

## **ANÁLISE TERMOMECÂNICA DE MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL**

**Diogo R. Ramos e Silva**

*Diogoramos2@gmail.com*

**Marcelo S. Medeiros Junior**

*marcelomedeiros@ufc.br*

**Evandro Parente Jr.**

*evandro@ufc.br*

*Laboratorio de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV), Departamento de Engenharia Estrutural e Construção Civil, Universidade Federal do Ceará, Campus do Pici, Centro de Tecnologia, Bloco 728, 60455-760, Fortaleza, Ceará, Brasil*

**Resumo.** Materiais com gradação funcional (MGF) foram primeiramente estudados no Japão no início da década de 1980. Esses materiais foram desenvolvidos para atuar como barreiras térmicas em reatores de fusão e na indústria aeroespacial, devido aos elevados gradientes de temperatura às quais estas estruturas são submetidas. Esse tipo de compósito geralmente é formado por dois materiais, usualmente cerâmica e metal. O uso da cerâmica proporciona melhor comportamento frente a cargas térmicas, enquanto que melhores propriedades mecânicas são obtidas graças à matriz metálica. As frações de volume variam ao longo de uma direção predefinida para se obter o comportamento termomecânico desejado. Devido à variação das propriedades mecânicas, a obtenção de soluções analíticas para estruturas com MGFs se torna mais difícil, sendo necessária a utilização de métodos numéricos para análise de estruturas com MGFs. Portanto, neste trabalho realiza-se um estudo sobre a aplicação de MGFs a placas submetidas a diferentes cargas mecânicas e térmicas. Para isso, são implementadas sub-rotinas de usuário (UMAT e UMATHT) no programa de elementos finitos ABAQUS de forma a representar a variação espacial das propriedades termomecânicas. Diferentes métodos de homogeneização são utilizados para avaliar as propriedades efetivas desses compósitos como função das frações de volume. Neste trabalho, as cargas mecânicas e térmicas são aplicadas e os resultados são comparados com soluções analíticas encontradas na literatura, as quais consideram o desacoplamento entre os campos térmico e mecânico. Após a validação, realiza-se um estudo paramétrico que considera diferentes métodos de homogeneização e frações de volume.

**Palavras chave:** Materiais com Gradação Funcional, Método dos Elementos Finitos, Análise Termomecânica.

## 1 Introdução

O conceito de material com gradação funcional surgiu em 1984 no Japão, sendo o seu uso associado principalmente a barreiras térmicas [1]. No ano de 1987 o desenvolvimento desse material prosseguiu sob o estudo da agência de ciências e tecnologia pertencente ao governo japonês que tinha como intuito o estudo desses materiais para os programas aeroespaciais. A ideia principal desse programa foi propor uma nova metodologia de compósitos com materiais cerâmicos e metais, ou seja, Materiais com Gradação Funcional (MGF), que são um tipo de compósito de alto desempenho com variação gradual de composição segundo uma direção preferencial [1, 2]. As propriedades desejáveis desses materiais podem ser obtidas a partir da variação de frações de volume dos materiais constituintes. Um dos tipos de MGFs mais populares são compósitos de cerâmica e metal, a cerâmica apresentando uma elevada resistência a altas temperaturas e gradientes térmicos e o metal tendo boa resistência mecânica [3].

Esses materiais apresentam uma série de qualidades em relação aos compósitos laminados como: eliminação de concentração de tensões na interface entre as lâminas, melhor distribuição de tensões residuais, maior tenacidade a fraturas, melhor comportamento mecânico em altas temperaturas, entre outros [3, 4].

Dentre as pesquisas realizadas sobre estes materiais, destacam-se os trabalhos: Reddy [5] analisou placas de MGF sob diferentes frações de volume, Reddy e Cheng [6] apresentaram uma solução analítica assim como resultados numéricos que poderiam ser utilizados como benchmarks. Vel e Batra [4] obtiveram soluções analíticas e realizaram estudos a respeito das teorias de placas em materiais com gradação funcional. Brischetto et al. [7] e Alibeigloo [8] forneceram soluções analíticas e as validaram com os resultados fornecidos por Reddy e Cheng [6]. Burlayenko [9] e Burlayenko et al. [10] empregaram sub-rotinas do usuário as quais foram implementadas no software ABAQUS que permitem a modelagem de modelos constitutivos de materiais com gradação funcional.

Portanto, o uso de placas e cascas de MGF apresenta várias vantagens, mas como se trata de uma classe de materiais relativamente nova, faz-se necessário o desenvolvimento de pesquisas, buscando ampliar e aprofundar o conhecimento sobre este assunto. Uma vez que os materiais com gradação funcional surgiram como barreiras térmicas, há a necessidade de analisá-los sob o ponto de vista térmico, ou seja, deve-se realizar uma análise térmica para obtenção do campo de temperatura e uma análise mecânica para determinação da resposta estrutural. Logo, o presente trabalho tem como objetivo geral contribuir para o avanço da análise de placas de materiais com gradação funcional submetidas à carregamento termomecânico. Neste trabalho, primeiramente realiza-se a validação das sub-rotinas usadas através de benchmarks, em que observa-se boa convergência com os resultados presentes na literatura. Posteriormente, avalia-se os efeitos da adoção de diferentes modelos de homogeneização e de diferentes frações de volume.

## 2 Materiais com Gradação Funcional

As propriedades efetivas de MGFs são influenciadas pela forma como ocorre a distribuição da composição do material ao longo de uma coordenada específica. A variação da fração de volume das diferentes fases do compósito pode ser representada matematicamente por equações simples, com as mais comuns sendo equações exponenciais, leis de potência e equações sigmóides [11]. As Figuras 1 e 2 fornecem uma ideia de como ocorre essa gradação a partir da lei das potências, definida como:

$$V_c = \left( \frac{x}{t} + \frac{1}{2} \right)^N \quad (1)$$

em que  $V_c$  representa a variação da fração de volume,  $x$  corresponde a uma determinada coordenada, por exemplo, coordenada referente à direção da espessura,  $t$  refere-se à espessura e  $N$  é o índice de fração de volume.

O estudo do comportamento de materiais compósitos é feito através de técnicas de homogeneização, que permitem a obtenção de respostas macroscópicas do material. Dentre as técnicas de homogeneização, pode-se citar: lei das misturas e Mori-Tanaka [2, 12].

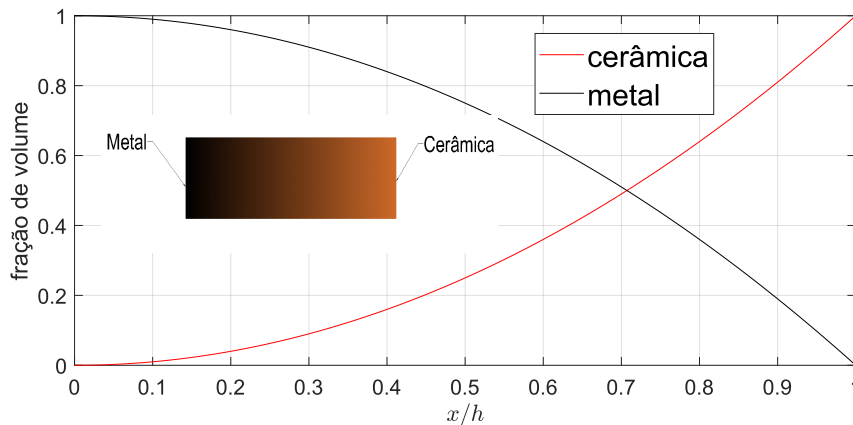


Figura 1. Materiais com graduação funcional

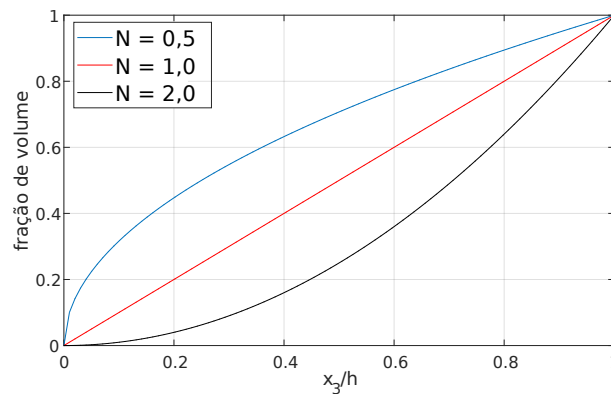


Figura 2. Lei das potências para diferentes índices de fração de volume (N)

O método da lei das misturas é um dos mais simples e que vem sendo bastante utilizada na literatura, ele é baseado em uma lei de mistura linear dos materiais [13]. As propriedades efetivas para estruturas com base na lei das misturas é:

$$P(T) = (P_c(T) - P_m(T)) \cdot V_c + P_m(T) \quad (2)$$

O método de Mori-Tanaka introduz uma avaliação da microestrutura na homogeneização. Esse método é aplicável para materiais com graduação, cuja microestrutura possui matriz constitutiva bem definida e uma fase de partículas descontínuas, ele leva em consideração a interação do campo elástico entre inclusões vizinhas [4]. No método de Mori-Tanaka, os valores do módulo volumétrico efetivo ( $K$ ) e do módulo de cisalhamento efetivo ( $G$ ) são calculados, respectivamente, por:

$$\frac{K - K_m}{K_c - K_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \left( \frac{K_c - K_m}{K_m + \frac{4}{3}G_m} \right)} \quad (3)$$

$$\frac{G - G_m}{G_c - G_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \left( \frac{G_c - G_m}{G_m + f_m} \right)} \quad (4)$$

$$f_1 = \frac{G_m (9K_m + 8G_m)}{6 (K_m + 2G_m)} \quad (5)$$

em que os subscritos  $c$  e  $m$  são referentes à cerâmica e ao metal, respectivamente; o coeficiente  $f_1$  é uma relação entre o módulo de cisalhamento e módulo volumétrico e  $V_c$  é a distribuição da fração de volume adotada.

Os valores efetivos do módulo de elasticidade ( $E$ ), do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), do coeficiente de condutividade térmica efetivo ( $k$ ) e do coeficiente de expansão térmica ( $\alpha$ ) são calculados, respectivamente, como:

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (6)$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad (7)$$

$$\frac{k - k_m}{k_c - k_m} = \frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \left( \frac{k_c - k_m}{3k_m} \right)} \quad (8)$$

$$\frac{\alpha - \alpha_m}{\alpha_c - \alpha_m} = \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{k_m}}{\frac{1}{k_c} - \frac{1}{k_m}} \quad (9)$$

### 3 Análise Termomecânica

Os primeiros trabalhos sobre termomecânica consideravam o desacoplamento entre os campos térmicos e mecânicos. Posteriormente, Biot [14] apresentou a teoria da termoelasticidade acoplada a qual considera esse acoplamento.

A natureza mecânica e térmica dos problemas que envolvem a termoelasticidade são acopladas, ou seja, termos de origem térmica aparecem na equação do movimento e termos de origem mecânica aparecem na equação da condutividade térmica. Segundo Carrera et al. [15], esse acoplamento é importante em situações de choque térmico, em que ocorrem deformações de maneira rápida e significativa quantidade de energia mecânica é convertida em energia térmica.

Por outro lado, para a maioria dos problemas correntes de engenharia, é possível fazer simplificações, sem causar erros significativos. A principal simplificação é omitir termos de origem decorrente do acoplamento mecânico da equação da energia, outra simplificação é descartar termos de inércia na equação de movimento [16].

#### 3.1 Equações de governo para termoelasticidade linear desacoplada

A teoria da termoelasticidade inclui equações de movimento, equações de conservação de energia e leis constitutivas. A principal diferença da teoria da termoelasticidade em relação a da elasticidade está associada às equações constitutivas, uma vez que as equações de equilíbrio e de compatibilidade continuam as mesmas. A equação de energia da termoelasticidade desacoplada definida por Carrera et al. [15] tem a forma:

$$\rho c(T) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial h_i}{\partial x_i} - Q = 0 \quad (10)$$

em que  $Q$  é a energia gerada no volume de controle por aquecimento volumétrico,  $\rho$  é a massa específica,  $c$  é o calor específico,  $T$  refere-se à temperatura e  $h_i$  é o vetor de fluxo de calor normal à superfície.

É importante notar que não há termos de origem mecânica na Equação 10. Isso ocorre pois admitiu-se o acoplamento parcial, ou seja, situação em que mudança no estado energético térmico gera mudança no estado energético mecânico, mas o oposto não é verdadeiro [15].

As equações de equilíbrio e as constitutivas são, respectivamente:

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ji,j} + X_i \quad (11)$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \alpha (T_{abs} - T_{ref}) \delta_{ij} \quad (12)$$

$$\sigma_{ij} = 2G \left[ \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \epsilon_{kk} - \frac{1-\nu}{\nu} \alpha (T_{abs} - T_{ref}) \right) \delta_{ij} \right] \quad (13)$$

em que  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica,  $G$  é o módulo de cisalhamento e  $\nu$  é o Poisson,  $X$  é a força de corpo,  $t_n$  representa uma força de tração superficial,  $T_{ref}$  é a temperatura de inicial,  $T_{abs}$  é a temperatura final.

A equação do movimento está representada pela Equação 11. A Equação 12 representa o modelo constitutivo da termoelasticidade, a partir da qual se chega à Equação 13. Destaca-se que a Equação 12 é válida para pequenas deformações e para variações de temperatura que não ocorrem de maneira brusca. A partir dessas considerações admite-se que os componentes do tensor de deformações são uma combinação linear que considera a sobreposição dos efeitos devido às deformações térmicas e mecânicas.

### 3.2 Considerações sobre o acoplamento

A situação de acoplamento precisa ser levada em consideração quando o campo de variação das condições de contorno com o tempo, ou quando as cargas térmicas impostas, são grandes o suficiente para excitar a propagação de ondas de tensão térmica [17].

Boley e Weiner [16] escrevem a equação da energia, considerando o acoplamento, da seguinte forma:

$$KT_{,mm} = \rho c_v \dot{T} \left[ 1 + \delta \left( \frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \right) \left( \frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{\alpha \dot{T}} \right) \right] \quad (14)$$

em que o parâmetro  $\delta$  é definido como:

$$\delta = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 T_0}{\rho^2 c_v v_e^2} \quad (15)$$

a velocidade de propagação da onda de dilatação ( $v_e$ ) em um meio contínuo é denotado por:

$$v_e = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (16)$$

Os termos de acoplamento na Equação 14 podem ser negligenciados se:

$$\frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{3\alpha \dot{T}} \ll \left( \frac{\lambda + \frac{2\mu}{3}}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{1}{\delta} \quad (17)$$

Ainda segundo Boley e Weiner [16], a possibilidade de omitir os termos de acoplamento ocorrem quando  $\delta$  é muito menor que a unidade e quando a taxa de deformação é da mesma ordem de grandeza da taxa de variação da temperatura.

### 3.3 Formulação por elemento finitos

Utilizando o método dos elementos finitos [18, 19], tem-se que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a}_e \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \partial\mathbf{u} \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a}_e \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}_e - \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon}_0 \quad (21)$$

em que  $\mathbf{N}$  são funções de forma,  $\mathbf{a}_e$  são valores de deslocamentos nodais,  $\mathbf{u}$  são os deslocamentos no interior do elemento,  $\partial$  é o gradiente,  $\boldsymbol{\epsilon}_0$  é a deformação inicial e  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva. Pode-se escrever a forma fraca como:

$$\left( \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{u} - \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS - \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV - \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_0 dV = 0 \quad (22)$$

Considerando as condições de contorno, as quais são ou tensão especificada na superfície, condições de contorno naturais, ou deslocamentos preestabelecidos (condições de contorno essenciais). Sendo que as condições de contorno podem ser escritas na forma:

$$\mathbf{t} = \mathbf{S}_n = \mathbf{h} \quad \text{em } \mathbf{S}_h \quad (23)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{em } \mathbf{S}_g \quad (24)$$

em que  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{g}$  são vetores conhecidos, isto significa que o vetor de tração ( $\mathbf{t}$ ) é conhecido ao longo do contorno  $S_h$  e o deslocamento  $\mathbf{u}$  é conhecido em  $S_g$ . O contorno total  $S$  é formado por  $S_h$  e  $S_g$ . Logo, pode-se rescrever a Equação 22 como:

$$\left( \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{u} - \int_{S_h} \mathbf{N}^T \mathbf{h} dS - \int_{S_g} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS - \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV - \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_0 dV = 0 \quad (25)$$

Em forma compacta escreve-se:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_b + \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 \quad (26)$$

em que

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (27)$$

$$\mathbf{f}_b = \int_{S_h} \mathbf{N}^T \mathbf{h} dS + \int_{S_g} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS \quad (28)$$

$$\mathbf{f}_0 = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_0 dV \quad (29)$$

$$\mathbf{f}_1 = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{X} dV \quad (30)$$

em que  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez,  $\mathbf{f}_b$  é o vetor de forças na superfície,  $\mathbf{f}_1$  é o vetor de cargas e  $\mathbf{f}_0$  é  $\boldsymbol{\epsilon}_0$  vetor de deformações iniciais.

Na análise termomecânica parcialmente acoplada a deformação inicial  $\epsilon_0$  é a deformação térmica, logo, uma análise térmica deve ser realizada antes da análise mecânica com o intuito de obter a distribuição de temperatura [19]. Neste caso, a deformação inicial  $\epsilon_0$  é dada por:

$$\epsilon_0 = \alpha (T_{abs} - T_{ref}) \delta_{ij} \quad (31)$$

em que  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica,  $T_{ref}$  é a temperatura inicial,  $T_{abs}$  é a temperatura final.

Para definir o campo de temperatura final deve-se realizar uma análise térmica, como os problemas abordados nesse artigo são em regime permanente com temperaturas prescritas na superfície, escreve-se a equação matricial de elementos finitos da seguinte forma:

$$\mathbf{T} \mathbf{k} = \mathbf{f} \quad (32)$$

em que  $\mathbf{k}$  é a matriz de condutividade térmica,  $\mathbf{T}$  é a temperatura no elemento e  $\mathbf{f}$  é o vetor de forças externas. A matriz de condutividade e de fluxo são calculadas como:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{k} \mathbf{B} dV \quad (33)$$

$$\mathbf{f} = [\mathbf{N} \mathbf{A} \mathbf{q}]_{\Omega} + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{Q} dV \quad (34)$$

em que  $\mathbf{Q}$  é a taxa de geração de calor interna,  $\mathbf{q}$  é o fluxo prescrito no contorno  $\Omega$ ,  $A$  é a área,  $k$  é a condutividade térmica,  $\mathbf{N}$  são as funções de forma e  $\mathbf{B}$  é dado por  $\partial \mathbf{N}$ . Recomenda-se Cook et al. [18], Ottosen e Petersson [19], Jacob e Ted [20] para maiores detalhes sobre a formulação para o método de elementos finitos.

### 3.4 Aplicações a materiais com gradação funcional

As equações matriciais expostas na subseção 3.3 utilizam modelos constitutivos, por exemplo, a Equação 32 utiliza a condutividade térmica e na Equação 21 há a matriz constitutiva que depende do módulo de elasticidade, Poisson e do coeficiente de expansão térmica. Essas propriedades não são constantes para materiais com gradação funcional, variando geralmente na espessura. Portanto, no procedimento de análise deve-se considerar essa variação.

O presente trabalho utiliza sub-rotinas do usuário no software ABAQUS para a modelagem desses tipos de materiais, essa metodologia já vem sendo empregada em alguns trabalhos, tais como em [9, 10]. Nesses trabalhos foram utilizadas duas sub-rotinas UMATHHT e a UMAT, a primeira permite a gradação de propriedades utilizadas no problema de transferência de calor, tais como a condutividade térmica e o calor específico, e a última permite a modelagem das propriedades mecânicas em função da espessura e da temperatura.

## 4 Exemplos de validação

No primeiro exemplo desse artigo, o qual tem como fim a validação dos modelos utilizados, é realizado uma modelagem de placas de materiais com gradação funcional através de subrotinas (UMATHHT e UMAT) desenvolvidas neste trabalho e implementadas no software ABAQUS. Os resultados são comparados com os obtidos por Reddy e Cheng [6]. Neste exemplo foi realizada a modelagem de placas quadradas de largura ( $L$ ) e espessura ( $H$ ), cuja a relação  $L/H$  é igual a 10, sob efeitos de ou carga mecânica ou carga térmica.

Os materiais utilizados foram zircônia e monel, o método de homogeneização utilizado foi o de Mori-Tanaka. As propriedades utilizadas para a zircônia foram: coeficiente de expansão térmica de  $10 \times$

$10^{-6}(1/K)$ , módulo volumétrico de 125,83 GPa, módulo de cisalhamento de 58,08 GPa e coeficiente de condutividade térmica de 2,09 W/m K. As propriedades para o monel foram: coeficiente de expansão térmica de  $15 \times 10^{-6} (1/K)$ , módulo volumétrico de 227,24 GPa, módulo de cisalhamento de 65,55 GPa e coeficiente de condutividade térmica de 25 W/m K.

A distribuição de fração de volume da cerâmica é dada conforme:

$$V_c = \left(\frac{x_3}{h}\right)^N \quad (35)$$

em que  $h$  representa a espessura e  $N$  o índice da fração de volume.

Primeiramente, modelou-se a placa com a presença apenas da carga térmica e com índice de fração de volume igual a 2. Como adotou-se o acoplamento parcial, resolveu-se primeiro o problema de distribuição de temperatura em que se tem a seguinte condição de contorno:

$$T = 0 \quad em \ x = 0, L \quad e \quad em \ y = 0, L \quad (36)$$

A única carga térmica não nula é aplicada no topo da superfície, conforme:

$$T = \tilde{T} \sin\left(\frac{m_1\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m_2\pi}{L}\right) \quad (37)$$

em que  $\tilde{T}$  representa a amplitude da carga. Neste trabalho assumiu-se que  $m_1, m_2$  e  $\tilde{T}$  são iguais à unidade.

Reddy e Cheng [6] normalizaram os valores de pico da temperatura da seguinte forma:

$$\bar{T} = \frac{T(x_3)}{\tilde{T}} \quad (38)$$

Para resolver o problema de distribuição de temperatura utilizou-se o elemento DC3D20, com uma malha estruturada com um total de 8000 elementos. Obteve-se o perfil de temperatura mostrado na Figura 3.

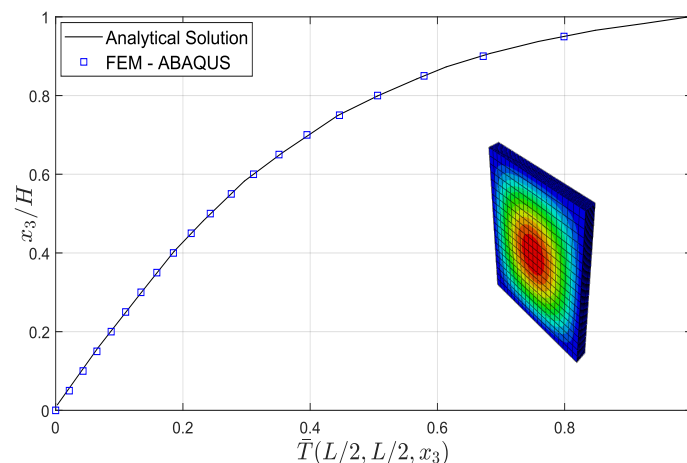


Figura 3. Perfil de temperatura

Após a obtenção do campo de temperatura foi necessário realizar uma análise mecânica na qual foi utilizado o elemento C3D20R e foram consideradas as seguintes condições de contorno:

$$u_2 = u_3 = \sigma_{11} = 0 \quad em \ x = 0, L \quad (39)$$

$$u_1 = u_3 = \sigma_{22} = 0 \quad em \ y = 0, L \quad (40)$$



Considerou-se que a temperatura de  $0^\circ$  corresponde à situação livre de tensão e normalizaram-se os deslocamentos e tensões da seguinte maneira:

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{PL} \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{PB} \quad (41)$$

em que  $P = \alpha \tilde{T}$ ,  $\alpha$  é igual a  $1 \times 10^{-6}$  e  $B = 1$  GPa.

A resposta mecânica obtida pela aplicação da carga térmica por meio de uma análise parcialmente acoplada é mostrado na Figura 4 e na Figura 5.

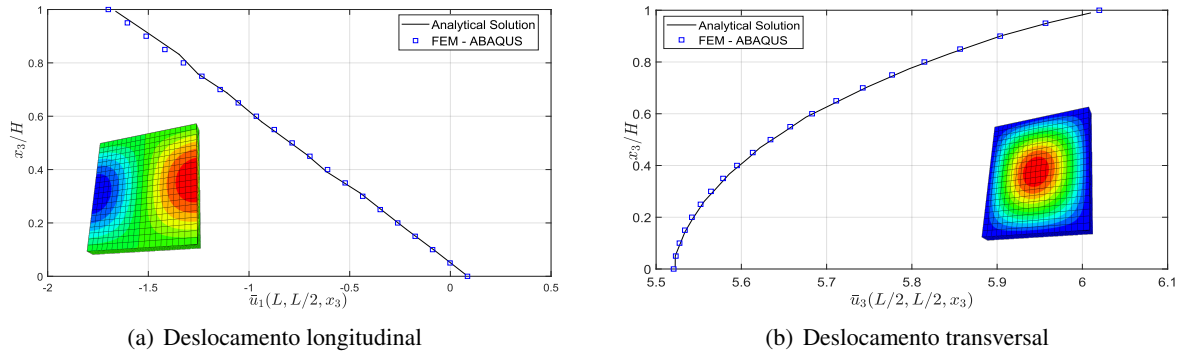


Figura 4. Deslocamentos devido à carga térmica

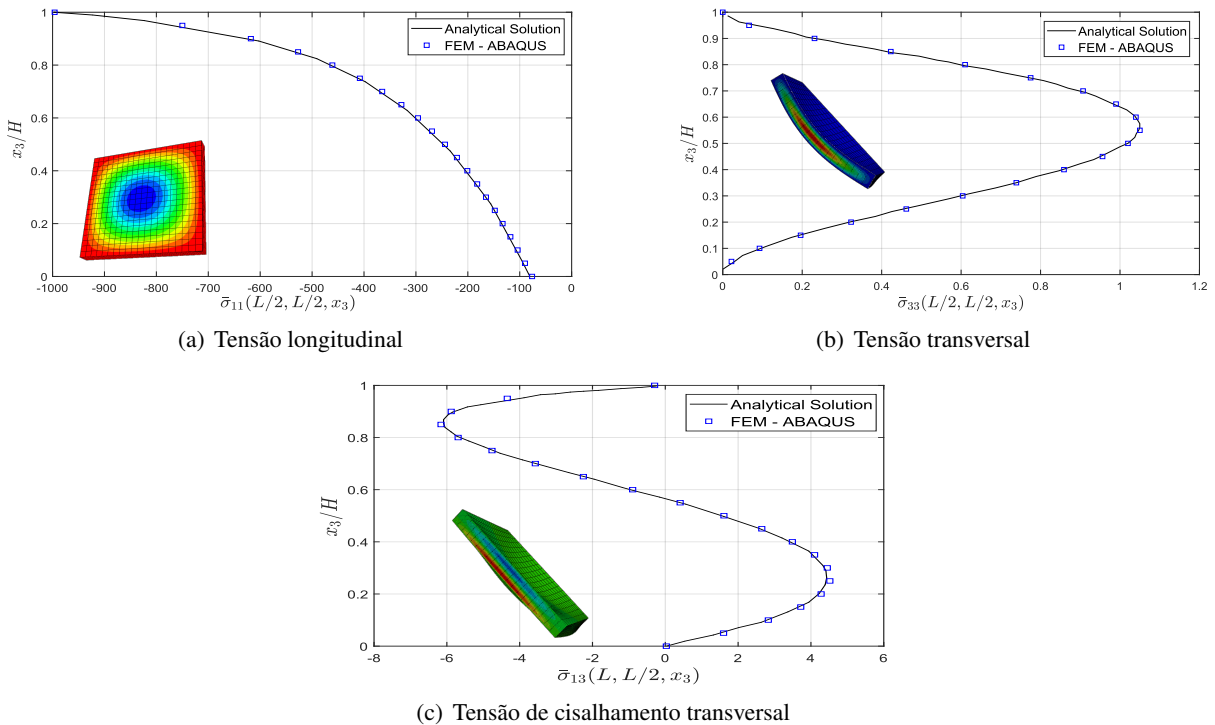


Figura 5. Tensões devido à carga térmica

O outro exemplo modelado por Reddy e Cheng [6] e utilizado neste trabalho para validar o modelo foi com a aplicação de apenas carga mecânica no topo da estrutura, com índice de fração de volume (N) igual a 1. No exemplo foi considerado a relação  $L/H$  igual a 10 com carga, condições de contorno e normalização representados a seguir:

$$q = \bar{q} \sin\left(\frac{m_1 \pi}{a}\right) \sin\left(\frac{m_2 \pi}{a}\right) \quad (42)$$

$$u_2 = u_3 = \sigma_{11} = 0 \quad \text{em } x = 0, L \quad (43)$$

$$u_1 = u_3 = \sigma_{22} = 0 \quad \text{em } y = 0, L \quad (44)$$

$$\bar{u}_i = \frac{u_i}{PL} \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{PB} \quad (45)$$

em que  $P = \frac{\bar{q}}{B}$  e  $B = 1$  GPa.

Utilizando uma malha com 8000 elementos do tipo C3D20R, obteve-se os resultados mostrados nas Figuras 6 e 7.

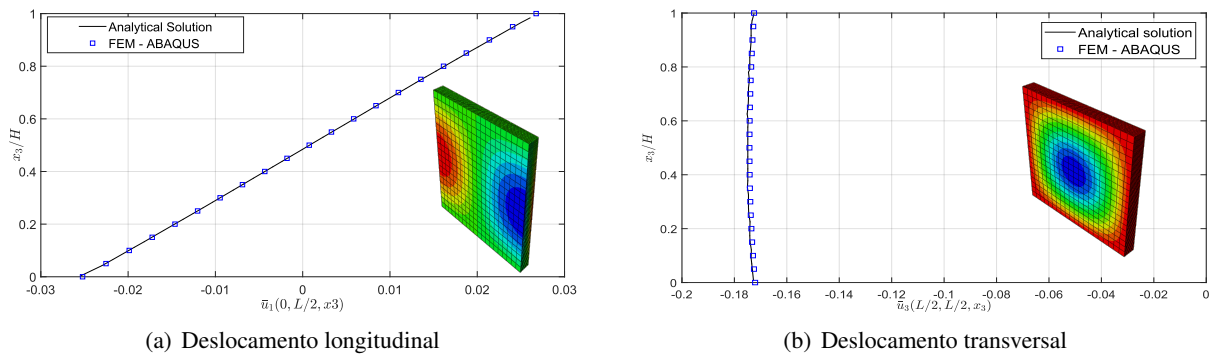


Figura 6. Deslocamentos devido a carga mecânica

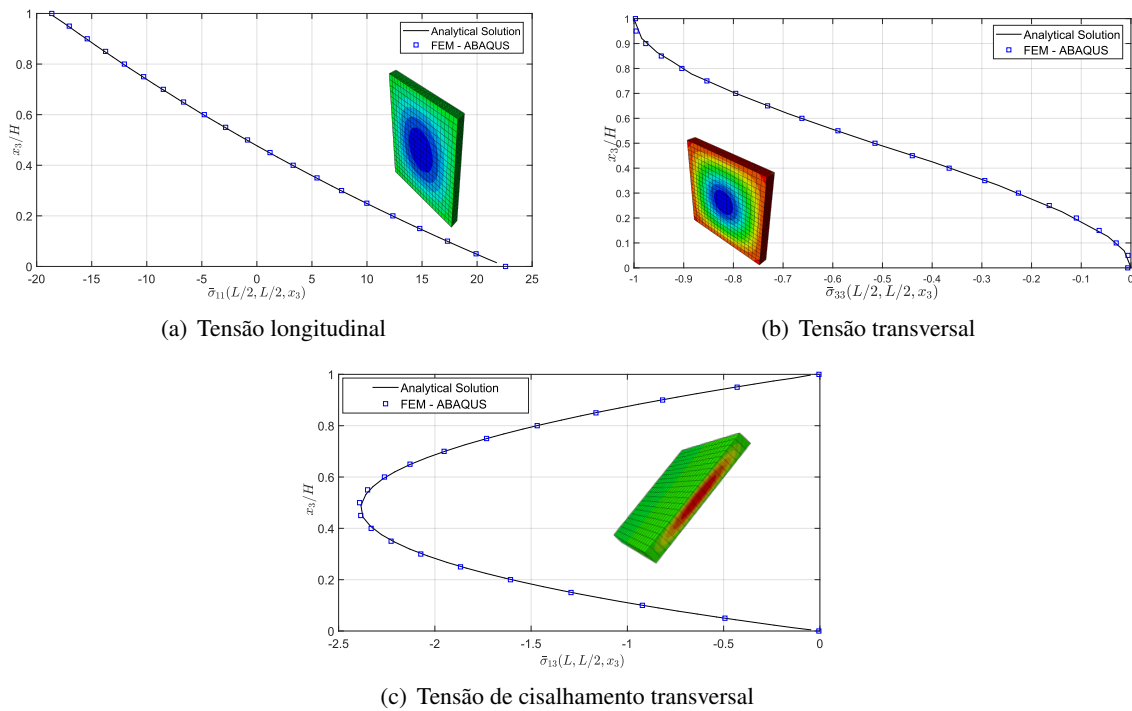


Figura 7. Tensões devido a carga mecânica

Percebe-se excelente convergência entre os resultados propostos por Reddy e Cheng [6] e os resultados obtidos a partir de sub-rotinas implementadas no software ABAQUS. Como este exemplo, Reddy e Cheng [6] vem sendo utilizado como testes de validação em outros trabalhos, a boa convergência obtida permite-nos validar os modelos constitutivos adotados e implementados através de sub-rotinas do usuário no software ABAQUS.

## 5 Estudo Paramétrico

Foi realizado um estudo paramétrico do compósito formado por alumínio e carbetto de silício. Este compósito é utilizado quando se pretende fornecer resistência térmica às estruturas, assim como boas propriedades mecânicas tais como dureza e ductilidade. Pode-se citar o uso dessa estrutura em pistões de ignição a diesel, carcaças de carros de corrida e outros.

O estudo paramétrico foi realizado em placas esbeltas com relação largura/espessura igual a 50 sob diferentes frações de volume ( $N$  de 0,5; 1,0 e 2,0), conforme a Figura 2. Realizaram-se análises, também, segundo diferentes métodos de homogeneização sob um acoplamento parcial entre os campos térmicos e mecânicos. Em todos os exemplo assumiu-se a temperatura inicial de  $300K$  e foram adotados as condições de contorno e carregamento descritos a seguir:

$$u_2 = u_3 = \sigma_{11} = 0 \quad em \ x = 0, L \quad (46)$$

$$u_1 = u_3 = \sigma_{22} = 0 \quad em \ y = 0, L \quad (47)$$

$$\sigma = 1000N \quad em \ z = h \quad (48)$$

$$T_1 = 300K \quad em \ z = 0 \quad (49)$$

$$T_2 = 600K \quad em \ z = h \quad (50)$$

As propriedades consideradas para o alumínio e para o carbetto de silício estão representadas na Tabela 1.

Tabela 1. Propriedades dos constituintes

Propriedades	Alumínio	Carbetto de silício
Módulo de elasticidade (GPa)	70	427
Coefficiente de Poisson	0,30	0,17
Conductividade térmica (W/mk)	204	65
Coefficiente de expansão térmica ( $1 \times 10^{-5}$ )	23	4,30
Massa específica ( $kg/m^3$ )	2707	3100
Módulo volumétrico (GPa)	58,33	215,66
Módulo de cisalhamento (GPa)	26,92	182,48

O módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson, a condutividade térmica, o coeficiente de expansão térmica e a massa específica do alumínio estão em conformidade com as apresentadas por Tran et al. [21], Lee et al. [22] e Reddy [5]. Para o carbetto de silício essas mesmas propriedades estão em conformidade com os trabalhos de Vel e Batra [4, 23]. O módulo volumétrico ( $K$ ) e o módulo de cisalhamento ( $G$ ) foram calculados, respectivamente, pelas das relações:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (51)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (52)$$

## 5.1 Discussão dos resultados

Como trata-se de uma análise parcialmente acoplada, deve-se resolver o problema de transferência de calor para obtenção da distribuição de temperatura, o problema térmico em questão pode ser caracterizado como de regime permanente. Portanto, a propriedade considerada de maior importância é a condutividade térmica, sendo essencial avaliá-la segundo os dois métodos de homogeneização. O índice de fração de volume permite a obtenção de diferentes concentrações de cerâmica e metal ao longo da espessura, a Figura 2 mostra a distribuição das frações de volume segundo os índices ( $N$ ) de 0,5; 1 e 2. A representação da variação da condutividade térmica e do perfil de temperatura segundo os dois métodos de homogeneização para as diferentes frações de volume encontram-se representados nas Figuras 8, 9 e 10.

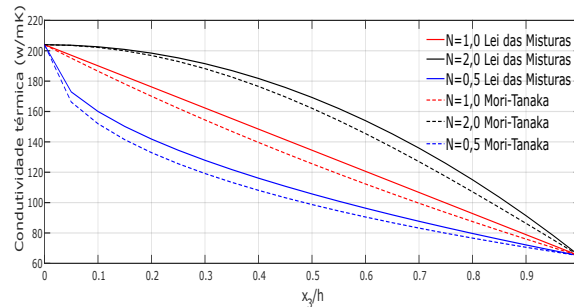


Figura 8. Condutividade térmica pelos métodos de Mori-Tanaka e Lei das misturas

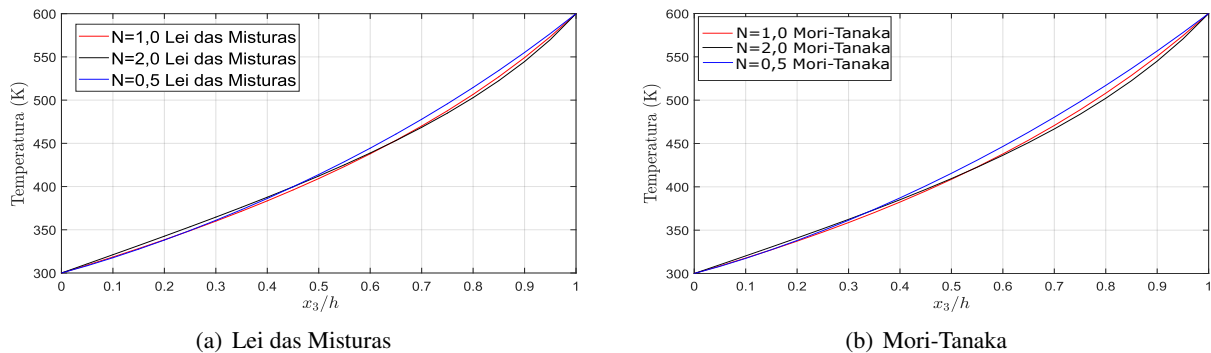


Figura 9. Perfis de temperatura por diferentes métodos de homogeneização

A partir da Figura 8, percebe-se que os dois métodos de homogeneização fornecem resultados similares para a condutividade térmica, entretanto, a lei das misturas fornece valores ligeiramente maiores em relação aos valores de condutividade térmica homogeneizada através do método de Mori-Tanaka. A Figura 9 mostra que para  $N=0,5$  tem-se maiores gradientes de temperatura entre  $x_3/h$  de 0,95 até 0,45 quando comparado aos valores considerando  $N=2$ , entretanto, isso se inverte aproximadamente entre  $x_3/h$  de 0,45 até 0,05. A Figura 10 mostra que não há grande diferença na distribuição de temperatura quando se utiliza um ou outro método de homogeneização, isso se explica pela pequena diferença entre os valores obtidos pelos dois métodos para a homogeneização do coeficiente de condutividade térmica.

A partir da Figura 11, percebe-se que a variação do coeficiente de expansão térmica apresenta resultados similares para ambos os métodos, mas a homogeneização pela lei das misturas apresenta valores ligeiramente maiores em relação à homogeneização realizada segundo o método de Mori-Tanaka. O cálculo da variação do módulo de elasticidade apresenta valores bem distintos quando homogeneizados segundo a lei das misturas e de acordo com Mori-Tanaka, a lei das misturas fornece valores maiores do que os obtidos pelo método de Mori-Tanaka para a homogeneização dessa propriedade. O cálculo do coeficiente de poisson apresentou valores maiores quando homogeneizado com o método de Mori-Tanaka em relação à homogeneização com a lei das misturas.

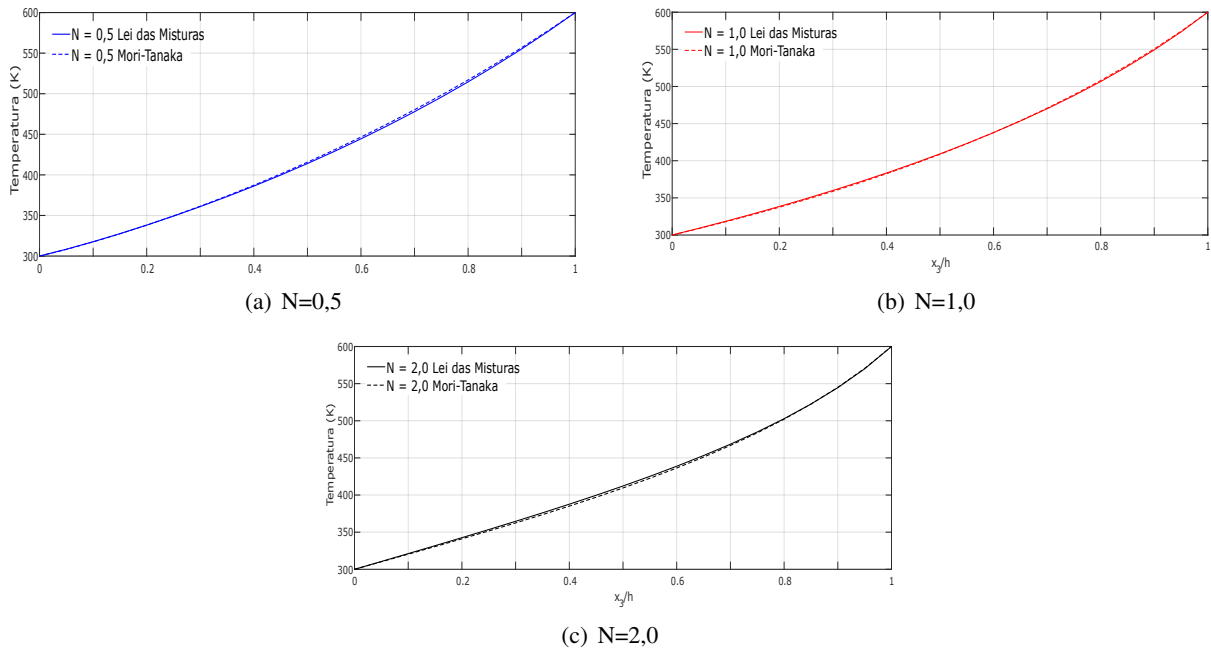


Figura 10. Perfis de temperatura para diferentes frações de volume

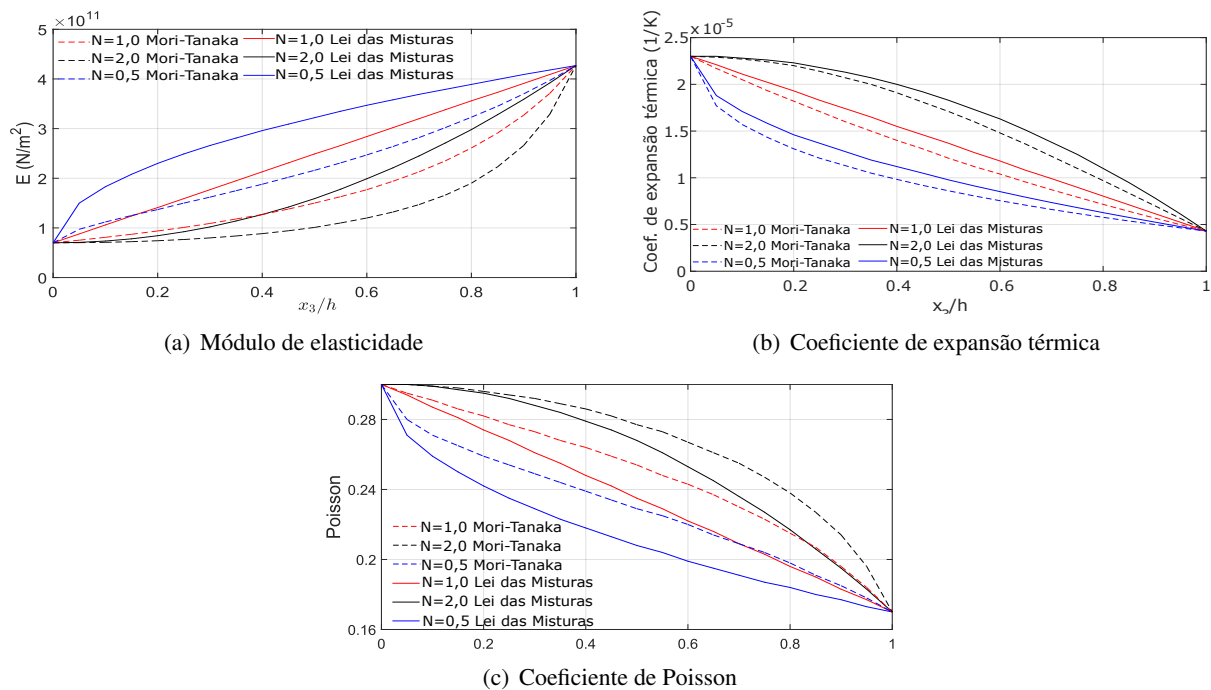


Figura 11. Propriedades mecânicas efetivas do MGF

A partir da Figura 12, percebe-se que os maiores deslocamentos que ocorrem na direção longitudinal e transversal, ocorrem nos compósitos com maior porcentagem de metal. Esse resultado está conforme ao esperado, pois, como o módulo de elasticidade da cerâmica é mais elevado, materiais que possuem maior concentração de cerâmica sofrem deslocamentos menores. Além disso, o coeficiente de expansão térmica do metal é mais elevado, ocasionando maiores deslocamentos aos materiais com maior porcentagem de metal. Observa-se também que os deslocamentos obtidos utilizando a homogeneização pela lei das misturas são ligeiramente maiores aos obtidos utilizando a homogeneização pelo método de Mori-Tanaka.

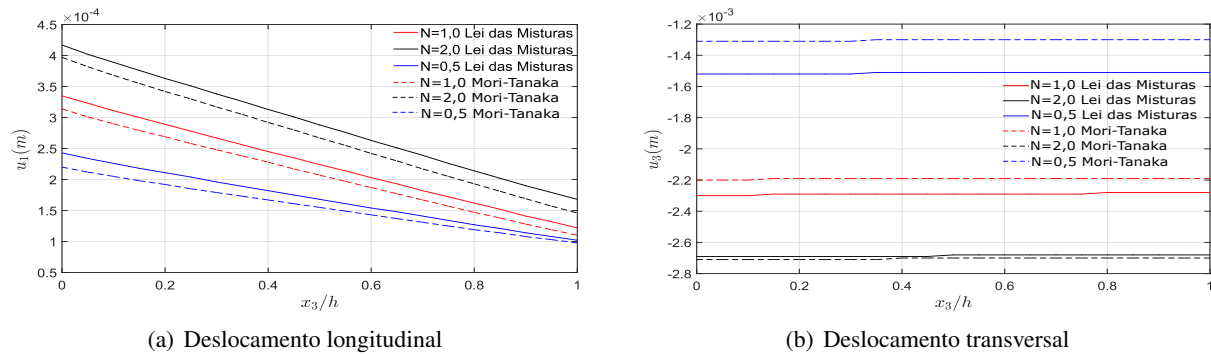


Figura 12. Deslocamentos segundo diferentes métodos de homogeneização

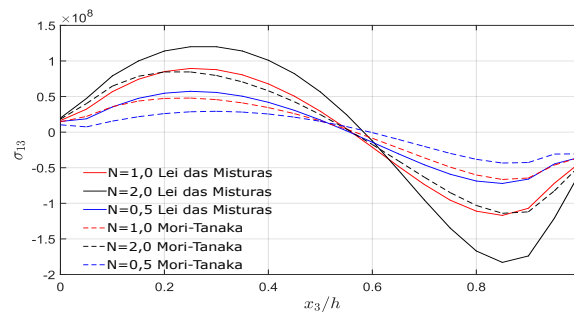


Figura 13. Tensão de cisalhamento segundo diferentes métodos de homogeneização

Conforme a Figura 13, os materiais que apresentam maior proporção de alumínio tiveram maiores tensões, muito provavelmente devido ao maior coeficiente de expansão térmica que o alumínio possui em relação ao carbetto de silício. Observou-se também que os valores da tensão quando calculados pelo método de homogeneização da lei das misturas apresentaram valores maiores do que quando calculados por Mori-Tanaka, isso pode ser explicado a partir da Figura 11, onde observa-se que a lei das misturas fornece valores maiores para o módulo de elasticidade e coeficiente de expansão térmica em relação aos valores calculados através do método de Mori-Tanaka.

## 6 Considerações finais

A partir dos exemplos de validação pôde-se observar que os modelos utilizados como sub-rotinas do usuário implementados no software ABAQUS são válidos, apresentando bons resultados, sob a aplicação das duas condições de carregamento, quando comparados aos benchmarks propostos por Reddy e Cheng [6].

No estudo paramétrico, observou-se que os perfis de temperatura obtidos com a utilização de um ou outro método de homogeneização não são muito diferentes, uma vez que, os valores da condutividade térmica calculados segundo um ou outro método de homogeneização não são significativamente diferentes.

Entretanto, as respostas mecânicas são bem diferentes, uma vez que os dois métodos trazem valores para o módulo de elasticidade diferentes. Notou-se também que os deslocamentos longitudinais homogeneizados com o método de Mori-Tanaka são menores do que os homogeneizados com a lei das misturas, o mesmo ocorre para os deslocamentos transversais.

A respeito das tensões transversais ( $\sigma_{13}$ ), observou-se que os compósitos com maior porcentagem de alumínio apresentam maiores valores de tensão, uma vez que apresentam maior coeficiente de expansão térmica. Observou-se, também, que os valores da tensão quando calculados pelo método de homogeneização da lei das misturas apresentaram valores maiores do que quando calculados por Mori-Tanaka.

## 7 Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo auxílio financeiro no desenvolvimento deste trabalho.

## Referências

- [1] Koizumi, M. F. G. M., 1997. FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, vol. 28, n. 1-2, pp. 1–4.
- [2] H-S, S., 2009. *Functionally graded materials : nonlinear analysis of plates and shells*, volume 1. Taylor & Francis Group, Boca Raton; New York; London, first edition.
- [3] Gupta, A. & Talha, M., 2015. Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures. *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 79, pp. 1–14.
- [4] Vel, S. S. & Batra, R. C., 2002. Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. *AIAA Journal*, vol. 40, n. 7, pp. 1421–1433.
- [5] Reddy, J. N., 2000. Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, n. 1-3, pp. 663–684.
- [6] Reddy, J. & Cheng, Z.-Q., 2001. Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 20, n. 5, pp. 841–855.
- [7] Brischetto, S., Leetsch, R., Carrera, E., Wallmersperger, T., & Kröplin, B., 2008. Thermo-mechanical bending of functionally graded plates. *Journal of Thermal Stresses*, vol. 31, n. 3, pp. 286–308.
- [8] Alibeigloo, A., 2010. Exact solution for thermo-elastic response of functionally graded rectangular plates. *Composite Structures*, vol. 92, n. 1, pp. 113–121.
- [9] Burlayenko, V. N., 2016. Modelling thermal shock in functionally graded plates with finite element method. *Advances in Materials Science and Engineering*, vol. 2016, pp. 1–12.
- [10] Burlayenko, V., Altenbach, H., Sadowski, T., Dimitrova, S., & Bhaskar, A., 2017. Modelling functionally graded materials in heat transfer and thermal stress analysis by means of graded finite elements. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 45, pp. 422–438.
- [11] Swaminathan, K. & Sangeetha, D., 2017. Thermal analysis of FGM plates – a critical review of various modeling techniques and solution methods. *Composite Structures*, vol. 160, pp. 43–60.
- [12] COSTA, E. J. H., 2017. Homogeneização de compósitos reforçados por fibras considerando efeitos de interfases. Master's thesis, Universidade Federal de Alagoas.
- [13] Caraballo, S., 2011. *Thermo-Mechanical Beam Element for Analyzing Stresses in Functionally Graded Materials*. PhD thesis, University of South Florida.
- [14] Biot, M. A., 1956. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *Journal of Applied Physics*, vol. 27, n. 3, pp. 240–253.
- [15] Carrera, E., Fazzolari, F. A., & Cinefra, M., 2016. *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications*. Academic Press.
- [16] Boley, B. A. & Weiner, J. H., 2012. *Theory of thermal stresses*. Courier Corporation.
- [17] Hetnarski, R. B. & Eslami, M. R., 2009. *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications (Solid Mechanics and Its Applications)*. Springer.

- [18] Cook, R. D. et al., 2007. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons.
- [19] Ottosen, N. S. & Petersson, H., 1992. *Introduction to the Finite Element Method*. Prentice-Hall.
- [20] Jacob, F. & Ted, B., 2007. *A first course in finite elements*. Wiley.
- [21] Tran, L. V., Thai, C. H., & Nguyen-Xuan, H., 2013. An isogeometric finite element formulation for thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 73, pp. 65–76.
- [22] Lee, Y., Zhao, X., & Liew, K. M., 2009. Thermoelastic analysis of functionally graded plates using the element-free kp-ritz method. *Smart Materials and Structures*, vol. 18, n. 3, pp. 035007.
- [23] Vel, S. S. & Batra, R., 2003. Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, n. 25, pp. 7181–7196.