

## **APPLICATION OF THE GENERALIZED FINITE ELEMENT METHOD TO THE FIRST ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY APPLIED TO ISOTROPIC AND SANDWICH PLATES UNDER LARGE DISPLACEMENTS**

**Wellington Rhoden de Lemos**

**Paulo de Tarso Rocha de Mendonça**

*wellington\_lemos@hotmail.com*

*mendonca@grante.ufsc.br*

*Affiliation*

*Department of Mechanical Engineering, Federal University of Santa Catarina – UFSC Trindade, Florianópolis, SC 88.040-900*

**Abstract.** This paper presents a procedure to extract accurate transverse normal and shear stresses, and the transverse and in-plane displacements, in isotropic plates, symmetric laminated composite plates and plates with sandwich structure, modeled by the First Order Shear Deformation Theory (FSDT), under large displacements considered in the von Kármán sense. The Generalized Finite Element Method (GFEM) is used, in which the enrichment of the Partition of Unity (PoU) functions is done by complete polynomial functions, improving the obtained results, and making it possible to obtain basis of approximate functions with degree 4 of polynomial reproducibility. This makes possible to obtain straightforwardly the third derivatives of transverse displacement  $w$ , which is needed in most extraction procedures based on the integration of the local equilibrium and kinematic equations. The procedure starts with the integration of the local differential equations static equilibrium, using the results obtained from the direct calculations of stresses and displacements by the constitutive equations using the results of the GFEM. Modifications of the stresses at given integration points are performed to enforce the following conditions: (a) the satisfaction of boundary conditions on both faces of the laminate, (b) equivalence with the resultant shear forces, and (c) interlaminar continuity of stresses. The transverse and in-plane displacements are integrated along the thickness using the three-dimensional local stress-strain relations for anisotropic layers. The stresses and deflections calculated with the proposed post-processing are compared with the stresses and deflections obtained in the literature or calculated using a three-dimensional Finite Element (FEM) analysis that serves as a reference. The proposed stress recovery procedure, when applied to geometrically nonlinear problems, generate estimates that show a good correlation with the three-dimensional FEM reference solutions and with the solutions present in the literature, for all test cases of isotropic, laminated plates and sandwich plates. For the displacements along the thickness the results are satisfactory, considering that the solution comes from a first order model.

**Keywords:** Stress recovery, Post-processing, Layered composite structures.

## 1 Introdução

Pela forma como as estruturas compostas laminadas são construídas, elas estão sujeitas a vários modos de falha, como a delaminação, que é causada pelo efeito de tensões normais e cisalhantes transversais. Assim sendo, determinar as variações das tensões transversais ao longo da espessura dos laminados assume grande importância. Neste sentido, as análises de tensões buscam estimativas precisas da distribuição das tensões, principalmente das componentes transversais.

Análises tridimensionais destas estruturas oferecem resultados mais precisos do que teorias de placas e cascas, porém, são geralmente inexistentes nos casos analíticos, ou de alto custo computacional nos casos de soluções numéricas. Pela simplicidade, as teorias bidimensionais de placas ou cascas são utilizadas para a análise de estruturas compostas, de tal modo que, após as tensões terem sido calculadas, os valores das tensões interlaminares assumidas como sendo zero são estimados por alguns meios. Esse processo é frequentemente chamado de recuperação (ou extração) de tensões.

Entre os precursores na investigação do conceito de recuperação de tensões está Pagano [1] e [2], que obteve as tensões interlaminares com expressões de forma fechada, considerando as hipóteses de Kirchhoff, para cargas transversais em placas laminadas simplesmente apoiadas. Estes resultados, obtidos pela integração das equações de equilíbrio da teoria da elasticidade linear, foram comparados com a solução analítica tridimensional, apresentando boas aproximações entre as duas abordagens. Considerando os desenvolvimentos de recuperação de tensões no Método dos Elementos Finitos (MEF), Pryor e Barker [3] implementaram o método de diferença-finitas em pós-processamento, associado à teoria da deformação cisalhante (*shear-deformable theory*) de Whitney [4], integrando as equações de equilíbrio para calcular as tensões transversais cisalhantes. As comparações com a solução exata da elasticidade indicam bons resultados. Chaudhuri [5] utilizou as duas primeiras equações do equilíbrio para calcular a variação das tensões transversais cisalhantes ao longo da espessura de laminados espessos, a partir de tensões coplanares provenientes de um modelo de MEF. Engblom e Ochoa [6] desenvolveram um elemento finito quadrilateral a partir do qual estavam disponíveis formas analíticas para as tensões interlaminares. Chaudhuri e Seide [7] utilizaram elementos triangulares previamente desenvolvidos e aplicaram um processo de recuperação de tensões cisalhantes interlaminares, a fim de satisfazer as condições de contorno das superfícies superior e inferior e a continuidade das tensões nas interfaces das lâminas. Noor et al. [8] desenvolveram um procedimento preditor-corretor nos quais deslocamentos e deformações são refinados iterativamente até que o grau de convergência desejado seja obtido.

Estas abordagens citadas consideram sempre problemas geometricamente lineares. Quando se trata de problema nos quais as não linearidades geométricas são importantes, existem menos trabalhos publicados. Chia [9] observa a importância de incluir termos de rotação no cálculo de tensões e deformações, especialmente para placas finas. Libai e Simmonds [10] mencionam, brevemente, que é possível estimar tensões transversais de cisalhamento integrando as equações diferenciais de equilíbrio na direção da espessura, mas nenhuma discussão é apresentada sobre se as equações não lineares devem ser usadas ou não. Outros trabalhos neste sentido são apresentados em [11], [12], [13], [14] e [15]. Embora estas abordagens tenham apresentado bons resultados as formulações tendem a ser demasiado complexas para permitirem sua extensão aos problemas de cascas.

O objetivo deste trabalho é apresentar os principais pontos a formulação desenvolvida para extrair tensões transversais e deflexões, processando resultados a partir do modelo do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), para placas laminadas e estruturas sanduíches sob deslocamentos moderadamente grandes a partir do modelo de primeira ordem de Reissner – Mindlin com as hipóteses de von Kármán.

## 2 Método dos Elementos Finitos Generalizados

O MEFG fornece uma configuração muito oportuna para executar a extração, por causa de sua maneira fácil de realizar o enriquecimento coplanar da função base usada nas funções de deslocamento generalizadas do modelo de Mindlin. Mesmo em problemas sem qualquer descontinuidade de dados ou solução, a base pode ser facilmente enriquecida para obter polinômios de ordens superiores, utilizando uma malha fixa de nós e elementos. Isto permite, de forma direta, todas as diferenciações necessárias em todos os processos de recuperação de tensão disponíveis. Vale ressaltar que os códigos comerciais utilizam elementos finitos de baixa ordem, geralmente lineares ou quadráticos. Nestes casos, a base do elemento não permite as diferenciações necessárias para a maioria dos processos de recuperação. No MEFG, a base pode ser de polinômios de reprodutibilidade de graus 3 ou 4, o que permite uma maneira direta de extrair as tensões e deslocamentos.

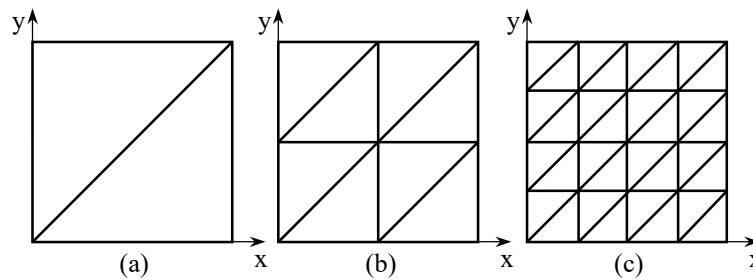


Figura 1. Exemplos de malhas usadas em placas, malhas com índices  $M = 1, 2$  e  $4$ .

O MEFG é uma variação numérica do MEF no qual o enriquecimento da base de aproximação é realizado diretamente, sem necessidade de alterar a partição da malha, a quantidade ou posições dos nós. A malha (Fig. 1) é usada para gerar a modelagem geométrica, facilitar o processo de integração numérica e definir a Partição da Unidade (PU), geralmente com as funções Lagrangianas lineares usuais. A PU é enriquecida por um conjunto arbitrário de funções de enriquecimento. As funções de enriquecimento são utilizadas para melhorar os resultados numéricos por meio da multiplicação das funções PU por funções polinomiais, harmônicas ou funções que contenham parte da solução do problema de valor no contorno [16]. Neste trabalho são utilizadas as seguintes funções de enriquecimento:

1. Enriquecimento linear,  $p = 1$ :  $L_{i\alpha} = [1, \bar{x}, \bar{y}]$ ;
2. Enriquecimento quadrático,  $p = 2$ :  $L_{i\alpha} = [1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}^2, \bar{x}\bar{y}, \bar{y}^2]$ ;
3. Enriquecimento cúbico,  $p = 3$ :  $L_{i\alpha} = [1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}^2, \bar{x}\bar{y}, \bar{y}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^2\bar{y}, \bar{x}\bar{y}^2, \bar{y}^3]$ ;
4. Enriquecimento quártico,  $p = 4$ :  $L_{i\alpha} = [1, \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}^2, \bar{x}\bar{y}, \bar{y}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^2\bar{y}, \bar{x}\bar{y}^2, \bar{y}^3, \bar{x}^4, \bar{x}^3\bar{y}, \bar{x}^2\bar{y}^2, \bar{x}\bar{y}^3, \bar{y}^4]$

onde:  $\bar{x} = \frac{x - x_\alpha}{h_\alpha}$  e  $\bar{y} = \frac{y - y_\alpha}{h_\alpha}$  sendo  $x_\alpha, y_\alpha$  coordenadas do nó  $x_\alpha$  e  $h_\alpha$  é um raio representativo da nuvem  $w_\alpha$ .

## 3 Teoria de placas de Reissner - Mindlin

A Teoria de Reissner – Mindlin é também conhecida por Teoria de Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (do inglês *First Order Shear Deformation Theory – FSDT*). Essa teoria apresenta facilidade de implementação computacional pois, necessita apenas de funções de aproximação de classe  $C^0$ . Juntamente a isso pode ser aplicada a placas mais espessas que a Teoria Clássica de Placas (TCP), o que a torna uma ferramenta bastante usada em aplicações acadêmicas e *softwares* comerciais. Porém, pode gerar algumas patologias numéricas do MEF, como o travamento em cisalhamento (*shear locking*).

Com hipóteses semelhantes às da TCP, considera que qualquer segmento inicialmente reto e normal à superfície de referência indeformada da placa permanece reto e inextensível, porém não

necessariamente normal à superfície de referência deformada. Essa não perpendicularidade permite um certo grau de aproximação ao cisalhamento [17].

Assim, o campo de deslocamentos é dado por:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) + z\theta_x(x, y), \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) + z\theta_y(x, y), \\ w(x, y, z) &= w(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $\theta_x$  e  $\theta_y$  denotam rotações sobre os eixos  $y$  e  $x$  respectivamente, sendo:

$$\theta_x = -\frac{du}{dz}, \quad \theta_y = -\frac{dv}{dz}. \quad (2)$$

### 3.1 Hipóteses de von Kármán

Está hipótese trata dos termos não lineares nas equações de equilíbrio e nas equações cinemáticas. Para vigas e placas sob deslocamentos apenas moderadamente grandes, mantêm-se do tensor de deformação de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  apenas os termos:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3)$$

Estes termos são os responsáveis pela chamada não linearidade geométrica. Todos os demais termos não lineares são eliminados. Sendo assim as relações deformação – deslocamentos de von Kármán tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_{yx} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4)$$

E a forma local das equações do equilíbrio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho b_x &= \rho \frac{d^2 u}{dt^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho b_y &= \rho \frac{d^2 v}{dt^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \tau_{xz} + \sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \tau_{yz} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sigma_z + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \rho b_z &= \rho \frac{d^2 w}{dt^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

## 4 Pós – processamentos usuais

A principal hipótese do modelo de primeira ordem é que o deslocamento transversal  $w(x, y)$  independe da coordenada  $z$ , resultado, portanto, em uma deformação  $\varepsilon_z = 0$  em qualquer posição  $(x, y, z)$ . Além disso as tensões cisalhantes transversais  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  são constantes, como consequência das deformações cisalhantes transversais  $\gamma_{yz}$  e  $\gamma_{xz}$  serem consideradas constantes através da espessura. Porém, não corresponde ao fenômeno físico, que em placas laminadas compostas essas tensões variam ao longo da espessura, pelo menos, de forma quadrática [17].

Como as tensões transversais  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  não são nulas, representam valores importantes nas interfaces das lâminas e são as responsáveis pelo principal modo de falha ao qual os laminados estão

suscetíveis, a delaminação, determinar a variação destas tem grande importância.

#### 4.1 Recuperação de tensões por meio das equações de equilíbrio

As tensões transversais podem ser determinadas por meio da integração, ao longo da espessura, das equações de equilíbrio. A qualidade dos resultados depende da precisão das tensões coplanares. Com isso é possível obter resultados com melhor precisão mesmo utilizando teorias de baixa ordem.

O processo de recuperação de tensões utiliza as equações de equilíbrio para deformações infinitesimais, que considera as tensões de Cauchy atuando na configuração indeformada, e sem levar em conta suas componentes transversais devido aos deslocamentos moderadamente grandes, como na teoria de von Kármán [17]. As equações de equilíbrio neste caso, sem forças de corpo e desconsiderando a inércia, são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\quad (6)$$

Estas três equações foram um conjunto de equações diferenciais parciais lineares de primeira ordem que podem ser integradas ao longo da espessura, na direção  $z$ , da placa. Assim as tensões transversais  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  são funções das tensões coplanares transversais  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ . Integrando (6) em  $z$ , e indicando as tensões transversais obtidas por integração pelo índice  $i$ , temos

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^i(x, y, z) &= \int_{z=-H/2}^{+H/2} \left[ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right] dz - \tau_{xz}^i(x, y, -H/2), \\ \tau_{yz}^i(x, y, z) &= \int_{z=-H/2}^{+H/2} \left[ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right] dz - \tau_{yz}^i(x, y, -H/2), \\ \sigma_z^i(x, y, z) &= \int_{z=-H/2}^{+H/2} \left[ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right] dz - \sigma_z^i(x, y, -H/2).\end{aligned}\quad (7)$$

Em se tratando de estimativa precisa de tensões transversais de laminados submetidos a não linearidade geométrica, Byun e Kapania [13] incluíram alguns termos não lineares na equação de equilíbrio para a direção transversal. Park et al. [14] aplicam a integração de equações de equilíbrio não lineares simplificadas como último passo de um método preditor – corretor, após as distribuições de deslocamento terem sido corrigidas de uma análise de elementos finitos de placa.

## 5 Formulação

Neste capítulo apresentaremos a formulação usada para obter tensões transversais pelo processo de integração e um método de pós-processamento para corrigir estas tensões, para problemas com não linearidade geométrica em placas laminadas e estruturas sanduíche, obtidas de resultados de MEFG baseado no modelo de Reissner – Mindlin.

### 5.1 Integração das equações de equilíbrio local

Consideramos as equações locais de equilíbrio com as hipóteses de von Kármán apresentadas em (5) e desconsiderando as forças de corpo e de inércia temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \tau_{xz} + \sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \tau_{yz} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sigma_z + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} \right] = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Partindo agora das duas primeiras equações do equilíbrio (8) e integrando em  $z$  obtemos:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^i(z) - \tau_{xz}^i(-H/2) &= - \int_{-H/2}^{+H/2} \left[ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right] dz, \\ \tau_{yz}^i(z) - \tau_{yz}^i(-H/2) &= - \int_{-H/2}^{+H/2} \left[ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right] dz, \end{aligned} \quad (9)$$

As tensões coplanares e suas derivadas são obtidas inicialmente a partir de aproximações do MEFG das deformações generalizadas:

$$\Sigma^0 \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^0 \mathbf{U}, \quad (10)$$

$$\Sigma^{NL} \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon^{NL} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{B}^{NL} (\mathbf{U}) \mathbf{U}, \quad (11)$$

onde  $\varepsilon^0$  e  $\kappa$  são as parcelas de membrana e curvatura na superfície de referência,  $\varepsilon^{NL}$  é a parcela não linear da deformação de membrana,  $\mathbf{B}(x, y)$  é a matriz de deformação obtida pelo MEFG e o vetor  $\mathbf{U}$  é o vetor de coeficientes nodais. A parcela não linear é apresentada por  $\mathbf{B}^{NL}(x, y)$  conforme apresentada por Zienkiewicz e Taylor [18].

$$\mathbf{B}^{NL} = \mathbf{A}^z \mathbf{G} \quad (12)$$

onde as matrizes  $\mathbf{A}^z$  e  $\mathbf{G}$  são definidas por:

$$\mathbf{A}^z \equiv \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{G} \equiv \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

A deformação local em um dado ponto  $(x, y, z)$  é dada por  $\varepsilon = e + z\kappa$  onde  $e = \varepsilon^0 + \varepsilon^{NL}$  e as tensões coplanares e suas derivadas são dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{Q}} \{ e + z\kappa \}, \\ \sigma_{,x} &= \bar{\mathbf{Q}} \{ e_{,x} + z\kappa_{,x} \}, \\ \sigma_{,xy} &= \bar{\mathbf{Q}} \{ e_{,xy} + z\kappa_{,xy} \}, \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $\bar{\mathbf{Q}}$  é a matriz elástica para o estado de tensões coplanares de uma lâmina  $k$ .

Consideramos agora a terceira equação de (8) posta da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \sigma_z + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} \right] = -F_z, \text{ onde} \quad (15)$$

$$F_z \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left[ \tau_{xz} + \sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \tau_{yz} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} \right],$$

e integrando (15)

$$\left[ \sigma_z^i + \tau_{xz}^i \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz}^i \frac{\partial w}{\partial y} \right]_{-H/2}^z = - \int_{-H/2}^z F_z dz, \quad (16)$$

o índice  $i$  é adicionado para lembrar que a componente foi obtida indiretamente por integração.

## 5.2 Correção das tensões transversais integradas

Consideramos um polinômio cúbico em  $z$ ,  $f(z) = a + bz + cz^2 + dz^3$ , e restringindo  $f(z)$  de modo que satisfaça as seguintes condições:

1.  $f(-H/2) = 0$ ,
2.  $f(H/2) = A$ .

Os coeficientes são restritos de tal forma que o polinômio toma a seguinte forma:

$$f(\mathbf{x}, z) = A(\mathbf{x}) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{H} \right) + c \left( z^2 - \frac{H^2}{4} \right) + d \left( z^3 - \frac{H^2}{4} z \right) \quad (17)$$

onde  $A(\mathbf{x})$  é suposto depender da posição  $\mathbf{x} = (x, y)$  sobre a superfície de referência.

Consideram-se o seguinte problema:

1. Dado  $\tau_{xz}(z)$  e  $\tau_{yz}(z)$  calculados diretamente das equações constitutivas e relações cinemáticas, e
2. Dado  $\sigma_z^i(z)$ ,  $\tau_{xz}^i(z)$  e  $\tau_{yz}^i(z)$  calculados por integração das equações de equilíbrio local,
3. Encontre as funções ajustadas:

$$\begin{aligned} \sigma_z(z) &= \sigma_z^i(z) + f_z(z), \\ \tau_{xz}(z) &= \tau_{xz}^i(z) + f_x(z), \quad \text{e} \\ \tau_{yz}(z) &= \tau_{yz}^i(z) + f_y(z), \end{aligned} \quad (18)$$

onde  $f_x(z)$ ,  $f_y(z)$  e  $f_z(z)$  são polinômios com a forma de (17), as quais tomam as formas:

$$\begin{aligned} f_x(z) &= A_x \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{H} \right) + c_x \left( z^2 - \frac{H^2}{4} \right) + d_x \left( z^3 - \frac{H^2}{4} z \right), \\ f_y(z) &= A_y \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{H} \right) + c_y \left( z^2 - \frac{H^2}{4} \right) + d_y \left( z^3 - \frac{H^2}{4} z \right), \\ f_z(z) &= A_z \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{H} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

4. Impor as seguintes condições na superfície superior do laminado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_z(H/2) = q_z^s \\ \tau_{xz}(H/2) = q_x^s \\ \tau_{yz}(H/2) = q_y^s \\ \int_{-H/2}^{H/2} \{ \tau_{xz}, \tau_{yz} \} dz = \{ Q_x, Q_y \}, \end{array} \right. \quad (20)$$

onde  $q_x^s$ ,  $q_y^s$  e  $q_z^s$  são os valores conhecidos das cargas distribuídas nas direções do plano cartesiano aplicadas na superfície superior do laminado, isto é, nas coordenadas  $(x, y, +H/2)$ . Além disso,  $Q_x$  e  $Q_y$  são as forças cortantes no ponto, calculados a partir de resultados do MEFG pelas equações constitutivas. Portanto, as funções ajustadas em (18) são definidas pelas constantes  $A_x, c_x, d_x$  e  $A_y, c_y, d_y$ .

## 6 Resultados

Nesta seção, resultados numéricos do MEFG são comparados com a solução obtida por meio de análise numérica no *software* ANSYS. Os aspectos investigados são: (a) efetividade do processo de integração e de correção, e (b) influência dos termos não lineares nas equações de equilíbrio.

### 6.1 Exemplo numérico

O problema analisado consiste em uma placa sanduíche quadrada simplesmente apoiada: lados  $a = b$ , espessura  $H$  e aspecto  $a / H = 50$ . As constantes do material são:

$$\begin{aligned}
 \text{Fases:} \quad & E_2 = E_3 = 6890 \text{ MPa}, & G_{12} = G_{13} = 0,5E_2, \\
 & E_1 = 25E_2, & G_{23} = 0,2E_2, \\
 & \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,25, & \\
 \text{Núcleo:} \quad & E_{1n} = E_{2n} = 275,6 \text{ MPa}, & G_{13n} = G_{23n} = 413,4 \text{ MPa}, \\
 & E_{3n} = 3445 \text{ MPa}, & G_{12n} = 110,24 \text{ MPa}, \\
 & \nu_{12n} = \nu_{31n} = \nu_{32n} = 0,25, & \nu_{13n} = \nu_{23n} = 0,02.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Aplica-se uma carga transversal distribuída variando com um duplo seno no plano  $x, y$ , definida por:

$$q(x, y) = q_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b}\right). \tag{22}$$

Os resultados do modelo de MEFG são obtidos com uma malha M16, grau de enriquecimento  $p = 4$  e número de pontos de integração  $n_{pi} = 54$ . Já o modelo em ANSYS utiliza-se elementos sólidos (SOLID186, com 20 nós) com integração reduzida uniforme. O modelo foi simulado com 100 mil elementos, 436.421 nós e 1.309.263 graus de liberdade.

Na Fig 2. apresenta-se o comportamento das tensões normais  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  no centro da placa ao longo da espessura. Os resultados obtidos se aproximam da solução obtida pelo ANSYS, com uma simulação 3D, apresentando diferenças relativas da ordem de 25%, nos valores de máximo, mínimo e nas interfaces das lâminas.

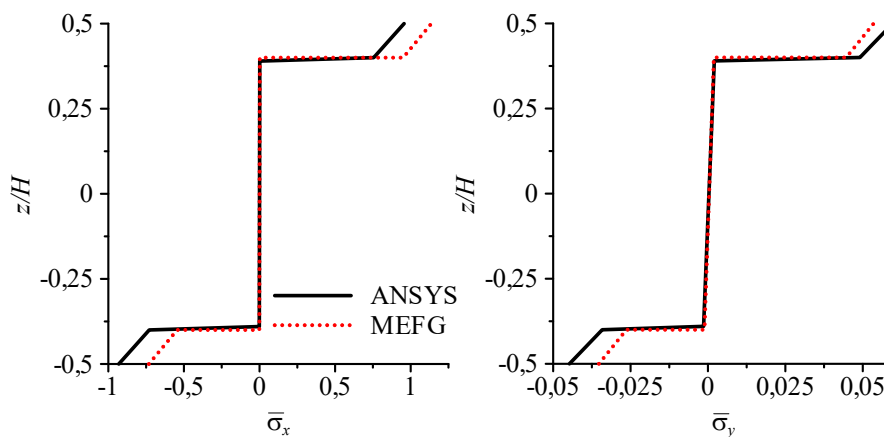


Figura 2. Tensões normais  $\bar{\sigma}_x = \sigma_x(a/2; b/2; z) \frac{H^2}{q_0 a^2}$  e  $\bar{\sigma}_y = \sigma_y(a/2; b/2; z) \frac{H^2}{q_0 a^2}$  obtidos pelo ANSYS e pelo MEFG, através da espessura com M16,  $p = 4$  para uma placa sanduíche com aspecto  $a/H = 50$ .

A Fig. 3 apresenta a deflexão transversal  $\bar{w}$  ao longo da espessura. Os valores obtidos pela teoria



de primeira ordem são constantes ao longo da espessura, o que não ocorre na solução obtida pelo ANSYS. Com o processo de integração aplicado ao modelo de primeira ordem é possível obter um comportamento da deflexão ao longo da espessura mais próxima da solução 3D, mesmo apresentando uma diferença maior na superfície superior e inferior. Nota-se que, embora os erros da curva constitutiva sejam menores, seu comportamento é fisicamente incorreto. Já a curva corrigida apresenta um comportamento qualitativo excelente, e apresenta erros provenientes principalmente de uma translação.

A tensão normal transversal  $\sigma_z$  é considerada nula na teoria de primeira ordem. Com o processo de integração é possível obter uma melhor aproximação, conforme Fig. 4. O comportamento da tensão  $\sigma_z$  encontrado não satisfaz as condições de contorno na superfície superior, a qual é corrigida no pós processamento, apresentando um comportamento excelente em relação ao resultado no ANSYS.

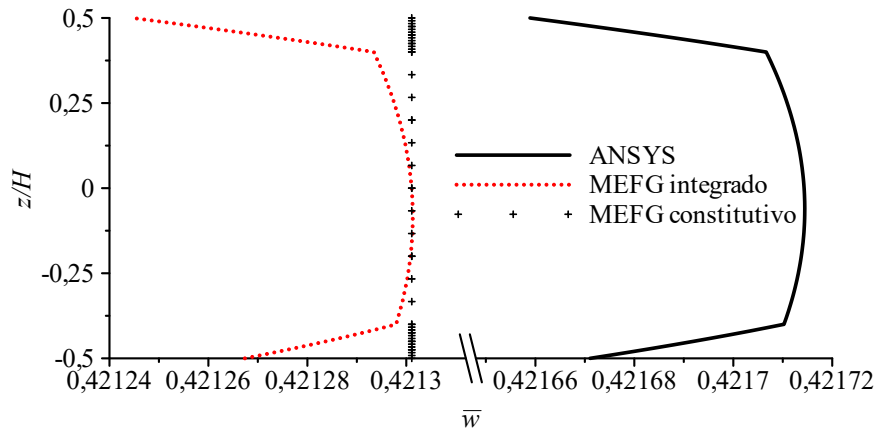


Figura 3. Deflexão transversal  $\bar{w} = w(a/2; b/2; z) / H$  obtida pelo ANSYS e pelo MEFG constitutivo e pelo processo de integração, através da espessura com M16,  $p = 4$  para uma placa sanduíche com aspecto  $a/H = 50$ .

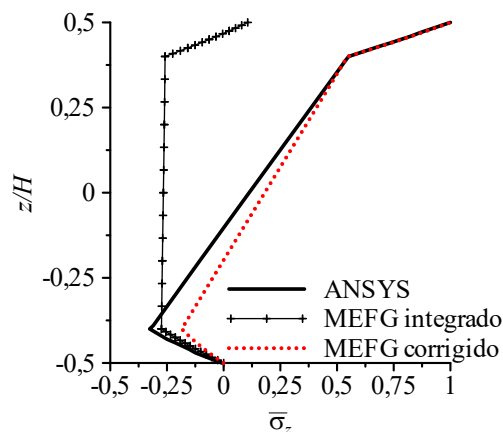


Figura 4. Tensão normal transversal  $\bar{\sigma}_z = \sigma_z(a/2; b/2; z) / q_0$  obtida pelo ANSYS e pelo MEFG pelo processo de integração e corrigida, através da espessura com M16,  $p = 4$  para uma placa sanduíche com aspecto  $a/H = 50$ .

A Fig. 5 mostra o efeito dos termos não lineares de von Kármán nas equações de equilíbrio, no processo de integração, para uma carga  $q_0 = 0,06 \text{ MPa}$ . Pode-se perceber que a curva calculada sem considerar os termos não lineares, tem um comportamento fisicamente incorreto. Caso fosse aplicada a correção nesta curva, ainda assim o resultado não seria adequado.

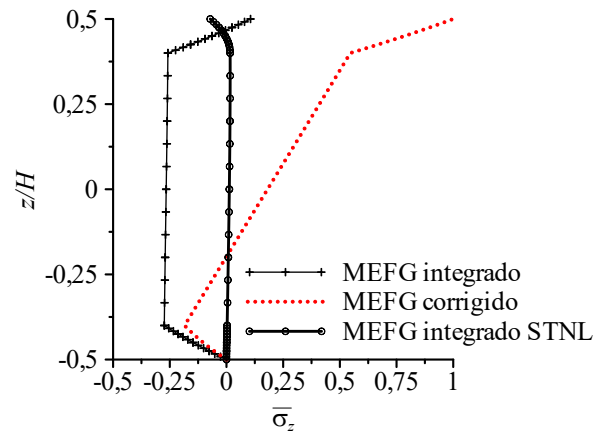


Figura 5. Tensão normal transversal  $\bar{\sigma}_z = \sigma_z(a/2; b/2; z) / q_0$  obtida pelo MEFG, processo de integração e correção, através da espessura com M16,  $p = 4$  para uma placa sanduíche com aspecto  $a/H = 5$  e resultados obtidos sem os termos não lineares (STNL).

## 7 Conclusões

Foi apresentado um método computacional simples, baseado no pós-processamento dos resultados de tensões transversais utilizando resultados de MEFG baseados em no modelo de Reissner – Mindlin. O processo básico consiste em integrar as equações locais de equilíbrio, da maneira usual, porém incluindo os termos não lineares de von Kármán. Em seguida é apresentada a uma segunda etapa de processamento, em que se introduzem procedimentos para a correção das tensões. O procedimento computacional proposto mostrou-se capaz, em experimentos numéricos, de melhorar a precisão das tensões transversais obtidas pelos processos usuais de integração transversal.

## Referências

- [1] N. J. Pagano. Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. *Journal of Composite Materials*, vol. 3, n. 3, pp. 398-411, 1969.
- [2] N. J. Pagano. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *Journal of Composite Materials*, vol. 4, n. 1, pp. 20-34, 1970.
- [3] C. W. Pryor and R. M. Barker. A finite-element analysis including transverse shear effects for applications to laminated plates. *AIAA Journal*, vol. 9, n. 5, pp. 912-917, 1971.
- [4] J. Whitney. The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. *Journal of Composites Materials*, vol. 3, n. 3, pp. 534-547, 1969.
- [5] R. A. Chaudhuri. An equilibrium method for prediction of transverse shear stresses in a thick laminated plate. *Composite Structures*, vol. 23, n. 2, pp. 139-146, 1986.
- [6] J. J. Engblom and O. O. Ochoa. Finite element formulation including interlaminar stress calculations. *Computers and Structures*, vol. 23, n. 2, pp. 241-249, 1986.
- [7] R. A. Chaudhuri and P. Seide. An approximate method for prediction of transverse shear stresses in a laminated shell. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 23, n. 8, pp. 1145-1161, 1987.
- [8] A. K. Noor, W. S. Burton and J. M. Peters. Predictor-corrector procedures for stress and free vibration analyses of multilayered composite plates and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 82, n. 1-3, pp. 341-363, 1990.
- [9] C. Y. CHIA. Nonlinear analysis of plates. McGraw-Hill, 1980.
- [10] A. Libai and J. Simmonds. The nonlinear theory of elastic shells. Elsevier, 1988.,
- [11] E. J. Barbero and J. N. Reddy. Nonlinear analysis of composite laminates using a generalized laminated plate theory. *AIAA Journal*, vol. 28, n. 11, pp. 1987-1994, 1990.

- [12] S. P. Engelstad, J. N. Reddy and N. F. Knight. Postbuckling response and failure prediction of graphite-epoxy plates loaded un compression. *AIAA Journal*, vol. 30, n. 8, pp. 2106-2113, 1992.
- [13] C. Byun and R. K. Kapania. Prediction of interlaminar stresses in laminated plates using global orthogonal interpolation polynomials. *AIAA Journal*, vol. 30, n. 11, pp. 2740-2749, 1992.
- [14] B. C. Park, J. W. Park and Y. H. Kim. Stress recovery in laminated composite and sandwich panels undergoing finite rotation. *Composite Structures*, vol. 59, n. 2, pp. 227-235, 2003.
- [15] K. Lee and S. W. Lee. A postprocessing approach to determine transverse stresses in geometrically nonlinear composite and sandwich structures. *Journal of Composite Materials*, vol. 37, n. 24, pp. 2207-2224, 2003.
- [16] C. S. Barcellos, P. T. R. Mendonça, C. A. Duarte. A  $C^k$  continuous generalized finite element formulation applied to laminated Kirchhoff plate model. *Computational Mechanics*, vol. 44, n. 3, pp. 377-393, 2009.
- [17] P. T. R. Mendonça. *Materiais Compostos e Estruturas-sanduiche – Projeto e Análise*. Orsa Maggiore, 2019.
- [18] R. L. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The finite element method: solid and fluid mechanics dynamics and non-linearity*. McGraw-Hill, 1991.