

## INVESTIGAÇÃO DE DANOS EM PLACA USANDO OTIMIZAÇÃO DE SEGUNDA ORDEM

**Nora Nei Jesica Oliveira Santana**

**Marcus Alexandre Noronha de Brito**

*noraneyjesica18@hotmail.com*

*marcusanb@yahoo.com.br*

*Instituto Federal de Sergipe - IFS*

*Rua João Café Filho, nº 264, 49200-000, Estância/SE, Brasil*

**Luciano Mendes Bezerra**

*lmbz@unb.br*

*Universidade de Brasília - UNB*

*Campus Darcy Ribeiro SG-12, 70.910-900, Distrito Federal, Brasília, Brasil*

**Willian Taylor Matias Silva**

*taylor@unb.br*

*Universidade de Brasília - UNB*

*Campus Darcy Ribeiro SG-12, 70.910-900, Distrito Federal, Brasília, Brasil*

**Abstract.** The need to monitor the condition of the structures is of fundamental importance for safety and perfect use. With this, the numerical analysis allows significant cost reduction in a possible real analysis of the structure. Methods of identifying structural damage are increasingly developed and applied more easily in Structural Engineering. This paper applies the discretization of a structural element of plate in finite elements and through comparisons of the static and dynamic responses of this structure reaches an optimal solution for the inverse problem of damage identification. In order to achieve the optimal solution, the second order optimization of Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) and Davidon-Fletcher-Powell (DFP) methods coupled to an objective function is used in this paper, which deals with the solution in identification of internal damage to the structure, which will be compared to each other, highlighting the one with the best efficiency in plate structure. The minimization of the residuals between the static (displacement) and dynamic responses (natural frequencies of vibration) between the predicted damages and the actual damage allows the observation of the structural mechanical behavior and with it the identification of the damage in the structure.

**Keywords:** Damage identification; Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno; Davidon-Fletcher-Powell; Inverse Problems.

## **1 Introdução**

Atualmente, inspeções visuais e exames não destrutivos em estruturas são as metodologias mais usuais quando se objetiva conhecer anomalias e a severidade destas nas estruturas. A inspeção visual, porém, tem sua aplicabilidade contrariada quando se trata da análise subsuperficial, microfissuras e obras de grande complexidade, tendo em vista a precisão do olho humano e a quantidade de tempo dedicado a investigação, já os exames não destrutivos, com a utilização de raio-X, ultrassom, entre outros, têm como fator limitante de uso, o alto custo.

A busca por eficiência e custos reduzidos, motiva o desenvolvimento de métodos numérico computacionais que possibilitem o estudo em estruturas que alinhem ambos os critérios, de forma a garantir segurança e estabilidade.

Uma estrutura danificada apresenta baixa rigidez e perda de massa a depender do tipo de dano a ser tratado, modificando integralmente a matriz de rigidez e massa da estrutura analisada. Diante do exposto, há diversos estudos que enfocam nas respostas dinâmica (frequências naturais de vibração) e estática (deslocamento), baseados nos métodos numéricos computacionais e matemáticos que garantem uma redução de custo e maior exatidão e eficácia das soluções, Caldeira [1].

A investigação de danos e sua localização na estrutura caracteriza um Problema Inverso (PI), ou seja, um problema mal postulado com uma não-unicidade de soluções. “A solução de um problema inverso consiste, portanto, em determinar as causas ou o domínio matemático ou a explicação do fenômeno com base na observação de seus efeitos” Brito [2].

Modelagens numéricas existentes, como Método dos Elementos Finitos (MEF), Método de Elemento de Contorno (MEC) e Método das Diferenças Finitas (MDF), associados a algoritmos numéricos computacionais, conseguem solucionar o PI derivado da investigação de falhas estruturais. A otimização destes resultados pode ser obtida através de modelos matemáticos, entre eles o Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) e Davidon-Fletcher-Powell (DFP), considerados métodos de segunda ordem, em que fazem uma interação inversa da matriz hessiana.

Em decorrência do surgimento de novas tecnologias, que possibilita a combinação computacional com métodos matemáticos para solucionar a análise inversa de um comportamento estrutural, inúmeras pesquisas são largamente realizadas na avaliação de falhas estruturais, utilizando esta metodologia otimizada, como nas áreas da aeronáutica, mecânica e na engenharia estrutural, assim comprovando a eficácia do sistema. Mediante a isto, este artigo apresenta análises das respostas do comportamento estrutural dinâmico e estático de uma placa modelada pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), alcançando uma solução ótima para o problema inverso da identificação da localização e quantificação do dano na placa.

A fim de alcançar a otimização são comparados os dois métodos de segunda ordem, BFGS e DFP, acoplados a uma função objetivo, que trata da solução na identificação de danos internos à estrutura da placa. Pesquisas são desenvolvidas também utilizando vigas e treliças, mas no caso das placas esta pode representar melhor quando se tratam de estruturas de tabuleiros de pontes, viadutos e passarelas ou lajes de grandes edifícios, evoluindo para resultados satisfatórios quanto ao estudo destas estruturas.

## **2 Revisão Bibliográfica**

### **2.1 Identificação de danos estruturais**

A estrutura ao longo da sua vida útil suporta as mais diversas ações, que com o tempo provocam danos ou irregularidades na sua parte física ou mecânica como, o peso próprio e sobrecarga de utilização, que provoca deformações lentas e gradativas, as ações variáveis, vento e abalo sísmico, ocasiona vibrações indesejadas reduzindo a estabilidade estrutural, e a deterioração por tempo de uso e de acordo como está sendo utilizada, dentre outras condições. Uma falha na estrutura sem a devida detecção e recuperação, maximiza a probabilidade de um colapso, insegurança e desconforto dos usuários, afastando-se do propósito para o qual foi projetada e executada.

Desta forma, torna-se indispensável inspeções periódicas que indique o estado e o comportamento da estrutura, para que assim, ainda em estado inicial possa avaliar as imperfeições e danos encontrados, evitando-se através de manutenção o agravamento da situação, Brito [3].

A detecção de danos através do comportamento estrutural dinâmico e estático tem se mostrado cada vez mais eficiente, de forma rápida e econômica, comparado aos métodos convencionais utilizados. Apesar da preocupação em se melhorar as formas de inspeções e detecção de danos estruturais, ainda assim, no nosso país a manutenção ocorre em sua maioria das vezes de forma corretiva e não preventiva, Emidio Sobrinho et al [4].

## 2.2 Métodos de otimização estrutural e identificação de danos

São vários os métodos atualmente aplicados para a solução de identificação de danos e otimização estrutural como os de análise direta, método dos mínimos quadrados e suas variantes como o dos mínimos quadrados ponderados, Carroll [5], decomposição em valores singulares, métodos dos pontos interiores, métodos de regularização, Davidian [6], métodos estatísticos bayesianos, Levy and Mislavy [7], aplicações de filtro digitais como os de Kalman, Chen et al. [8], métodos de minimização de funções como o de Levenberg-Marquardt (LM), Junhong et al. [9], e os métodos tratados neste artigo: Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS), Mokhtari and Alejandro [10], Davidon-Fletcher-Powell (DFP), Mamat et al. [11].

Os métodos de identificação aplicados neste artigo assumem que o domínio real da estrutura de placa não é totalmente conhecido, tendo em vista que não se conhece a posição e a magnitude da falha na placa. Portanto, sua localização, extensão e severidade são desconhecidas.

Assim, são aplicados algoritmos BFGS e DFP que procedem distintamente a buscar falha por meio da utilização de uma função objetivo que possa caracterizar o comportamento da estrutura com o método de busca para cada exemplo estudado.

O dano em uma estrutura possui a propriedade básica de alterar características físicas importantes, tais como: a rigidez e a massa, considerados dentro da proposta de modelagem do dano pelo Método dos Elementos Finitos.

Assim, um vetor contendo características do dano é introduzido na modelagem numérica da estrutura que interfere nas propriedades de cada elemento finito do modelo. Dessa forma, um elemento finito pode ser considerado “danificado”, quando suas características são distintas dos demais elementos, permitindo com isso obtenção do vetor que contém os parâmetros de dano inseridos no modelo.

A rigidez do elemento danificado pode ser expressa em função do elemento intacto:

$$[\mathbf{K}^e]_d^i = \alpha_{k,i} [\mathbf{K}^e]_0^i, \quad i=1, \dots, n. \quad (1)$$

Sendo  $n$  o número de elementos finitos,  $[\mathbf{K}^e]_d^i$  a rigidez do  $i$ -ésimo elemento finito danificado na estrutura e  $[\mathbf{K}^e]_0^i$  a rigidez do  $i$ -ésimo elemento finito intacto,  $\alpha_{k,i}$  é o  $i$ -ésimo parâmetro de severidade do  $i$ -ésimo elemento finito, ele representa a espessura da falha interna.

Como os elementos finitos que constituem a falha possuem as mesmas características físicas do material da estrutura, pode-se definir que o parâmetro  $\alpha_{m,i}$  que incide sobre a variação da matriz de massa dos elementos danificados, inserindo uma perda de material, uma vez que a hipótese de dano ocupa toda a área ( $a \times b$ ) do elemento quadrilátero sendo expressa como:

$$[\mathbf{M}^e]_d^i = \alpha_{m,i} [\mathbf{M}^e]_0^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Sendo  $[\mathbf{M}^e]_d^i$  a matriz de massa do  $i$ -ésimo elemento finito danificado na estrutura e  $[\mathbf{M}^e]_0^i$  a matriz de massa do  $i$ -ésimo elemento finito intacto.

A partir de um modelo de falha idealizada, se inicializa o procedimento de busca com as características propostas para a falha. Inicia-se, portanto, as variáveis do vetor de dano prognosticado

$\xi = \{\alpha_i, \mu_i^k\}$ , espessura  $\alpha_i$  e localização predita  $\mu_i^k$ . Dessa forma, busca-se a minimização das características das respostas apresentadas pela estrutura através dos resíduos da função objetivo.

Os valores de referência são comparados através de um caminhamento principal de busca, dado pelas particularidades do algoritmo de cada método, o que reduz significativamente o número de iterações e tempo de processamento se comparado com a técnica combinatória empregada em outros métodos.

A metodologia empregada parte de um conjunto inicial de parâmetros do vetor  $\xi$  e que deve ser ajustado aos dados de referência, de forma que o mapeamento gerado pelos resíduos da função objetivo se aproxime ao máximo do valor de referência, buscando o seu mínimo durante a evolução do vetor prognosticado  $\xi_p$  durante o processo de busca do dano real.

A diferença entre o modelo de dano prognosticado e o modelo de dano real, constitui o resíduo representado por uma função objetivo definida por uma norma num espaço métrico apropriado, Scales e Moraes [12]. Os danos são desconhecidos em termos de sua localização e de sua severidade, contudo devem ser encontradas por meio dos dados do vetor  $\xi$  quando a função objetivo tender a zero,  $f_{obj}^j(\xi) \rightarrow 0$ .

As diferenças das características comportamentais da estrutura devem ser atribuídas durante o processo pelo vetor  $\xi$ , de modo a se obter respostas estruturais às modificações impostas pela atualização de  $\xi$  como deslocamentos, frequências, deformações, tensões e reações de apoio. As técnicas de medição experimental de dados estáticos e dinâmicos como deslocamentos e frequências são estudadas por diversos pesquisadores na de identificação de falhas em estruturas Bezerra [13]; Wang et al. [14]; Marin e Lesnic [15]; Rus e Gallego [16].

### 2.3 A função Objetivo

O problema de identificação de danos nas estruturas de placas é tomado nesse artigo como um problema matemático, sendo desenvolvido em MATLAB® juntamente com o uso da linguagem de programação APDL (Ansys Parametric Design Language) que tornará possível a atualização automática do modelo numérico em elementos finitos, constituído pelo software de simulação numérica para Engenharia ANSYS®, em que é necessário se definir a função objetivo para que por meio desta se determine a diferença (resíduo) entre os valores do modelo de dano prognosticado e do dano real da estrutura.

A função objetivo deve ser capaz de gerar um resíduo sensível a pequenas variações locais do comportamento da estrutura. Comparado esse resíduo a uma tolerância pré-estabelecida se procede com a atualização automática do modelo, modificando as características da falha estrutural prognosticada de modo que se inicie um processo iterativo comandado por um algoritmo de busca desenvolvido em MATLAB® deixando assim o modelo matemático no ANSYS® subordinado aos comandos de modificações em APDL.

Neste artigo é utilizada uma função objetivo formulada em termos das diferenças das componentes dos vetores deslocamentos e frequência natural de vibração entre a estrutura com dano e intacta, buscando expressar uma diferença supostamente significativa entre valores prognosticados e valores de referência (dano real), expressas com grandezas dinâmicas e estáticas, ou mesmo combinação entre estas.

A função objetivo  $f_{obj}^j(\xi)$  num espaço métrico adequado Kolmogorov e Fomin [17], define a distância entre a solução estimada, dano prognosticado  $f_p^j(\xi_p)$  e a proveniente da solução real ou de referência  $f_r(\xi_r)$ . O vetor  $\xi = \{\alpha_i, \mu_i^k\}$  indica as características do dano na estrutura como severidade do dano  $\alpha_i$  e localização, coordenadas cartesianas, na malha adotada o(s) elemento(s) danificado(s)  $\mu_i^k$  como na expressão (3).

$$\xi = \{\alpha_i, \mu_i^k\} \quad \text{e} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}_+, \quad \mu_i^k \in \mathbb{N}_+^* \quad (3)$$

O nível de severidade  $\alpha_i$  indica a magnitude do dano no elemento finito que constitui a avaria em função da redução de sua espessura, criando um vazio interno em relação à superfície média do elemento finito de placa.

Isso possibilita que na modelagem um dano possua variação de  $\alpha_i$ , ou seja, uma variação da espessura do dano. Já  $\mu_i^k$  corresponde às coordenadas cartesianas do k-ésimo elemento finito com a respectiva i-ésima severidade de dano. Com o modelo numérico em elementos finitos desenvolvido, tendo o controle das conectividades de seus elementos é possível controlar a severidade e posição do dano e a forma por meio do monitoramento de  $\alpha_i$  e  $\mu_i^k$  nas iterações durante o procedimento de minimização da função objetivo.

A função objetivo  $f_{obj}^j(\xi)$  pode ser matematicamente definida como a Eq. (4):

$$f_{obj}^j(\xi) = \left\{ [f_r(\xi_r) - f_p^j(\xi_p)]^q \right\}^{1/q}. \quad (4)$$

Na função objetivo  $f_{obj}^j(\xi)$  acima a constante  $q$ , segundo Scales e Gersztenkorn [18] define a métrica Euclidiana ou a norma Euclidiana, Eq. 5, (i.e.  $q=2$ ) muito comumente adotada na minimização de problemas de regressão.

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}. \quad (5)$$

De maneira que a solução do problema de identificação do dano na estrutura é obtida quando atingido o mínimo da função objetivo  $f_{obj}^j(\xi)$ , Eq. (6):

$$\text{Min} \left[ f_{obj}^j(\xi) \right] \rightarrow 0. \quad (6)$$

Quanto mais próximo de zero o valor da função objetivo, mais próxima a condição do dano prognosticado  $\xi_p = \{\alpha_{p,i}, \mu_{p,i}^k\}$  estará do vetor de dano real  $\xi_r = \{\alpha_i, \mu_i^k\}$ , na vizinhança do dano real, conduzindo a valores ótimos.

Se:

$$f_{obj}^j(\xi) \rightarrow 0. \quad (7)$$

Então:

$$\xi_p = \{\alpha_{p,i}, \mu_{p,i}^k\} \rightarrow \xi_r = \{\alpha_i, \mu_i^k\}. \quad (8)$$

Neste artigo é utilizada uma função objetivo com termo estático e dinâmico, extraída e modificada a partir de Brito [3], verificada sua capacidade de convergir para ótimo global, sendo adaptada com a inclusão dos parâmetros estáticos de rotação nodal para utilização nos elementos finitos de placas, esperando com isso elevar a sensibilidade da função objetivo.

A expressão,  $f(u, \theta, \omega)$ , Eq. (9), utiliza das razões das diferenças das rotações e translações nodais, respectivamente  $\Delta\theta_x^k$ ,  $\Delta\theta_y^k$  e  $\Delta u_z^k$  para os  $nn$ , número de nós, em relação aos quadrados das  $nf$  frequências naturais obtidos  $\Delta\omega_k^2$  com a proposta de inserção de grandezas estáticas e dinâmicas.

A inserção dos erros, ou contaminação dos dados, inseridos na leitura dos dados frequência e deslocamento, representam a real dificuldade na obtenção destas grandezas isentas de ruídos, faz com que os valores de  $\sum_{j=1}^{nf} \Delta\omega_j^2$ , no denominador, não tendam a um zero quando o dano prognosticado se aproximar do dano real, ou seja,  $\xi_p = \{\alpha_{p,i}, \mu_{p,i}^k\} \rightarrow \xi_r = \{\alpha_i, \mu_i^k\}$  e dessa maneira não gerem problemas de domínio matemático nem convergência da função.

Assim, no denominador da função  $f(u, \theta, \omega)$  é inserido um valor fixo,  $\varepsilon$ , dentro de tolerância estabelecida, para que mesmo com os dados contaminados de erros não se tenha problemas de instabilidade na convergência na busca do mínimo da função.

$$f(u, \theta, \omega) = \frac{\sum_{i=1}^{nn} (|\Delta u_z^i| + |\Delta \theta_x^i| + |\Delta \theta_y^i|)}{\sum_{j=1}^{n_f} \Delta \omega_j^2 + \varepsilon}. \quad (9)$$

As variações dos deslocamentos nodais e frequências são dadas pelas Eq. (10) e Eq. (13), onde os índices superiores  $i$  e  $d$  representam respectivamente as condições de resposta intacta e danificada (prognosticada).

$$\Delta \theta_x^k = \theta_x^{i,k} - \theta_x^{d,k}, \quad (10)$$

$$\Delta \theta_y^k = \theta_y^{i,k} - \theta_y^{d,k}, \quad (11)$$

$$\Delta u_z^k = u_z^{i,k} - u_z^{d,k}, \quad (12)$$

$$\Delta \omega_k^2 = (\omega_k^i - \omega_k^d)^2. \quad (13)$$

A expressão é calculada para todos os  $nn$  nós da estrutura e para as  $n_f$  primeiras frequências naturais extraídas para a estrutura. Pois são conhecidas as dificuldades de se medir altas frequências e notada a baixa significância nos resultados finais com o uso de grandes números de frequências naturais.

## 2.4 Davidon-Fletcher-Powell (DFP)

Desenvolvido por Willian C. Davidon, Roger Flecher e Michael JD Powell trata-se de um método do modo quase-Newton que tem como ideia a realização de uma aproximação iterativa da inversa da matriz hessiana, Nocedal [19].

A aproximação da inversa da matriz hessiana é dada de maneira que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{H}_i = \nabla^2 f_n^{-1}. \quad (14)$$

A construção da aproximação  $\hat{H}_i$  da inversa da matriz hessiana  $\nabla^2 f_n^{-1}$  com o uso de informações de primeira ordem adquiridas durante o processo de minimização, se utiliza de cada iteração para que se defina a direção descendente predecessora. Com a aproximação da solução, ou seja, com a aproximação da localização do dano o problema converge para a inversa da matriz hessiana.

Assumindo-se dois pontos de possíveis soluções do problema, dados por  $\xi_p^k = \{\alpha_{p,i}, \mu_{p,i}^k\}$  e  $\xi_p^k = \{\alpha_{p,i+1}, \mu_{p,i+1}^k\}$ , com  $\mu_{p,i}^k = (x_i; y_i)$  e  $\mu_{p,i+1}^k = (x_{i+1}; y_{i+1})$ , respectivamente, define-se:

$$\mathbf{g}_i = -\nabla[f_n(x_i; y_i; \alpha_i)]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{g}_{i+1} = -\nabla[f_n(x_{i+1}; y_{i+1}; \alpha_{i+1})]^T. \quad (15)$$

Sendo a hessiana  $\nabla^2 f_n$  constante, então:

$$\mathbf{q}_i \equiv \mathbf{g}_{i+1} - \mathbf{g}_i = \nabla^2 f_n \cdot \mathbf{p}_i. \quad (16)$$

Onde:

$$\mathbf{p}_i = \beta_i \mathbf{d}_i. \quad (17)$$

Inicialmente toma-se  $\mathbf{d}_0 = \mathbf{g}_0$ , ou seja,  $\mathbf{g}_0 = -\nabla[f_n(x_0; y_0; \alpha_0)]^T$ .

O parâmetro  $\hat{\beta}_i$  que determina o passo ótimo  $\mathbf{p}_i$  para a solução do problema com a Função Objetivo  $f_{\text{obj}}(\xi) = f_n(x; y; \alpha)$  deve ser encontrado por:

$$\min_{\beta_i \in [0,1]} f_{obj}(\xi + p_i) \quad (18)$$

Enquanto a condição de parada não é satisfeita,  $\|\hat{H}_i\| \leq Tolerância$ , atualiza-se os parâmetros  $g_i$ ,  $q_i$ ,  $p_i$  com  $\xi + p_i$ , assim como a determinação da direção  $d_i$  que é dada por:

$$d_i = \hat{H}_i \cdot g_i \quad (19)$$

Sendo a matriz  $\hat{H}_{i+1}$  definida na iteração predecessora como Ribeiro e Karas [20]:

$$\hat{H}_{i+1} = \hat{H}_i + \frac{p_i p_i^T}{p_i^T q_i} - \frac{\hat{H}_i q_i q_i^T \hat{H}_i}{q_i^T \hat{H}_i q_i}; i = 0, 1, \dots, i - 1 \quad (20)$$

### 2.5 Broyden-Fletcher-Godfarb-Shanno (BFGS)

O método de otimização Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno é assim denominado devido aos seus desenvolvedores Charles George Broyden, Roger Fletcher, Donald Goldfarb e David Shanno.

Esse método diferencia-se basicamente do método DFP pela aproximação da hessiana: que ao invés de aplicar a Eq. (20), aplica-se Ribeiro e Karas [21]:

$$\hat{H}_{i+1} = \hat{H}_i + \frac{p_i p_i^T}{p_i^T q_i} \left[ I + \frac{q_i^T \hat{H}_i q_i}{p_i^T q_i} \right] - \frac{\hat{H}_i q_i p_i^T + p_i q_i^T \hat{H}_i}{p_i^T q_i}; i = 0, 1, \dots, i - 1 \quad (21)$$

## 3 Exemplo e Análise dos Resultados

A estrutura analisada é uma placa quadrada de 0.5 x 0.5 m, simplesmente engastada em um de seus lados. A placa está discretizada em elementos quadriláteros isoparamétricos em uma malha de 400 elementos com 0.05 m de espessura.

No exemplo as frequências naturais e deslocamentos foram contaminados com ruídos da ordem de até 4,5% de seus valores originais.

O exemplo trata de uma placa em aço com módulo de elasticidade de  $2,05 \times 10^8$  kN/m<sup>2</sup>, peso específico de 77 kN/m<sup>3</sup> e coeficiente de Poisson de 0.3, espessura de 0.05 m. A condição de contorno e localização da aplicação das cargas nodais de 5 kN segundo a Fig. 1.

A Figura 1 mostra o exemplo a ser analisado na busca do dano real internamente localizado, a priori desconhecido.

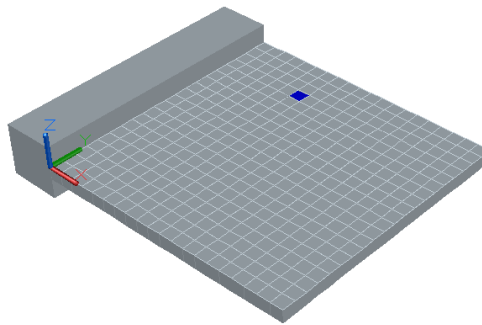


Figura 1 – Geometria do exemplo com indicação do posicionamento do dano real.

A Figura 2 traz a distribuição dos elementos na geometria, suas conectividades, condições de apoio, localização do dano real, a priori desconhecido constante no elemento 327 e as cargas aplicadas nos nós 10 e 430, respectivamente.

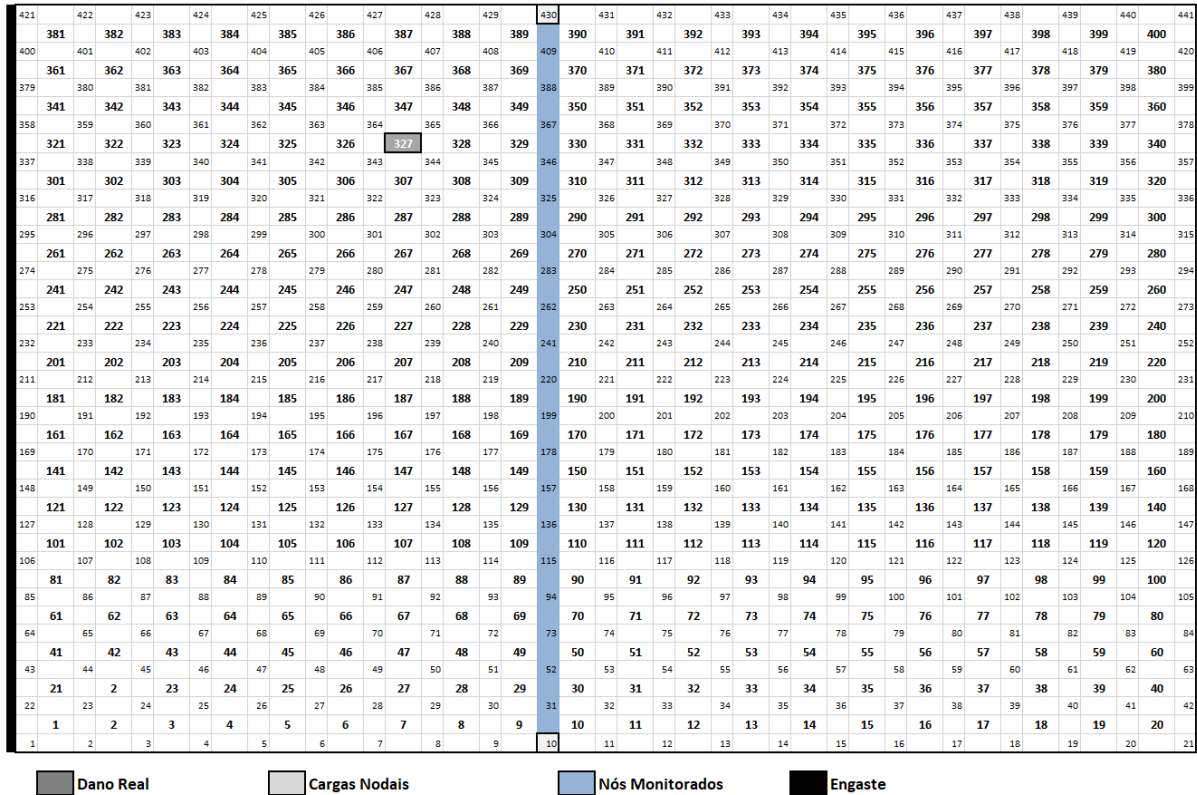


Figura 2 – Elementos, conectividades, condições de apoio, cargas aplicadas e nós monitorados.

São apresentadas as simulações de busca ao dano localizado no elemento 327 com 0,03 m de espessura, ou seja, com uma severidade  $\alpha$  de 40%.

Com a aplicação do método de otimização por Davidon-Fletcher-Powell (DFP) é verificado que a solução ótima foi atingida em apenas 19 iterações, com um erro médio de  $6,87 \times 10^{-2}$ , mostrando ser um eficiente método para aplicação da Função Objetivo.

A Figura 3 mostra uma peculiaridade observada no desenvolvimento da Função Objetivo onde na região do dano com proximidade aos nós de monitoramento os valores desta função são mais sensíveis em relação aos demais pontos, podendo com isso, denotar, com a análise do comportamento do gráfico, uma pré-locação do dano numa região ainda a ser refinada.



Desenvolvimento da Função Objetivo  
Davidon-Fletcher-Powell (DFP)

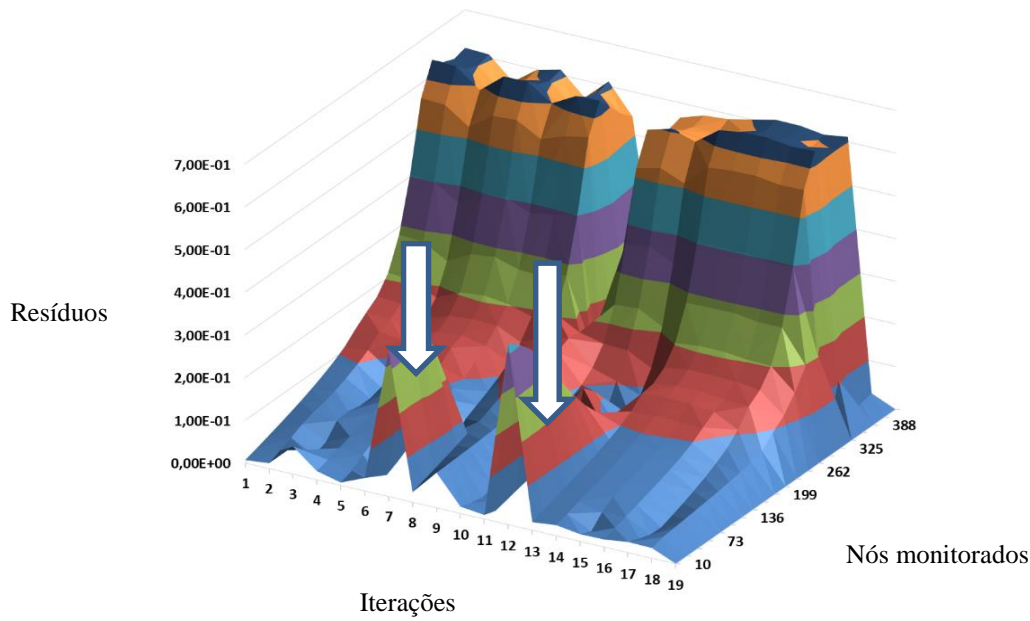


Figura 3 – Desenvolvimento dos valores da Função Objetivo nos nós monitorados – (DFP)

Durante as iterações os danos prognosticados, mais especificamente nas iterações de números 6 e 12 assumiram localizações muito afastadas (elementos 198 e 25, respectivamente) das posições que vinham assumindo em relação ao dano real (localizado no elemento de número 327), em reflexo a isso os nós monitorados mais afastados em relação ao dano real captaram, nessas iterações, uma mudança de comportamento por esse desvio da tendência de localização do dano prognosticado, sendo corrigido nas iterações sucessivas.

A Figura 4 mostra a seguir a evolução na convergência das variáveis independentes de localização do dano real. Percebe-se que na iteração de número 6 ( $i = 6$ ) a coordenada  $x$  de localização do dano prognosticado se afastou muito do seu valor real, sendo a responsável pelo posicionamento mais afastado do dano proposto. Já na iteração de número 12 ( $i = 12$ ), as três variáveis não atingiram seus valores máximos de afastamentos em relação aos seus respectivos valores reais, contudo, as três variáveis, coordenadas  $x$ ,  $y$  e severidade do dano  $t$ , tomaram, neste momento ( $i = 12$ ), valores afastados dos seus respectivos valores de referência, gerando o segundo pico de perturbação observado na Fig. 3.

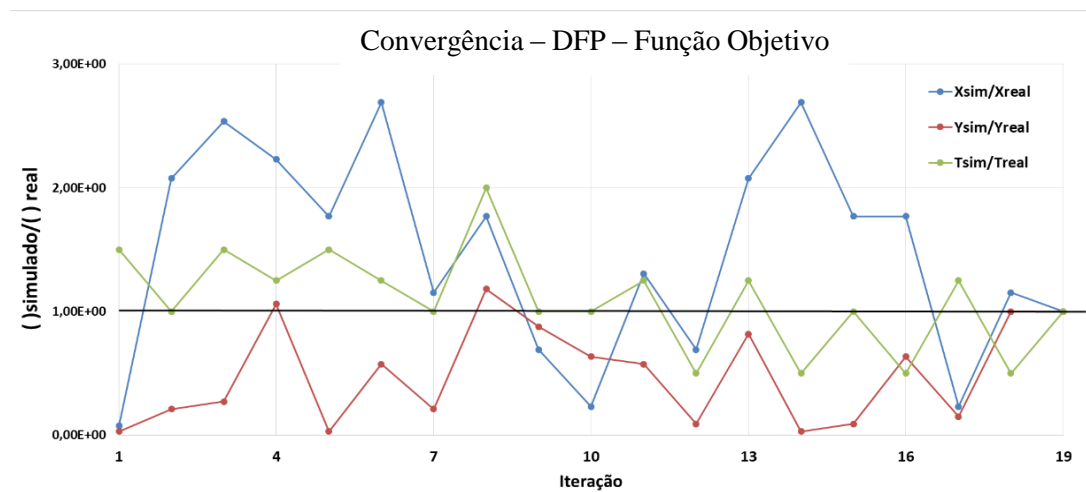


Figura 4 – Evolução das variáveis independentes - (DFP)

Com o empenho dos métodos de otimização Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) em relação ao método anterior para o problema de localização de danos em placas este foi o que necessitou de um número maior de iterações para alcançar a solução ótima do problema, 109 iterações quando aplicada a Função Objetivo  $f(u, \theta, \omega)$ .

O desenvolvimento da Função Objetivo para os mesmos nós monitorados no método anterior apresenta, na Fig. 5, um comportamento distinto do observado até o momento, porém também converge apresentando um erro médio de  $2,23 \times 10^{-01}$ .

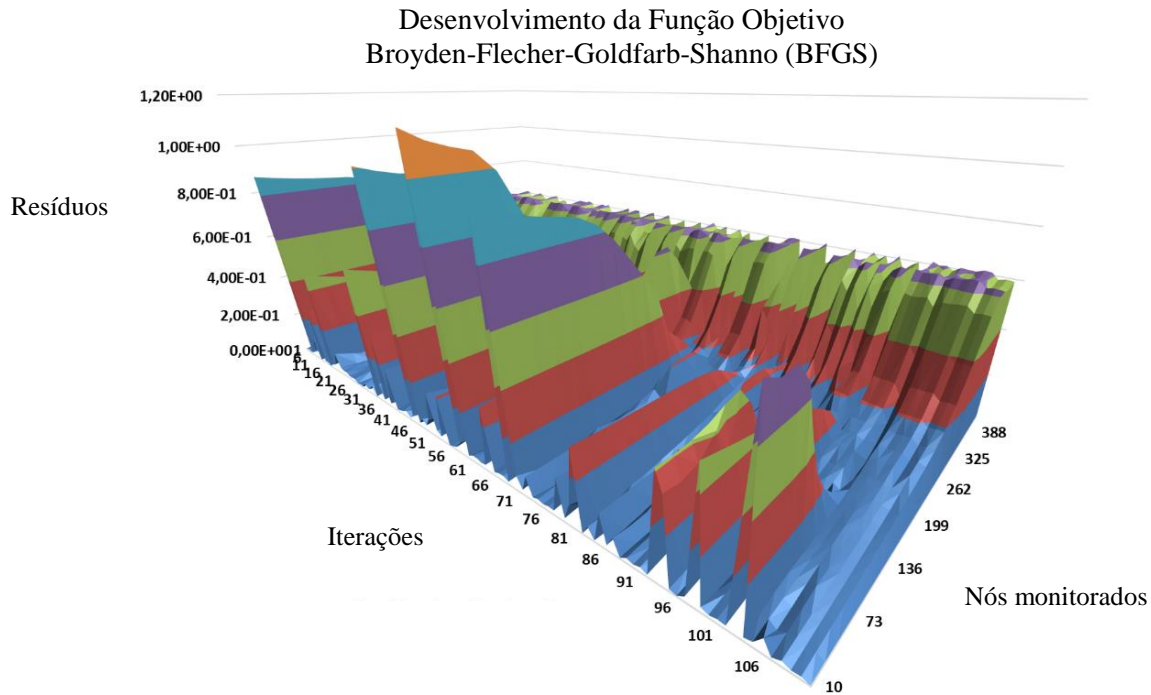


Figura 5 – Desenvolvimento dos valores da função nos nós monitorados – (BFGS)

O método se mostra bastante sensível nas regiões próximo às bordas livres, ou seja, próximos aos nós monitorados de números 10 e 430, ver Fig. 2. Tanto a aplicação das cargas estáticas, quanto as contaminações aplicadas podem ser causas geradoras de tamanha descontinuidade gráfica apresentada, contudo, mesmo após 109 iterações, aqui se mostra não ser o método mais eficiente para a solução deste problema, conseguir atingir uma solução ótima.

A evolução das variáveis aleatórias  $x$ ,  $y$ , e espessura  $t$ , são mostradas na Fig. 6 a seguir. Observa-se que a variável que representa a coordenada  $y$  em quase todo o processamento teve seu valor simulado ou prognosticado abaixo do seu respectivo valor real o passo que a coordenada  $x$  em quase todas as iterações mostra-se com valores prognosticados longe de seu valor real, o que juntamente com as demais variáveis independentes aproximam-se de uma convergência apenas nas últimas iterações, o que explica mais uma vez o nível de descontinuidade gráfica encontrada na Fig. 5.

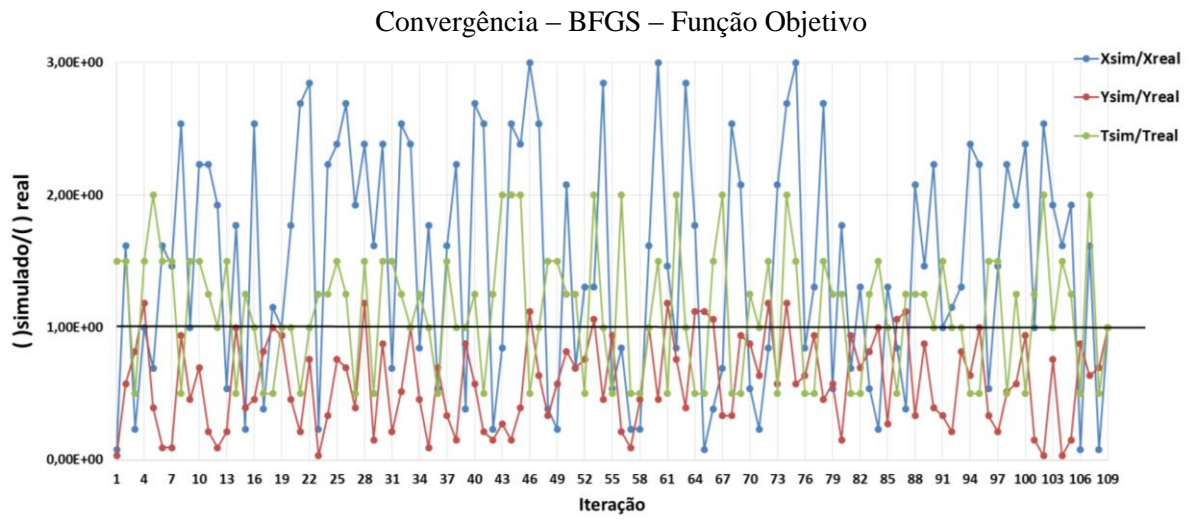


Figura 6 – Evolução das variáveis independentes - (BFGS)

## 4 Conclusões

Os métodos aplicados e adaptados para este artigo: Davidon-Fletcher-Powell (DFP) e Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) mostraram aplicabilidade em termos de eficiência, tempo de processamento.

Reitera-se que a robustez de um método de otimização (capacidade em atingir a solução ótima esperada) aplicado à solução de um Problema Inverso depende do conjunto de dados, calibração de parâmetros e especificamente neste artigo para a Função Objetivo aplicada.

Como esperado, por se tratar de aplicações em problemas inversos, algumas das configurações de ferramentas de solução não se mostraram tão eficazes na solução particular, contudo, atuando diferentemente em problemas distintos, confirmando assim, a necessidade que se tem em solucionar um problema inverso, onde não basta apenas obter a melhor solução dentre as possíveis respostas, mas aplicar também o melhor método para o alcance da solução ótima.

Por fim, observa-se que o método DFP alcança uma solução ótima de maneira bem mais eficiente que o método BFGS.

## Referências

- [1] M. M. Caldeira. Procedimentos Numéricos para a Solução do Problema Inverso de Localização de Danos em Estruturas Aperticadas. Dissertação de Mestrado em Pós-graduação em Estruturas e Construção Civil - Universidade de Brasília, 2009.
- [2] M. A. N. Brito. Solução com o uso do Método dos Elementos Finitos do Problema Inverso de Identificação de Danos em Placas com Perda de Material. Tese Doutorado em Estrutura e Construção Civil, Universidade de Brasília, Brasília, 2019.
- [3] M. A. N. Brito. Análise de Assinaturas Elastostáticas e Elastodinâmicas na Solução do Problema Inverso de Identificação de Danos em Treliças Via Método dos Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado em Estrutura e Construção Civil, Universidade de Brasília, Brasília, 2008.
- [4] B. Emidio Sobrinho; G. Gomes; G. F. Santos; E. U. L. Palechor e R. S. Y. R. C. Silva, 2015. Otimização e o Problema Inverso na Identificação de Danos Estruturais, *XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (XXXVI CILAMCE)*, pp. 1-5.
- [5] R. J. Carroll. *Transformation and Weighting in Regression*, ed. Routledge DOI 9780203735268. pp. 264. ISBN9780203735268, 2017.
- [6] M. Davidian. *Nonlinear Models for Repeated Measurement Data*, ed. Routledge, DOI 9780203745502. pp. 360. ISBN 9780203745502, 2017.

- [7] R. Levy e R. J. Mislevy. *Bayesian Psychometric Modeling*, ed. Chapman and Hall/CRC, DOI 9781315374604. pp. 492. ISBN9781315374604, 2016.
- [8] B. Chen; X. Liu; H. Zhao, e J. C. Principe, 2017. *Maximum correntropy Kalman filter*. Automatica, Elsevier, Vol. 76, pp. 70-77.
- [9] J. Junhong Li; Zheng, W, X; Gu, J e Hua L. Parameter estimation algorithms for Hammerstein output error systems using Levenberg–Marquardt optimization method with varying interval measurements. *Journal of the Franklin Institute*. Vol. 354, Issue 1, pp.316-331, 2017.
- [10] A. Mokhtari e A. Ribeiro. Global convergence of online limited memory BFGS. *The Journal of Machine Learning Research*, 16:3151–3181, 2015.
- [11] M. Mamat; M. K. Dauda; M. A. Mohamed; M. Y. Waziri; F. S. Mohamad e H. Abdullah, Derivative free Davidon-Fletcher-Powell (DFP) for solving symmetric systems of nonlinear equations. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 332 doi:10.1088/1757-899X/332/1/012030. 2018.
- [12] J. A. Scales, e F. Moraes. Local Bayesian Inversion: Theoretical Developments. *International Journal of Geophysics*, 141, 713 – 723, 2000.
- [13] L. M. Bezerra. Inverse Elastostatics Solutions with Boundary Elements, Ph.D. thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 1993.
- [14] N. Hu. Wang; X. H. Fukunaga; Z. H. Yao; H. X. Zhang e Z. S. Wu. Damage assessment of structures using modal test data. *International Journal of Solids and Structures*. Vol. 38, Issue 18, Pages 3111-3126, 2001.
- [15] L. Marin e D. Lesnic. BEM first-order regularisation method in linear elasticity for boundary identification. *Computational Methods Applied in Mechanical Engineerig*. 192 , 2059–2071, 2003.
- [16] G. Rus e R. Gallego. Boundary integral equation for inclusion and cavity shape sensitivity in harmonic elastodynamics. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 29, 77–91, 2005.
- [17] A. N. Kolmogorov e S. V. Fomin. Introductory Real Analysis. Ed. Dover Books on Mathematics, 1970.
- [18] J. A. Scales e A. Gersztenkorn. Robust methods in inverse problems. *Inverse Problems*. 4: pp. 1071-1091, 1988.
- [19] J. Nocedal e J. Stephen Wright. 1999. Numerical Optimization, Springer-Verlag, ISBN 0-387-98793-2.
- [20] A. A. Ribeiro e E. W. Karas. Otimização Contínua: Aspectos teóricos e computacionais. São Paulo: Cengage Learning, 2013.