

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA NO CONTEXTO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

THE NUMERICAL INTEGRATION IN GFEM ANALYSIS

Bruna C. Campos

Felício B. Barros

Samuel S. Penna

bu_caroline@hotmail.com

feliciobbarros@gmail.com

spenna@dees.ufmg.br

Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Antônio Carlos, 6627, Escola de Engenharia, Bloco 1, 4º andar, sala 4215, Pampulha - CEP 31270-901 - Belo Horizonte/MG, Brasil

Abstract. Structural problems involving variables with a quick change in a small scale of a certain domain requires a numerical approach which considers discontinuities, singularities and high gradients. Fracture Mechanics problems are an example of this kind, considering its process of evaluation of crack nucleation and propagation. Using the conventional Finite Element Method (FEM) for modelling this type of situation may be time spending and not achieve great precision due to remeshing and inexact numerical integration. An alternative approach is the Generalized Finite Element Method (GFEM), which associates FEM with enrichment functions in local regions of the problem. In this paper it is evaluated some strategies for GFEM numerical integration, allowing the representation of non-polynomial enrichment functions – frequently seen in GFEM for crack modelling – to be more precise with less processing time when compared to those results obtained with conventional Gauss quadrature rule. The computational analysis is inserted on the open source software INSANE (Interactive Structural Analysis Environment), developed by the Structural Engineering Department of Federal University of Minas Gerais.

Keywords: Generalized Finite Element Method, Fracture mechanics, Numerical integration

Resumo. Problemas estruturais envolvendo variáveis com rápida mudança em uma pequena escala de um certo domínio exigem uma abordagem numérica que considere descontinuidades, singularidades e gradientes elevados. Problemas da Mecânica da Fratura são exemplos desse tipo, considerando seu processo de avaliação de nucleação e propagação de trincas. A utilização do Método dos Elementos Finitos (MEF) convencional para modelagem desse tipo de situação pode ser dispendiosa e não alcançar boa precisão devido à onerosa geração de malha e à integração numérica inexata. Uma abordagem alternativa baseia-se no Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), que associa o MEF com funções de enriquecimento em regiões locais do problema. No presente trabalho são estudadas algumas estratégias para a integração numérica no contexto do MEFG, permitindo que a utilização de funções de enriquecimento não polinomiais – frequentemente vistas na modelagem de trincas – seja mais precisa e apresente menor tempo de processamento quando comparada aos resultados obtidos pela quadratura de Gauss convencional. A análise computacional realizada é ambientada no software livre INSANE (*INte-ractive Structural ANalysis Environment*), desenvolvido pelo Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos Generalizados, Mecânica da fratura, Integração numérica

1 Introdução

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é amplamente utilizado para discretização de modelos estruturais e consequente obtenção de resultados com ótima precisão. Ao se tratar de problemas da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE), entretanto, o emprego dessa abordagem não tem boa adequação, visto ser necessária a representação de singularidades, descontinuidades e gradientes elevados em regiões locais do domínio. Torna-se oneroso o processo de geração de malha e perde-se precisão na integração da forma discreta do problema de valor de contorno pelas quadraturas convencionais.

Nesse contexto, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) [1] é uma abordagem alternativa válida, onde as funções de forma tradicionais do MEF são tomadas como uma Partição da Unidade (PU) e associadas a funções de aproximação local que podem, dentre outras finalidades, representar o comportamento assintótico de trincas. Segundo Barros [2] o MEFG pode ser entendido como uma formulação não convencional do MEF, aproximando-se da abordagem dos métodos sem malha, porém contornando alguns problemas de integração numérica existentes em tais formulações [3].

Erros de integração numérica são inerentes ao MEFG quando a matriz de rigidez é avaliada da mesma maneira que no MEF, ou seja, pela regra da quadratura de Gauss. Essa estratégia requer que, afim de garantir exatidão dos resultados, o integrando envolvido nos cálculos seja necessariamente polinomial. Entretanto, as funções descontínuas e singulares, envolvidas na representação de trincas, não condizem com tal pressuposto. A utilização da quadratura de Gauss para solução de integrandos não polinomiais, além de ser menos precisa quando comparada a integrandos polinomiais, tem baixa taxa de convergência do erro [4].

Faz-se necessário, portanto, a busca de estratégias de integração alternativas que contornem o problema advindo da integração numérica. Nesse intuito, são encontradas na literatura diversas técnicas com suas respectivas vantagens e desvantagens de implementação computacional e precisão de resultados. Dentre estas, são destacadas aqui a estratégia de subdivisão do elemento que contém uma descontinuidade, aliada ao mapeamento dos pontos de integração nas situações em que a ponta da trinca está contida no interior do elemento.

Tais procedimentos se baseiam na quadratura de Gauss convencional, podendo ser aproveitado todo o arcabouço teórico e computacional do MEF. Apresentam ainda o importante fator de não adicionarem graus de liberdade ao problema, tendo assim menor impacto sob o tempo de processamento do modelo. Com a finalidade de se estudar o emprego de tais estratégias de integração e comparar seu desempenho com as técnicas tradicionais, o presente trabalho apresenta a implementação computacional realizada para tal no contexto da plataforma INSANE.

O sistema computacional INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*) é um projeto de software livre, implementado em linguagem JAVA segundo o paradigma da Programação Orientada a Objetos e desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. Dispõe de diversos recursos de análise estrutural, configurando um ambiente computacional segmentado, amigável a mudanças e escalável em complexidade [5]. Dessa forma, a partir do código computacional implementado para estudo das técnicas de integração numérica não convencionais, foram simuladas diversas situações com o emprego das mesmas e assim constatando sua viabilidade e provisão de melhores resultados associados a menores tempos de processamento.

Como forma de apresentar o trabalho realizado, este artigo é dividido da seguinte maneira: na seção 2 é feita uma revisão teórica sobre os principais aspectos do MEFG, da representação de trincas nesse contexto e da integração numérica a ele associada. Na seção 3 são descritas as implementações computacionais realizadas para possibilitar as simulações numéricas. Posteriormente, na seção 4 as análises feitas são apresentadas e discutidas, e por fim na seção 5 são comentadas as principais conclusões acerca desse trabalho.

2 Fundamentação teórica

2.1 Método dos Elementos Finitos Generalizados

Segundo Duarte et al. [6], o MEFG foi proposto de forma independente por:

- I. Babuška e colaboradores sob o nome de “Método dos Elementos Finitos Especiais” [7] e “Método da Partição da Unidade” [8];
- C. A. Duarte e J. T. Oden sob o nome de “Método das Nuvens-*hp*”, uma formulação híbrida do MEF [9–11].

O MEFG, segundo Alves [12], ao empregar as funções de forma do MEF como um conjunto Partição da Unidade (PU), pode ser interpretado como uma variação do MEF convencional. A PU é associada a funções de aproximação local quaisquer, formando assim um novo espaço solução [2]. A escolha das funções convencionais de MEF para representar a PU é vantajosa para a implementação e utilização do MEFG, por sua simplicidade e pelo fato de já estarem disponíveis nos códigos de elementos finitos, ao contrário do que ocorre em abordagens análogas dos métodos sem malha, em que as funções são construídas durante a solução do problema. Além disso, garante-se estabilidade ao problema analisado com a verificação direta das condições de contorno essenciais, o que não ocorre em grande parte dos métodos sem malha, e.g., o Método das Nuvens-*hp* [12].

Paralelamente ao MEFG, outro método derivado do MEF merece destaque: o Método dos Elementos Finitos Estendido (*eXtended Finite Element Method*). Esse método, proposto por Belytschko e Black [13], emprega, a exemplo do MEFG, as funções convencionais de MEF como PU aprimorando-as via estratégia de enriquecimento explícito. O que difere a abordagem entre ambas as formulações é o fato de que no Estendido somente partes do domínio são enriquecidas. Em Duarte et al. [6], porém, o MEFG já é citado como estratégia de enriquecimento de apenas alguns nós do domínio. Assim, atualmente tais métodos podem ser considerados equivalentes [14], o que foi assumido no presente trabalho.

Na estratégia do MEFG, representada na Fig. 1, é considerado um tipo de enriquecimento extrínseco, ou seja, são adicionadas funções de forma especiais ao espaço de aproximação polinomial, e consequentemente aumenta-se a quantidade de incógnitas do problema [14]. Na Fig. 1(a) observa-se a utilização do conceito de nuvens, herdado do Método das Nuvens-*hp*, onde a nuvem ω_j indica o conjunto de elementos que compartilham o nó \mathbf{x}_j .

A Partição da Unidade é construída com as funções de Lagrange lineares (para o caso bidimensional) advindas do MEF, dadas por $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$ em um dado nó \mathbf{x}_j do domínio representado. Conforme a Fig. 1(b), o conjunto das funções que formam a PU é tal que:

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) = 1. \quad (1)$$

As funções enriquecedoras ou *funções de aproximação local* são dadas pelo conjunto I_j , formado por q_j funções linearmente independentes. Cada função q_j é definida para um nó \mathbf{x}_j com suporte na nuvem ω_j [12]:

$$I_j \stackrel{def}{=} \{L_{j1}(\mathbf{x}), L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq}(\mathbf{x})\} = \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j}, \quad (2)$$

com $L_{j1}(\mathbf{x}) = 1$.

É importante destacar que as funções $L_{ji}(\mathbf{x})$ indicadas na Fig. 1(c) podem ser, por exemplo, polinomiais, com singularidades, descontinuidades ou mesmo advindas de um conhecimento *a priori* do problema. As funções de forma do MEFG são, então, formadas pela associação da PU com as funções enriquecedoras conforme a Eq. (3):

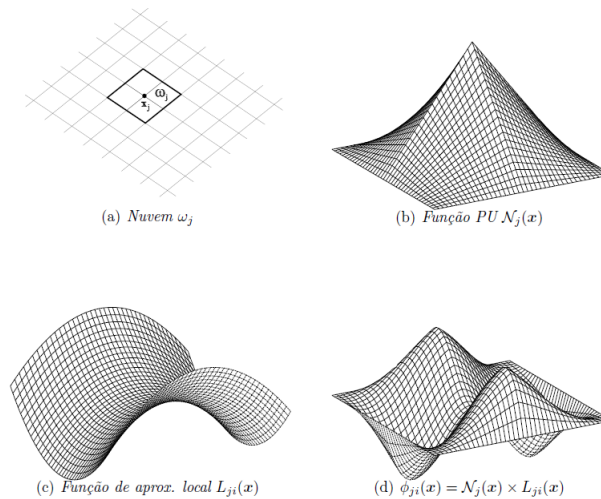


Figura 1. Estratégia de enriquecimento da nuvem ω_j [12].

$$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^q = \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \times \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q, \quad (3)$$

sem somatório em j .

A aproximação dos deslocamentos $\tilde{u}(\mathbf{x})$ no MEFG é, portanto [2]:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N \mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=2}^q L_{ji}(\mathbf{x}) b_{ji} \right\}, \quad (4)$$

onde u_j e b_{ji} são parâmetros nodais associados a cada componente $\mathcal{N}_j(\mathbf{x})$ do MEF e $\mathcal{N}_j(\mathbf{x}) \cdot L_{ji}(\mathbf{x})$ do MEFG, respectivamente.

Quando as funções de aproximação local escolhidas são polinômios, pode-se obter um sistema de equações linearmente dependentes ao associá-las com a PU, que também é da forma polinomial. A matriz de rigidez calculada a partir desse sistema é positiva semi-definida, mesmo após a eliminação dos movimentos de corpo rígido [2]. Esse mau condicionamento gerado na rigidez pode, todavia, ser resolvido através de métodos numéricos como o proposto por Duarte et al. [6].

Mesmo com a possibilidade de dependências lineares e consequente obtenção de matrizes de rigidez singulares, a estratégia do MEFG ainda se mostra vantajosa, uma vez que pode-se tratar a aproximação de forma específica a cada situação, viabilizando a modelagem de problemas nos quais o campo de tensões apresenta singularidades [2].

Segundo Fries e Belytschko [14] o uso de funções de enriquecimento especiais na aproximação do MEFG contendo saltos, quinas ou altos gradientes têm consequências importantes na integração numérica da matriz de rigidez. A exatidão da quadratura de Gauss como método de solução não é mais garantida, e torna-se necessário a utilização de procedimentos alternativos. Na seção 2.3 são descritas algumas dessas estratégias, dentre as quais são escolhidas aquelas empregadas na implementação computacional comentada na seção 3.

2.2 Representação de trincas no MEFG

Na simulação de problemas da Mecânica da Fratura, a representação da fissura e sua propagação pode ser feita de duas maneiras, denominadas *geométrica* e *não geométrica*. Nos métodos de representação *geométrica* a fissura depende do tamanho dos elementos, enquanto seu caminho de propagação

limita-se à discretização da malha. Já a representação *não geométrica* é dividida nos casos em que a fissuração é representada no modelo constitutivo ou através de campos cinemáticos. Nesse último, as descontinuidades são incorporadas no campo de deslocamentos [15].

No caso do MEEG, o processo de fissuração é representado de forma não geométrica, sendo embutido nas funções de aproximação local dos elementos. Assim, os elementos atravessados pela trinca precisam ser enriquecidos com funções que indicam fortes descontinuidades (saltos). Um exemplo de função descontínua usada nesse tipo de situação é a função de Heaviside [14]:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ 1, & \text{para } x > 0 \end{cases}, \quad (5)$$

onde x é a posição em relação à descontinuidade (localizada em $x = 0$).

Além da descontinuidade apresentada em modelos de trincas, no caso particular da Mecânica da Fratura Linear Elástica, surge uma singularidade na região da ponta onde o campo de tensões tende a infinito, indicando um alto gradiente local. Para representação desse fenômeno podem ser utilizadas funções de enriquecimento a exemplo da proposição de Szabó e Babuška [16], indicando o primeiro termo da série que reproduz a solução exata dos deslocamentos na vizinhança de uma singularidade. As Eqs. 6 e 7 se aplicam às solicitações em modo I de abertura e as Eqs. 8 e 9 referem-se ao modo II.

$$u_{xi}^{(1)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda_i^{(1)}} [(\kappa - Q_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)} + 1)) \cos \lambda_i^{(1)} \theta - \lambda_i^{(1)} \cos(\lambda_i^{(1)} - 2)\theta], \quad (6)$$

$$u_{yi}^{(1)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda_i^{(1)}} [(\kappa + Q_i^{(1)}(\lambda_i^{(1)} + 1)) \sin \lambda_i^{(1)} \theta + \lambda_i^{(1)} \sin(\lambda_i^{(1)} - 2)\theta], \quad (7)$$

$$u_{xi}^{(2)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda_i^{(2)}} [(\kappa - Q_i^{(2)}(\lambda_i^{(2)} + 1)) \sin \lambda_i^{(2)} \theta - \lambda_i^{(2)} \sin(\lambda_i^{(2)} - 2)\theta], \quad (8)$$

$$u_{yi}^{(2)} = \frac{1}{2G} r^{\lambda_i^{(2)}} [(\kappa + Q_i^{(2)}(\lambda_i^{(2)} + 1)) \cos \lambda_i^{(2)} \theta + \lambda_i^{(2)} \cos(\lambda_i^{(2)} - 2)\theta], \quad (9)$$

onde:

- G é o Módulo de Elasticidade Transversal;
- $\kappa = (3 - 4\nu)$ para Estado Plano de Deformações e $\frac{(3-\nu)}{1+\nu}$ para Estado Plano de Tensões, sendo ν o coeficiente de Poisson;
- λ e Q são constantes determinadas para que a solução satisfaça ao equilíbrio e condições de contorno do problema (na representação de trincas, $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 0,5$, $Q^{(1)} = 0,333$ e $Q^{(2)} = -1,0$);
- r e θ são coordenadas polares com origem na ponta da trinca.

2.3 Integração numérica

Sabe-se que a integração numérica da forma fraca do problema de valor de contorno pela quadratura de Gauss é exata quando o integrando em questão é da forma polinomial. Se são acrescentadas ao problema funções enriquecedoras descontínuas e/ou singulares, a integração passa a ser apenas aproximada. Nos problemas citados da Mecânica da Fratura no contexto do MEEG, portanto, faz-se útil a procura por estratégias que permitam a eliminação do caráter não polinomial inerente a essa modelagem. Constam na literatura diferentes abordagens para tal problema, sendo relacionadas ao tipo de enriquecimento existente, seja ele descontínuo ou singular.

Enriquecimentos descontínuos. O enriquecimento descontínuo da função de Heaviside tem características semelhantes a uma função constante e, ao se utilizar a quadratura de Gauss para a integração, há

risco de aparecerem modos espúrios de energia. Uma alternativa para se levar em conta a descontinuidade é a subdivisão de elementos segundo a posição da interface, realizando posteriormente a integração pela regra de quadratura em cada subelemento. No caso bidimensional as subdivisões são triangulares, conforme visto na Fig. 2 e descrito por Moës et al. [17].

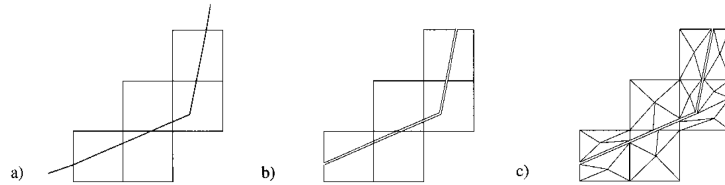


Figura 2. Geração de subpolígonos para quadratura da forma fraca [17].

A modelagem de problemas tridimensionais consistindo na decomposição dos elementos em tetraedros é abordada por Sukumar et al. [18]. O processo de subdivisão em ambas dimensões não gera graus de liberdade adicionais e conta com alta precisão dos resultados, porém envolve maior esforço computacional devido ao aumento do número de pontos de integração. Quando comparada à quantidade de pontos que resultam numa solução estável pela quadratura de Gauss, entretanto, a decomposição de elementos requer menores quantidades para se obter melhores precisões.

A subdivisão de elementos em células triangulares ou quadrilaterais permite que seja empregada a quadratura de Gauss, com a ressalva de que a integração é exata até uma certa ordem do polinômio no elemento de referência (mapeado). Essa propriedade, porém, só é mantida quando os elementos são decompostos em subelementos triangulares. Para o caso de células quadrilaterais é requerido um mapeamento isoparamétrico, acarretando perda da propriedade de integração exata no elemento de referência [14].

Outra opção advinda da decomposição é a integração em domínios poligonais, considerando para tal os dois subdomínios criados a partir das interseções da trinca com o elemento. Assim, não há necessidade de outra repartição e faz-se uso de técnicas de mapeamento alternativas, onde um exemplo é a proposta de Natarajan et al. [19] da utilização do mapeamento conforme de Schwarz-Christoffel. Através dessa técnica, o domínio é mapeado em um disco unitário, e os pontos de integração podem ser obtidos, por exemplo, pela regra do ponto médio ou pela regra de Gauss-Chebyshev. As análises numéricas presentes no trabalho citado mostram que os resultados obtidos pelo mapeamento de Schwarz-Christoffel são bastante similares aos obtidos pela decomposição em subelementos triangulares. Como desvantagem, ressalta-se que esse método limita-se a domínios bidimensionais.

A análise da matriz de rigidez por meio da decomposição de elementos pode gerar erros relevantes, dependendo da técnica de quadratura utilizada. Como opção à decomposição de elementos foi então proposto o uso de polinômios equivalentes. Nessa estratégia, a função descontínua de Heaviside é substituída por um polinômio equivalente, escolhido de tal maneira que o cálculo da matriz de rigidez através da regra de quadratura de Gauss seja exato. Uma desvantagem do emprego desse método se deve ao fato do mesmo não ser aplicável em elementos onde há mudança de direção da trinca em seu interior.

Um exemplo de aproximação polinomial foi proposto por Ventura e Benvenuti [20]. Nesse trabalho, deduz-se uma função de Heaviside regularizada por um parâmetro ρ , por meio do qual pode-se retornar à função descontínua original fazendo-o tender a infinito. As desvantagens do método são a duplicação do grau do integrando e a ausência de um limite formal para o parâmetro de regularização. Além disso, a formulação desenvolvida é atrelada à representação da trinca pelo Método de *Level-Set* [21].

Outra proposição foi feita por Iarve [22] e substitui a função de Heaviside por uma função de forma de alta ordem, construída com uma Partição da Unidade resultante de funções *B-spline*. Tem a desvantagem da necessidade de construção de novas funções de forma, distintas daquelas convencionais provenientes do MEF; todavia, a aproximação mostra erros pequenos, por exemplo, na obtenção do fator de intensidade de tensão em problemas da MFLE.

Enriquecimentos singulares. Similar ao processo de decomposição dos elementos associados a enri-

quecimentos descontínuos, a subdivisão pode ser feita em elementos que contêm a ponta da trinca, de maneira que cada subelemento tenha um nó na singularidade. As células triangulares são então integradas com a regra de quadratura de Gauss convencional. Essa estratégia é utilizada por Moës et al. [17] e, conforme comparações numéricas apresentadas por Ventura et al. [23], tem precisão menor quando comparada às estratégias de mapeamento dos pontos de integração e integrais de contorno.

O processo de mapeamento dos pontos de integração mapeia a subdivisão triangular (real) em uma célula quadrangular (referência), onde as funções singulares são regularizadas e os pontos de integração, recalculados. Os novos pontos de integração se concentram nas proximidades da singularidade. O erro da integração é reduzido consideravelmente quando comparado à subdivisão de elementos sem mapeamento e o procedimento não aumenta o esforço computacional envolvido, visto que apenas são utilizados novos pontos de integração com seus respectivos pesos.

Constam na literatura variadas alternativas de mapeamentos. Béchet et al. [4] propuseram um mapeamento polar que transforma funções singulares em regulares, recuperando a exatidão da técnica de integração pela quadratura de Gauss. Por meio de exemplos numéricos os autores afirmam que a convergência do erro relativo é mais rápida utilizando a técnica de mapeamento quando comparada à quadratura convencional, considerando o mesmo número de pontos de Gauss. O mapeamento, todavia, não é aplicável diretamente para casos tridimensionais. Laborde et al. [24] apresentam um mapeamento denominado “quase polar”, também vinculando-o a melhores taxas de convergência do erro quando contraposto com quadraturas convencionais em exemplos bidimensionais.

Park et al. [25] estendem a estratégia de mapeamento proposta por Nagarajan e Mukherjee [26] envolvendo singularidades do tipo $1/r$ para casos tridimensionais. Exemplos numéricos indicam que as taxas de convergência do erro obtidas com o mapeamento proposto são iguais ou melhores que aquelas obtidas com integrações convencionais, variando com o formato do integrando singular. Analogamente aos métodos de mapeamento polar, é observado no trabalho de Cano e Moreno [27] um mapeamento baseado na transformação de Duffy [28], o qual também elimina a singularidade do integrando. Tal técnica tem melhor taxa de convergência do erro relativo de integração, e tem bom desempenho mesmo quando as células triangulares apresentam algum ângulo interno significativamente pequeno – o que não ocorre em algumas estratégias de integração presentes na literatura. Entretanto, apresenta maior custo computacional devido à complexa formulação inerente ao processo.

A estratégia de integrais de contorno transforma a integral no domínio do elemento que contém a singularidade em uma integral de contorno. Proposto por Ventura et al. [23], esse processo também pode ser aplicado em domínios com funções descontínuas. Quando comparado à técnica de mapeamento dos pontos de integração, a integral de contorno apresenta maior precisão com quantidades menores de pontos, assim como indica melhor taxa de convergência do erro. É, entretanto, aplicável apenas em elementos nos quais todos os nós são enriquecidos e para os quais todos os graus de liberdade enriquecidos, em todos os nós, são iguais. Na Fig. 3 observa-se a comparação entre as três estratégias de integração numérica citadas para elementos que contêm a ponta da trinca.

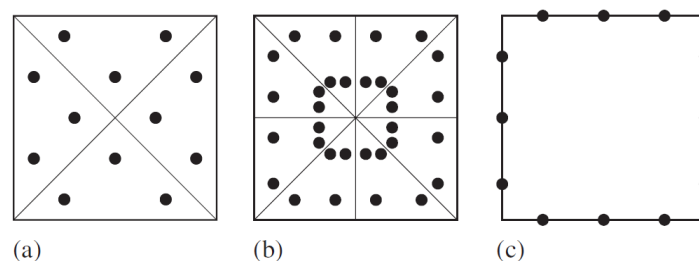


Figura 3. Comparação dos métodos de integração numérica envolvendo funções singulares. (a) Subdivisão dos elementos a partir da ponta da trinca e uso da quadratura de Gauss. (b) Mapeamento dos pontos de integração. (c) Integral de contorno [23].

Outra estratégia aplicada a enriquecimentos singulares é a integração adaptativa, onde é desenvolvido um algoritmo baseado na subdivisão recursiva do elemento em subcélulas não conformes até que

seja atingida a tolerância em um erro pré-determinado. No trabalho de Strouboulis et al. [1] a integração adaptativa empregada foi o algoritmo DECUHR, onde a singularidade é assumida em um vértice compartilhado pelas subdivisões não uniformes. A integração adaptativa também foi utilizada em Strouboulis et al. [3], todavia de forma a atender somente casos de subdivisões quadrilaterais. Uma desvantagem do método é que pode se consumir bastante tempo no controle adaptativo do erro de integração [14].

3 Implementação computacional

Dentre as estratégias de integração numérica descritas, foram adotadas para implementação computacional a estratégia de subdivisão de elementos – para enriquecimentos descontínuos – e a estratégia de subdivisão de elementos e mapeamento dos pontos de integração – para enriquecimentos singulares. A escolha se justifica devido à vasta utilização de tais procedimentos em trabalhos recentes, além do fato de que parte-se de um mesmo ponto para ambos os casos de funções de aproximação local, ou seja, a subdivisão do elemento em células triangulares. Além disso, essas estratégias apresentam a vantagem de se basearem nas funções de forma e quadratura de Gauss já empregadas em MEF.

Para validação dos procedimentos de integração numérica descritos, realizou-se uma implementação computacional no âmbito do sistema INSANE, onde pôde ser aproveitado todo o código já existente para modelos via MEF e MEEG. Em Fonseca [5] tem-se uma descrição detalhada do software, e em Alves [12] é possível entender de maneira mais minuciosa a implementação do MEEG. As simulações aqui apresentadas foram viabilizadas devido ao acréscimo de alguns métodos e pequenas modificações de outros, partindo do desenvolvimento de Oliveira [29].

Passou-se a solicitar ao usuário via arquivo de entrada as seguintes informações: tipo de estratégia para elementos com descontinuidade e com singularidade e o número de pontos de integração a ser utilizado em cada caso. Em termos de código implementado, ao se inicializar um elemento é verificado se o mesmo contém uma descontinuidade/singularidade e, em caso afirmativo, suas degenerações são reinicializadas.

O termo degeneração faz referência a um ponto material pertencente a determinado elemento e contém características do mesmo, a saber: variáveis constitutivas, coordenadas e pesos para integração numérica, entre outras. No presente contexto, as degenerações existentes são removidas para se adicionarem novas, posicionadas segundo as células de integração geradas pelas estratégias implementadas.

Se a descontinuidade atravessa todo o elemento, a redefinição dos pontos de integração é feita via *subdivisão de elementos*, onde cada um dos dois subdomínios gerado pela trinca é dividido em duas células de integração triangulares. Já quando a ponta da trinca está contida dentro do elemento, é acionado o método de *subdivisão de elementos e mapeamento dos pontos de integração*. Ocorre a divisão do domínio em 6 células triangulares, de maneira que cada uma contenha um nó na singularidade, e são acessadas as quadraturas de Gauss com pesos e coordenadas modificados. Dessa maneira, os pontos de integração são posicionados próximos à ponta da trinca com o intuito de representar mais precisamente o campo de tensões singular existente nessa região.

A Fig. 4 indica a subdivisão feita. Os nós em laranja representam enriquecimento com função singular (ou função de trinca) e, os nós em verde, enriquecimento com função descontínua (ou de Heaviside). As linhas tracejadas delimitam as células criadas. No caso de o usuário não informar a quantidade desejada de pontos de integração, o programa tem como *default* a utilização de 3 pontos para cada célula de integração descontínua e 6x6 pontos para cada célula de integração singular.

O mapeamento dos pontos de integração é explanado por Park et al. [25] e brevemente descrito aqui. Inicialmente proposto por Nagarajan e Mukherjee [26], tem a finalidade de reduzir os erros advindos da integração numérica gerados nas células que contêm o ponto da singularidade. O mapeamento é dado por:

$$T_M : (\bar{\rho}, \bar{\theta}) \mapsto (\bar{r}, \bar{s}), \quad (10)$$

onde $\bar{r} = \bar{\rho} \cos^2 \bar{\theta}$ e $\bar{s} = \bar{\rho} \sin^2 \bar{\theta}$.

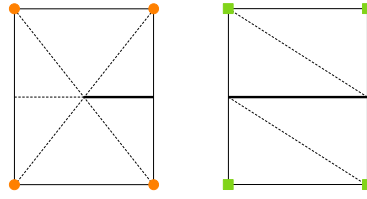


Figura 4. Células de integração para cada tipo de enriquecimento.

Para melhor entendimento a Fig. 5 mostra o mapeamento inverso T_M^{-1} , o qual transforma um triângulo em um quadrilátero. Em termos computacionais, o processo de integração numérica passa pelas seguintes mudanças: as coordenadas cartesianas são transformadas em coordenadas paramétricas, acrescentando o Jacobiano J_t à equação. Posteriormente é feita a transformação T_M^{-1} , acrescentando o Jacobiano $J_M = \bar{\rho} \sin(2\bar{\theta})$. Por fim, o integrando é mapeado nas coordenadas naturais (ξ, η) , adicionando o Jacobiano constante $J_q = \frac{\pi}{8}$. A expressão da integração é, portanto:

$$\begin{aligned} I &= \int_A f(x, y) dA = \int_A \bar{f}(\bar{r}, \bar{s}) J_t d\bar{r} d\bar{s} \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \hat{f}(\bar{\rho}, \bar{\theta}) J_t J_M d\bar{\rho} d\bar{\theta} = \int_1^1 \int_1^1 \tilde{f}(\xi, \eta) J_t \tilde{J}_M(\xi, \eta) J_q d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (11)$$

A aproximação numérica é:

$$I \approx \sum_{i=1}^{n_{q1}} \sum_{j=1}^{n_{q1}} \tilde{f}(\xi_i, \eta_j) J_t \tilde{J}_M(\xi_i, \eta_j) J_q W_i W_j, \quad (12)$$

onde n_{q1} é o número de pontos de Gauss em uma direção e W_i, W_j são os respectivos pesos.

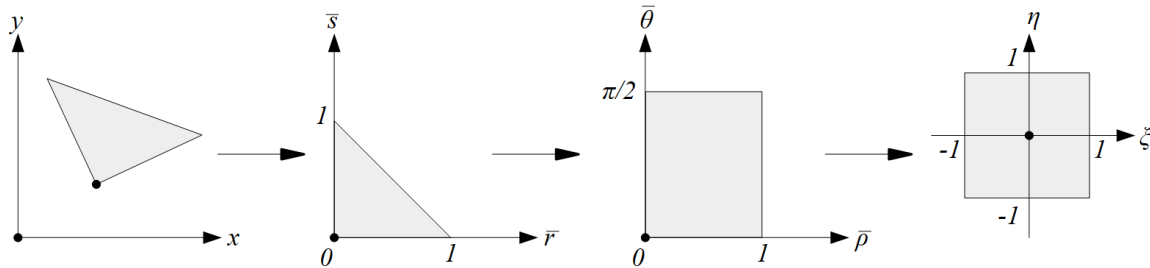


Figura 5. Método de mapeamento dos pontos de integração.

Para fins de implementação computacional, a Eq. (12) pode ser escrita da forma:

$$\sum_{i=1}^{n_{q1}} \sum_{j=1}^{n_{q1}} \tilde{f}(\xi_i, \eta_j) J_t \tilde{J}_M(\xi_i, \eta_j) J_q W_i W_j = \sum_{i=i}^{n_q} \bar{f}(\bar{r}_i, \bar{s}_i) J_t \tilde{W}_i, \quad (13)$$

onde n_q é o número de pontos de integração para o método de mapeamento e $\tilde{W}_i = \tilde{J}_M(\xi_i, \eta_j) J_q W_i W_j$.

Os pesos modificados \tilde{W}_i e as coordenadas (\bar{r}_i, \bar{s}_i) que satisfazem $\tilde{f}(\xi_i, \eta_j) = \bar{f}(\bar{r}_i, \bar{s}_i)$ foram implementados segundo a lógica apresentada em Park et al. [25]. Assim, quando torna-se necessária

a redefinição dos pontos de integração em um elemento, o programa acessa esses dados, não sendo inicializada uma nova transformação e, conseqüentemente, diminuindo o tempo de processamento.

É importante ressaltar que, após o mapeamento, a soma dos pesos modificados não é exatamente 1 – valor adotado via escalonamento dos pesos para garantir que a regra de quadratura integre exatamente ao menos uma função constante – embora convirja para tal. Assim, é necessária a utilização de uma quantidade maior de pontos de integração em cada célula a fim de se obter melhores resultados.

Após estudos apresentados em Park et al. [25], os autores afirmam que o método de mapeamento fornece uma convergência mais monotônica se comparada à integração convencional. Além disso, para mais pontos de integração o mapeamento resulta em uma precisão significativamente maior.

4 Resultados e discussão

4.1 Geometria, carregamento, dados do material e condições de contorno

Para a avaliação do desempenho das estratégias de integração numérica utilizadas foram escolhidos 5 exemplos, sendo modificados o tamanho da trinca e os tipos de enriquecimento utilizados. Todos os exemplos se referem à uma chapa de espessura unitária com carregamento aplicado em sua extremidade superior. Os deslocamentos em x e y são restritos no nó inferior esquerdo e apenas o deslocamento em y é restrito nos demais nós inferiores. As características do material adotadas são, em unidades consistentes, módulo de elasticidade $E = 1,0$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. As análises foram feitas considerando estado plano de tensões (EPT) exceto para o *Exemplo 4*, onde foi admitido estado plano de deformações (EPD), condizendo com o modelo apresentado em Fonseca [30]. As dimensões da chapa estão indicadas, em unidades consistentes, na Fig. 6, assim como a malha adotada.

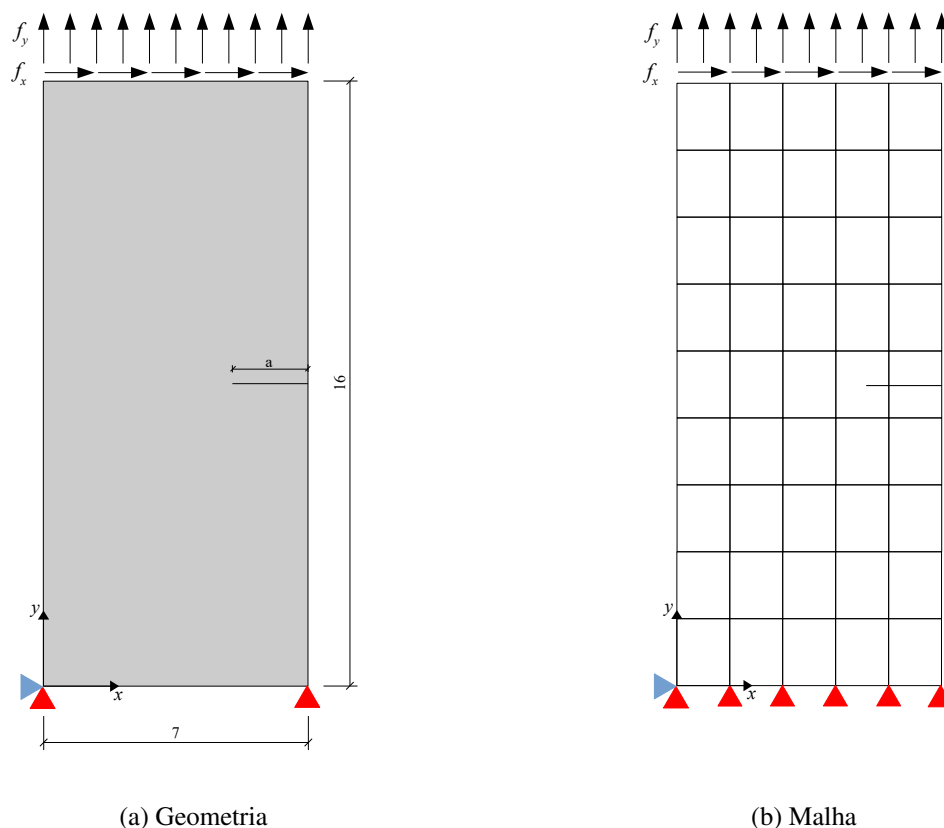


Figura 6. Dados gerais do modelo adotado.

A malha de elementos finitos escolhida foi de 4 por 9 elementos. O intuito da definição de uma ma-

lha mais grosseira foi evidenciar a integração numérica, visto que os elementos têm tamanho significativo em comparação ao tamanho da chapa. Foram adotados 2x2 pontos de Gauss em todos os elementos da malha, com exceção daqueles adjacentes aos que contêm nós com enriquecimento singular, nos quais utilizou-se 4x4 pontos de Gauss.

Para análise do comportamento do modelo numérico tanto na integração convencional quanto no emprego das estratégias de subdivisão e mapeamento, a quantidade de pontos de integração foi variada nos elementos que contêm a trinca. Para a integração convencional, indicada por *IC*, utilizou-se de 4x4 a 24x24 pontos de Gauss. Foram adotadas apenas quadraturas pares visto que, quando a ponta da trinca está no centro geométrico do elemento (*Exemplos 3 e 4*), as quadraturas ímpares consideram um ponto de integração coincidente com a mesma, onde não é possível determinar os parâmetros para o enriquecimento singular e, assim, a matriz de rigidez não é calculada.

Na estratégia de subdivisão de elementos vinculada a enriquecimentos descontínuos os pontos de integração em coordenadas paramétricas triangulares foram alternados entre 3, 4, 6, 7 e 13 em cada célula (valores usados visto que já se encontram implementados no programa). Por fim, no caso do emprego da subdivisão e mapeamento dos pontos de integração, as células foram avaliadas com pontos de Gauss modificados para quadraturas de 2x2 a 10x10. A integração com 1 ponto por célula foi descartada visto que a matriz de rigidez fica subintegrada devido ao grau do integrando.

Os dados vinculados às novas estratégias implementadas são identificados nos gráficos pelas séries de dados *SM* (Subdivisão e/ou Mapeamento). Os *Exemplos 1 e 2*, onde se adotou $f_y = 1$ e $f_x = 0$, têm a finalidade de mostrar a interferência das estratégias na integração numérica separadamente. No *Exemplo 1* a trinca tem dimensão unitária, estando inteiramente contida em um único elemento. Dessa maneira, são utilizadas apenas funções singulares como enriquecimento local. Para o *Exemplo 2* o tamanho da descontinuidade passa de 1, 0 para 2, 8, de forma a atravessar completamente os elementos que a contém. É utilizada somente a função de Heaviside como função de aproximação local.

No *Exemplo 3*, ambas as estratégias são empregadas em vista de serem utilizados enriquecimentos descontínuos e singulares. A dimensão da trinca é metade da largura da chapa, tendo portanto efeito significativo na energia de deformação do problema. Adotou-se $f_y = 1$ e $f_x = 0$. Esse exemplo também é analisado segundo a ótica do Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE) [31–33], com o intuito de se estudar o comportamento da energia de deformação segundo essa abordagem.

Na Fig. 7 é possível observar o posicionamento da trinca com relação à malha. Os nós indicados em laranja possuem enriquecimento singular, indicados nas Eqs. (6) e (7), e os nós em verde são enriquecidos com funções descontínuas, Eq. (5). Os elementos hachurados possuem ordem de integração 4x4.

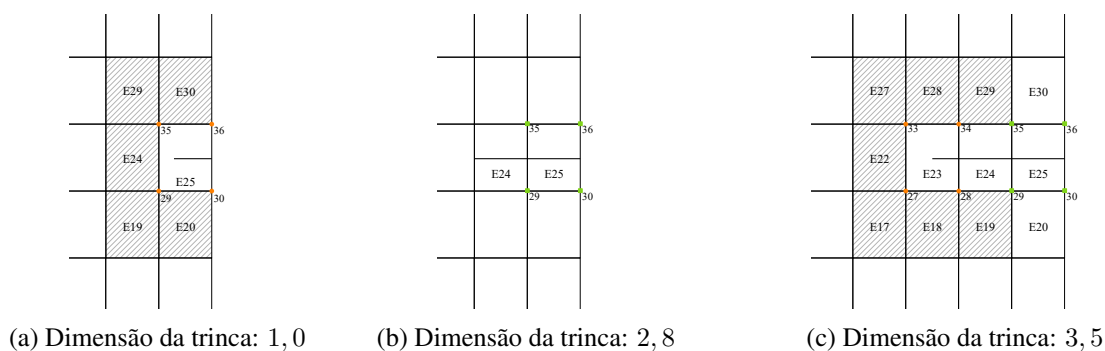


Figura 7. Representação da trinca nos *Exemplos 1, 2 e 3*.

Para o *Exemplo 3* os resultados de energia de deformação foram comparados com a solução de referência obtida numericamente por Oliveira [29], igual a 130,74931. A norma energia do erro relativo foi calculada pela expressão:

$$\|e\|^{rel} = \sqrt{\frac{U(\tilde{\mathbf{u}}) - U(\mathbf{u})}{U(\mathbf{u})}}, \quad (14)$$

onde $U(\mathbf{u})$ indica a energia de referência adotada e $U(\tilde{\mathbf{u}})$ a energia de deformação obtida em cada aproximação.

No *Exemplo 4*, adotou-se $f_y = 0$ e $f_x = 1$, produzindo modo misto de abertura da chapa. A dimensão da trinca é mantida a mesma do *Exemplo 3*, e foram usados dois tipos de enriquecimentos: descontínuo (Eq. (5)) e de ponta de trinca (Eqs. (6) a (9)) para as simulações no contexto do MEEG.

Por fim, o *Exemplo 5* tem o objetivo de validar as estratégias implementadas também para trincas inclinadas em modelos do MEEG. É adotado, para tal, o entalhe com dimensões conforme a Fig. 8, fazendo com que a chapa trabalhe em modo misto de abertura. A malha correspondente é representada ao lado da geometria, com as mesmas indicações dos exemplos anteriores referentes às ordens de quadratura e aos enriquecimentos utilizados (nesse caso, os enriquecimentos foram os mesmos do *Exemplo 4*).

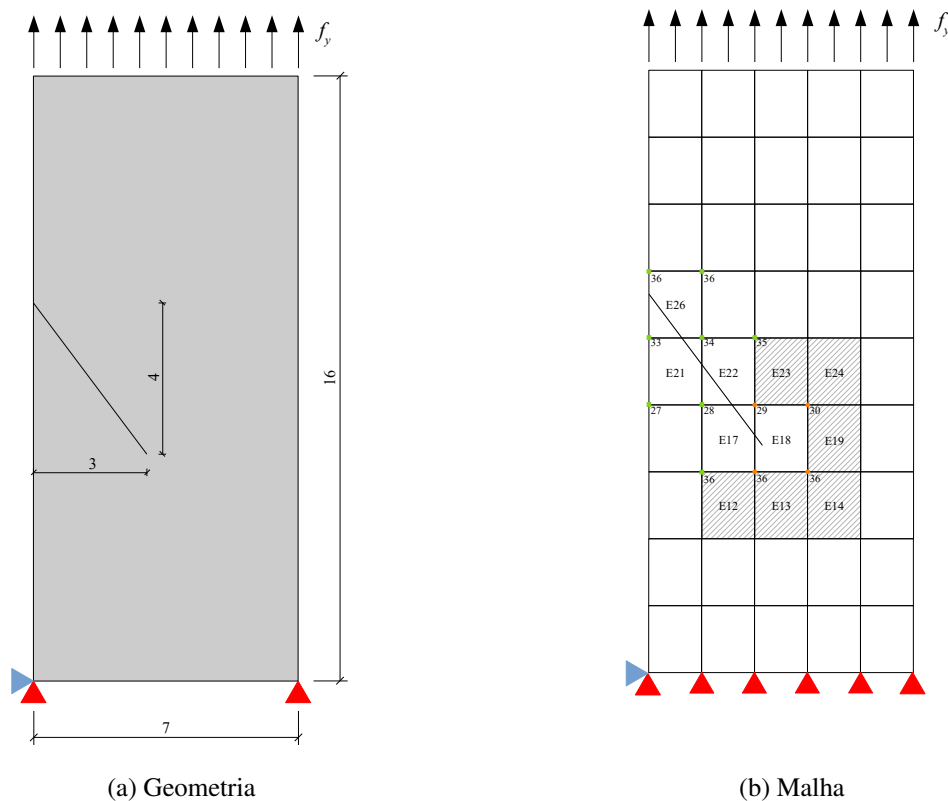


Figura 8. *Exemplo 5*: trinca inclinada.

4.2 Exemplo 1: enriquecimento singular

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos para os exemplos citados anteriormente. O primeiro caso diz respeito à chapa com trinca de bordo de tamanho unitário. O elemento E25 (Fig. 7) teve sua quantidade de pontos de integração variada, e para cada quadratura foram observadas a energia de deformação da chapa, a energia de deformação do elemento que contém a trinca e o tempo de processamento. Vale ressaltar que todos os tempos aqui citados são a média de 3 valores obtidos para cada simulação.

Na Fig. 9 observa-se a alteração da energia de deformação total U com o aumento do número de pontos de integração. A convergência de U ocorreu de forma mais lenta na integração convencional *IC* quando comparada à integração *SM*. A Fig. 10 indica a relação de U com o tempo de processamento. Para valores de U considerados aceitáveis para a discretização adotada, o tempo de processamento é menor quando se emprega a estratégia de integração implementada se comparado ao tempo gasto pela integração convencional.

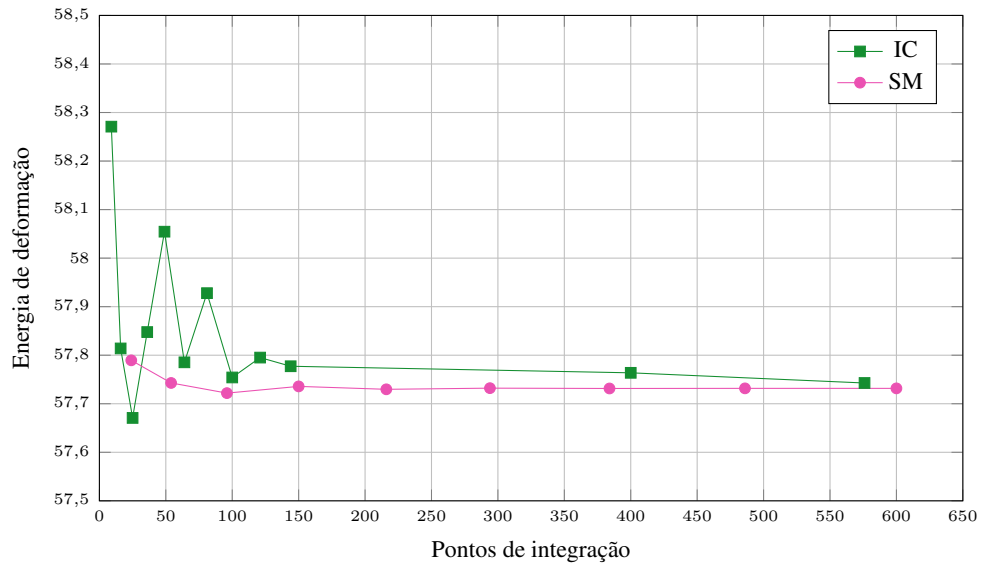


Figura 9. Exemplo 1: Energia de deformação.

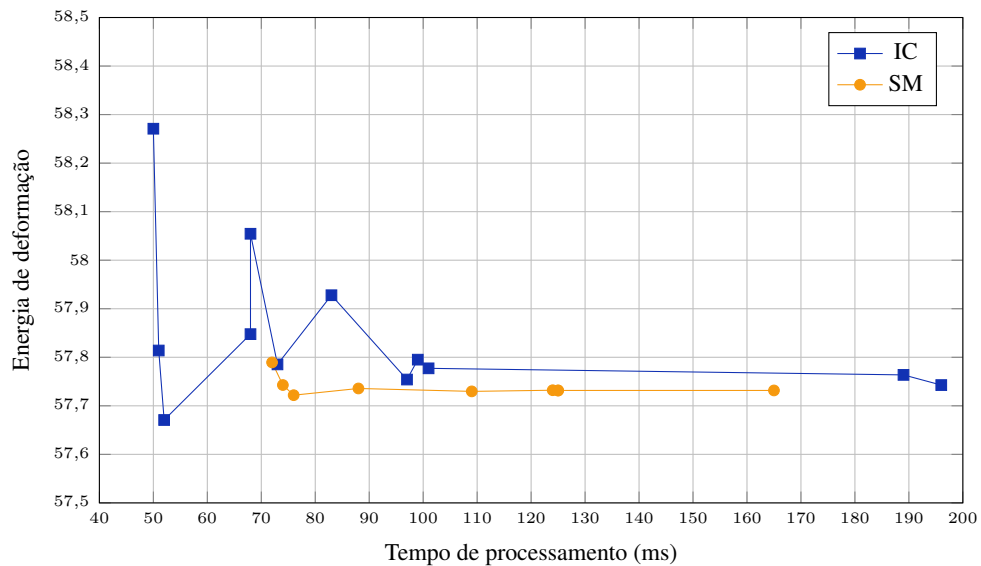


Figura 10. Exemplo 1: Tempo de processamento.

A Tab. 1 mostra que, para se atingir certa precisão de U , utiliza-se um número maior de pontos de integração com a quadratura convencional se comparado à estratégia aplicada, correspondendo a um tempo de processamento maior. Os dados apresentados são referentes à integração convencional com 24x24 pontos no elemento E25 e à estratégia implementada com 6x6 pontos em cada célula triangular.

Tabela 1. Dados para comparação da energia de deformação total do Exemplo 1.

Tipo de integração	U	Pontos de Gauss	Tempo de processamento (ms)
Convencional	57,742747	576	196
Subdivisão e mapeamento	57,729736	216	109

Numericamente, ao se utilizar menos pontos de integração, a rigidez da estrutura fica subdimensionada e, conseqüentemente, valores maiores de energia de deformação são encontrados. Portanto, à medida que se aumenta a ordem de quadratura há um aumento da rigidez e diminuição da energia de

deformação. Esse fenômeno é corroborado pelos resultados desse exemplo, assim como dos demais.

4.3 Exemplo 2: enriquecimento descontínuo

Nesse exemplo a trinca tem dimensão de 2,8 e o elemento E25 é enriquecido com funções de Heaviside padrão. Ao se realizar a subdivisão triangular a característica descontínua do integrando da matriz de rigidez é eliminada; portanto, a integração torna-se exata com 3 pontos por célula. A Fig. 11 mostra a variação de U com o aumento dos pontos de integração. A relação do tempo de processamento com a energia de deformação consta na Fig. 12. Conclui-se que, analogamente ao *Exemplo 1*, para se atingir um valor de energia com ótima precisão se valendo das estratégias implementadas é necessário um tempo de processamento significativamente menor do que aquele gasto na integração convencional.

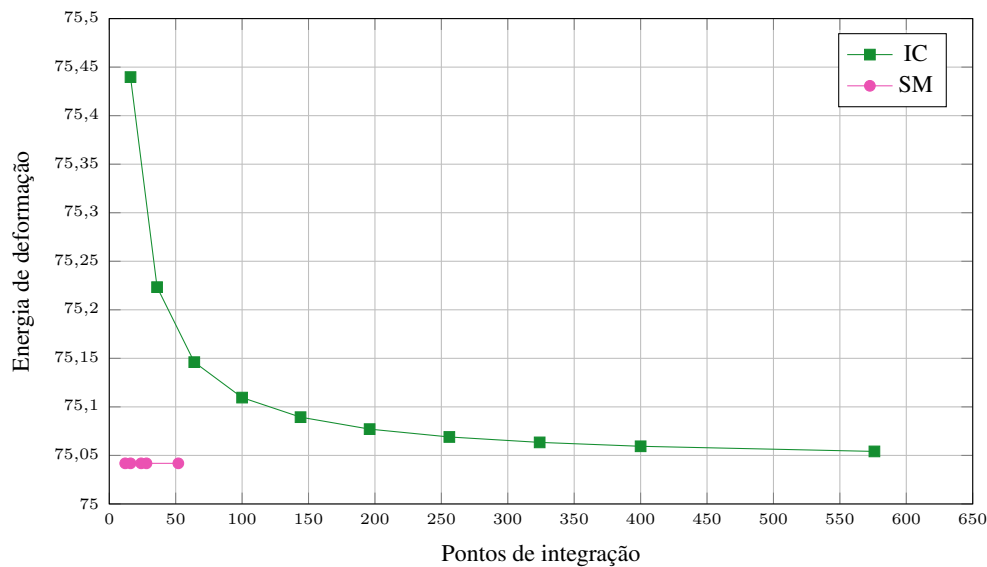


Figura 11. *Exemplo 2*: Energia de deformação.

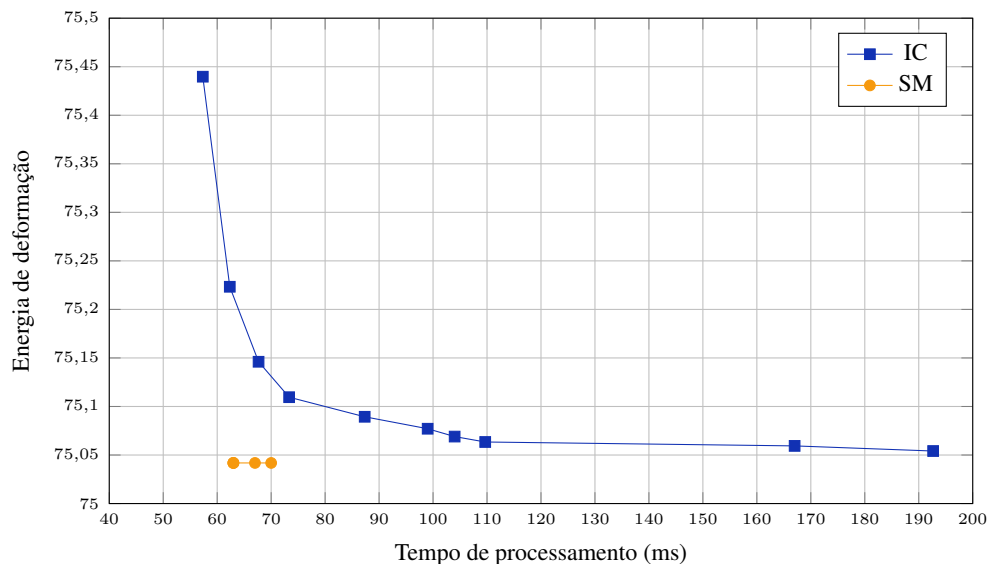


Figura 12. *Exemplo 2*: Tempo de processamento.

A Tab. 2 mostra a relação entre a energia de deformação, a quantidade de pontos de Gauss e o tempo de processamento para dois resultados vinculados a integrações diferentes considerados aceitáveis. Na integração convencional foram adotados 12x12 pontos de Gauss nos elementos atravessados pela trinca

e, na estratégia de subdivisão, utilizou-se 3 pontos em cada célula dos mesmos elementos.

Tabela 2. Dados para comparação da energia de deformação total do *Exemplo 2*.

Tipo de integração	U	Pontos de Gauss	Tempo de processamento (ms)
Convencional	75,089398	144	87
Subdivisão e mapeamento	75,041842	12	63

4.4 Exemplo 3: enriquecimentos singular e descontínuo

O *Exemplo 3* foi simulado com o objetivo de se estudar o comportamento das estratégias de subdivisão de elementos e mapeamento dos pontos de integração adicionadas conjuntamente. A trinca possui dimensão igual a metade da largura da chapa e foram utilizados enriquecimentos descontínuos e singulares, conforme visto na seção anterior.

Foi observada também a influência da utilização do MEFGE nas estratégias de integração implementadas. Tal abordagem foi proposta [31] com a intenção de eliminar o possível mau condicionamento da matriz de rigidez do MEFGE, o qual ocorre ao se enriquecer o espaço de solução com funções polinomiais, podendo originar funções de forma linearmente dependentes.

Gupta et al. [32] mostram que, ao se utilizar a função de Heaviside padrão da Eq. (5), o desempenho do MEFGE é inferior ao do MEFGE, resultando em erros relativos da norma de energia maiores no estudo de modelos bidimensionais. Dessa forma, os autores propuseram a utilização da função de Heaviside linear, representada pela Eq. (15) e, após a análise de resultados baseados nesse novo enriquecimento, constataram que o erro da solução numérica é melhor aproximado.

$$H_L(x, y) = \left\{ H, H \frac{x - x_j}{h_j}, H \frac{y - y_j}{h_j} \right\}, \quad (15)$$

onde H é a função de Heaviside padrão definida pela Eq. (5) e h_j é o fator de escala determinado a partir do tamanho característico do maior elemento que concorre no nó x_j .

Por isso, o mesmo exemplo foi simulado para o MEFGE considerando primeiro a função de Heaviside tradicional e depois a função de Heaviside linearizada, cujos dados são representados nas séries de dados MEFGE-L. Os resultados estão indicados na Fig. 13.

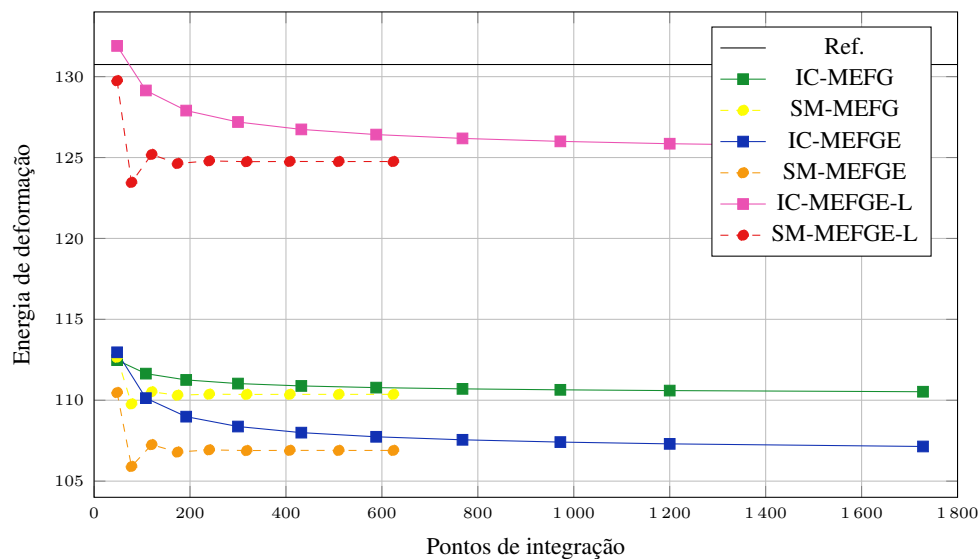


Figura 13. *Exemplo 3*: Energia de deformação.

Com o intuito de comparar as duas técnicas de integração, foram tomados os resultados considerados satisfatórios para cada uma, associados a:

- Integração convencional: quadratura 12x12 nos elementos totalmente atravessados pela trinca e 24x24 no elemento com a ponta da trinca;
- Subdivisão de elementos e mapeamento dos pontos de integração: 3 pontos por célula nos elementos totalmente atravessados pela trinca e 6x6 pontos por célula no elemento com a ponta da trinca.

Nota-se na Tab. 3 que a energia de deformação e o erro relativo correspondente são similares em cada contexto – MEFGE, MEFGE ou MEFGE-L, entretanto o emprego das estratégias de integração numérica resulta em tempos de processamento menores e necessidade de menos pontos de integração. A utilização do MEFGE e do MEFGE linearizado mostram que, mesmo o valor final da energia de deformação sendo alterado, a relação entre os resultados para cada técnica de integração se mantém. Os resultados mais próximos da solução de referência são obtidos com o MEFGE linearizado, associados a um erro relativo da norma de energia de aproximadamente 0,2%.

Tabela 3. Dados para comparação da energia de deformação total do *Exemplo 3*.

Tipo de integração		U	Pontos de Gauss	Tempo de processamento (ms)	$\ e \ $
MEFG	IC	110,529467	864	240	0,393250
	SM	110,373462	240	109	0,394765
MEFGE	IC	107,254797	864	547	0,423900
	SM	106,932576	240	212	0,426797
MEFGE Linear	IC	125,655480	864	644	0,197380
	SM	124,793896	240	239	0,213421

No elemento E23, Fig. 7, enriquecido somente com a função de Heaviside (Eq. (5)) do *Exemplo 3*, conforme citado anteriormente, o cálculo da matriz de rigidez é exato para 3 pontos de integração por célula. No elemento E24 deste exemplo, como existem diferentes enriquecimentos em seus nós, a exatidão não é mais garantida em condições semelhantes. Entretanto, foram realizadas simulações com maiores quantidades de pontos por célula e verificou-se que a norma da matriz de rigidez, assim como a energia de deformação do elemento em questão, sofre pouca alteração. Assim, manteve-se o padrão de 3 pontos por célula para todos os elementos atravessados pela trinca.

4.5 Exemplo 4: modo misto de abertura

Neste exemplo a dimensão e disposição da trinca do *Exemplo 3* foram mantidas, porém foi aplicado um esforço cisalhante ($f_y = 0$ e $f_x = 1$). Por isso, adicionou-se enriquecimento de ponta de trinca para os modos I e II em cada nó do elemento E23, além do enriquecimento descontínuo nos nós do elemento E25.

A Fig. 14 mostra os valores de energia de deformação obtidos para diferentes quantidades de pontos de integração em cada estratégia aplicada. Observa-se o mesmo padrão do *Exemplo 3*, ou seja: a convergência de U via técnicas de integração é mais rápida do que pelo método convencional.

Considerando os parâmetros que originaram os resultados da Tab. 3, a Tab. 4 relaciona a energia de deformação aqui obtida. Notou-se uma diferença ainda mais significativa entre a quantidade de pontos de Gauss e o tempo de processamento para ambas as estratégias, comprovando ser de grande utilidade a implementação das técnicas de integração numérica não convencionais vinculadas a modos mistos de abertura.

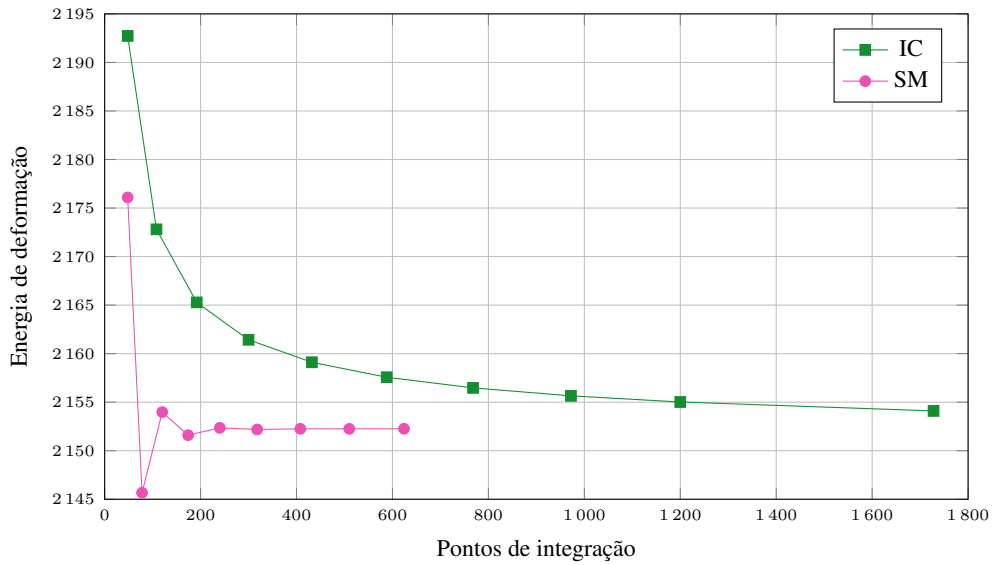


Figura 14. Exemplo 4: Energia de deformação.

Tabela 4. Dados para comparação da energia de deformação total do Exemplo 4.

Tipo de integração	U	Pontos de Gauss	Tempo de processamento (ms)
Convencional	2 154,201182	864	377
Subdivisão e mapeamento	2 152,356365	240	156

4.6 Exemplo 5: trinca inclinada

O último exemplo apresenta uma trinca inclinada, conforme geometria da Fig. 8. Por isso, são utilizados os enriquecimentos para modos I e II de abertura. Na Fig. 15 é indicada a variação de U conforme se aumenta o número de pontos de integração em cada técnica. De maneira mais relevante do que nos exemplos anteriores, a energia de deformação atinge valores satisfatórios mais rapidamente com o emprego da subdivisão e mapeamento dos pontos de integração.

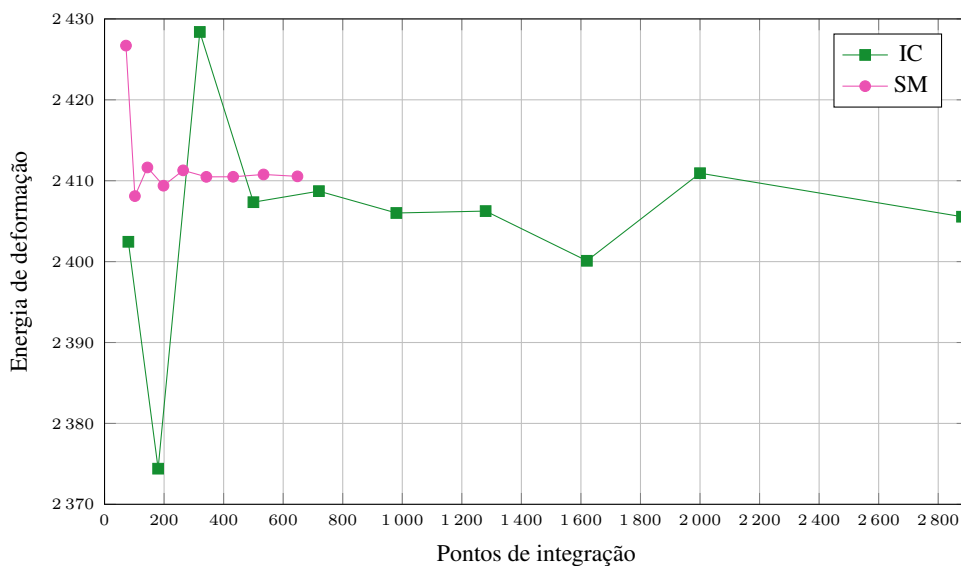


Figura 15. Exemplo 5: Energia de deformação.

Na Tab. 5 observa-se que, para as quadraturas indicadas no *Exemplo 3*, tem-se um resultado aceitável de energia de deformação com menos pontos de Gauss e menor tempo de processamento se relacionada àquela resultante da integração convencional.

Tabela 5. Dados para comparação da energia de deformação total do *Exemplo 5*.

Tipo de integração	U	Pontos de Gauss	Tempo de processamento (ms)
Convencional	2 405,800575	1 152	232
Subdivisão e mapeamento	2 411,281090	264	104

5 Conclusão

A partir das simulações realizadas, foi possível verificar o bom desempenho da integração numérica via subdivisão de elementos e mapeamento dos pontos de integração. Para diferentes modos de abertura e diferentes inclinações da trinca as estratégias adotadas se mostraram mais eficazes do que a quadratura de Gauss tradicional no que concerne à convergência da energia de deformação, empregando para tal menos pontos de Gauss e necessitando de um tempo de processamento menor, mesmo levando-se em conta a adição dos processos computacionais vinculados ao posicionamento e armazenamento dos dados dos novos pontos de integração.

A utilização do MEFGE na análise de modelos da MFLE mostrou-se importante para melhor aproximação dos valores de referência de cada situação, principalmente ao se adotar a função de Heaviside linearizada. O comportamento da energia de deformação para valores estáveis condizentes com a discretização proposta, entretanto, é similar entre os métodos (MEFG, MEFGE ou MEFGE linearizado). Como sugestão para trabalhos futuros propõe-se a implementação das técnicas de integração aqui analisadas para situações que envolvam a propagação de trincas em meios lineares elásticos e a avaliação da sensibilidade do cálculo dos fatores de intensidade de tensões à técnica de integração utilizada. Cita-se também a necessidade de estudo do impacto de tais estratégias em modelos com não linearidade física.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro concedido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), projeto 308932/2016-1, pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), projeto APQ-02460-16, e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Referências

- [1] Strouboulis, T., Babuška, I., e Copps, K., 2000a. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 181, n. 1, pp. 43–69.
- [2] Barros, F. B., 2002. *Métodos Sem Malha e Métodos dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas*. Tese de Doutorado, EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil.
- [3] Strouboulis, T., Copps, K., e Babuška, I., 2000b. The Generalized Finite Element Method: an example of its implementation and illustration of its performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, n. 8, pp. 1401–1417.
- [4] Béchet, E., Minnebo, H., Moës, N., e Burgardt, B., 2005. Improved implementation and robustness

- study of the X-FEM for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, n. 8, pp. 1033–1056.
- [5] Fonseca, F. T., 2008. Sistema Computacional para Análise Dinâmica Geometricamente Não-Linear Através do Método dos Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- [6] Duarte, C. A., Babuška, I., e Oden, J. T., 2000. Generalized Finite Element Methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers and Structures*, vol. 77, n. 2, pp. 215–232.
- [7] Babuška, I., Caloz, G., e Osborn, J. E., 1994. Special Finite Element Methods for a Class of Second Order Elliptic Problems with Rough Coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 31, n. 4, pp. 945–981.
- [8] Melenk, J. M. e Babuška, I., 1996. The Partition of Unit Finite Element Method: basic Theory and Applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, n. 1, pp. 289–314.
- [9] Duarte, C. A. e Oden, J. T., 1995. Hp Clouds - A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problem. Technical report, TICAM, The University of Texas at Austin. Technical Report.
- [10] Duarte, C. A. e Oden, J. T., 1996a. An h-p adaptive method using cloud. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 237–262.
- [11] Duarte, C. A. M. e Oden, J. T., 1996b. H-p clouds-an h-p meshless method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 12, n. 6, pp. 673–705.
- [12] Alves, P. D., 2012. Estratégia Global-Local Aplicada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- [13] Belytschko, T. e Black, T., 1999. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, n. 5, pp. 601–620.
- [14] Fries, T. P. e Belytschko, T., 2010. The Extended/Generalized Finite Element Method: An overview of the method and its applications. *Review Literature And Arts Of The Americas*, vol. 1, n. April, pp. 253–304.
- [15] Wolff, K. P., 2010. Implementação Computacional de um Modelo de Fissuração para o Concreto Baseado no Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM). Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- [16] Szabó, B. e Babuška, I., 1991. *Finite Element Analysis*. John Wiley and Sons, Inc.
- [17] Moës, N., Dolbow, J., e Belytschko, T., 1999. A Finite Element Method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, n. 1, pp. 131–150.
- [18] Sukumar, N., Moës, N., Moran, B., e Belytschko, T., 2000. Extended Finite Element Method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 48, n. 11, pp. 1549–1570.
- [19] Natarajan, S., Bordas, S., e Mahapatra, D., 2009. Numerical integration over arbitrary polygonal domains based on Schwarz-Christoffel conformal mapping. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 80, n. 1, pp. 103–134.
- [20] Ventura, G. e Benvenuti, E., 2015. Equivalent polynomials for quadrature in Heaviside function enriched elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 102, n. 3-4, pp. 688–710.
- [21] Stolarska, M., Chopp, D. L., Moës, N., e Belytschko, T., 2001. Modelling crack growth by level sets in the Extended Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, n. 8, pp. 943–960.

- [22] Iarve, E. V., 2003. Mesh independent modelling of cracks by using higher order shape functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, n. 6, pp. 869–882.
- [23] Ventura, G., Gracie, R., e Belytschko, T., 2009. Fast integration and weight function blending in the Extended Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 77, n. 1, pp. 1–29.
- [24] Laborde, P., Pommier, J., Renard, Y., e Salaün, M., 2005. High-order Extended Finite Element Method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, n. 3, pp. 354–381.
- [25] Park, K., Pereira, J. P., Duarte, C. A., e Paulino, G. H., 2009. Integration of singular enrichment functions in the Generalized/Extended Finite Element Method for three-dimensional problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 78, n. 10, pp. 1220–1257.
- [26] Nagarajan, A. e Mukherjee, S., 1993. A mapping method for numerical evaluation of two-dimensional integrals with $1/r$ singularity. *Computational Mechanics*, vol. 12, n. 1-2, pp. 19–26.
- [27] Cano, A. e Moreno, C., 2015. A new method for numerical integration of singular functions on the plane. *Numerical Algorithms*, vol. 68, n. 3, pp. 547–568.
- [28] Duffy, M. G., 1982. Quadrature over a pyramid or cube of integrands with a singularity at a vertex. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 19, n. 6, pp. 1260–1262.
- [29] Oliveira, T. S., 2018. Análise de Problemas Bidimensionais pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE). Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- [30] Fonseca, G. M., 2019. Propagação de Trincas em Meios Elásticos Lineares via Método dos Elementos Finitos Generalizados com Estratégia Global-Local Automatizada. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- [31] Babuška, I. e Banerjee, U., 2012. Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 201-204, n. 1, pp. 91–111.
- [32] Gupta, V., Duarte, C. A., Babuška, I., e Banerjee, U., 2013. A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 266, n. 1, pp. 23–39.
- [33] Gupta, V., Duarte, C. A., Babuška, I., e Banerjee, U., 2015. Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 289, n. 1, pp. 355–386.