket Performance: Strategy and Results”. In: *Acta Astronautica*96, 246–260.
- [2] Zhou, Hao. (1997). *A Mass-Weighted Upwind-Based Control Volume Finite-Element Method For Steady Two-Dimensional Viscous Compressible Flows*, Master's Thesis of Engineering. Faculty of Engineering & Applied Science Memorial University of Newfoundland, Newfoundland, canada
- [3] Prakash, C., Patankar S.V. (1985). “A control-volume-based-finite-element method for solving the Navier–Stokes equations using equal-order velocity–pressure interpolation.” In: *Numerical Heat Transfer*, 8, 259-280.
- [4] Bertagnolio, F., & Sørensen, N. N. (2018). *Extension of EllipSys to compressible flows - Implementation and verifications*. DTU Wind Energy. DTU Wind Energy E, No. 170

