

## **ANÁLISE DE FORMULAÇÕES DE PROBLEMAS DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL**

*Marcelo Araujo da Silva*

*Rua Arcturus, 03 (Jd. Antares), Edifício Delta, Sala 386, CEP: 09606-070, São Bernardo do Campo – SP, Brazil, Phone: +55 11 2320-6388*

*E-mail: [marcelo.araujo@ufabc.edu.br](mailto:marcelo.araujo@ufabc.edu.br)*

**Resumo.** A formulação clássica dos problemas de confiabilidade estrutural, como aquela utilizada nos métodos GRG (Generalized Reduced Gradient) e FORM (First Order Reliability Method), é definida através de um problema de otimização, onde se tem as variáveis aleatórias como variáveis de projeto, o índice de confiabilidade como a função objetivo e a restrição de igualdade dada pela função de performance, calculada como a margem de segurança. O índice de confiabilidade pode ser definido como a menor distância, no espaço das variáveis reduzidas, entre a função de performance e a origem do sistema. Então o problema de confiabilidade é usualmente formulado como: determinar as variáveis de projeto (variáveis aleatórias) que minimizem a função objetivo (índice de confiabilidade) sujeito à restrição de igualdade (margem de segurança). Como a função objetivo é a distância do projeto até a origem, no espaço das variáveis reduzidas, não importa na equação se estas variáveis apresentam valores positivos ou negativos. Este fato pode trazer problemas para a solução, pois o sinal destas variáveis interfere significativamente no cômputo da probabilidade de falha do modelo analisado. Serão mostrados exemplos onde esta formulação não é válida. Conclui-se no trabalho que as formulações mais adequadas são aquelas baseadas na definição do índice de confiabilidade como sendo a razão entre a média e o desvio padrão da função de desempenho. Formulações como o Processo de Monte Carlo (MC) usam esta definição e, portanto, não causam prejuízos aos resultados obtidos, sendo mais confiáveis, principalmente em problemas mais complexos, com um número significativo de variáveis aleatórias. Serão apresentados exemplos com a utilização do método GRG e do Processo de Monte Carlo e mostradas as discrepâncias daquele e dos resultados coerentes dados por este em alguns problemas clássicos. Sugestões para estudos futuros também serão apresentadas.

**Palavras-chave:** Confiabilidade Estrutural, Índice de Confiabilidade, Método GRG, Processo de Monte Carlo.

## **1 Introdução e Revisão Bibliográfica**

A análise dos problemas aqui apresentados tem por objetivo mostrar as limitações de alguns métodos extremamente usuais nos processos de determinação da confiabilidade estrutural. Serão utilizados os métodos GRG e o Processo de Monte Carlo. Aquele, por ter uma formulação baseada num problema de otimização, tem como variáveis de projeto as variáveis aleatórias, a função objetivo é o índice de confiabilidade e a restrição de igualdade é a função de performance, definida aqui como a margem de segurança do sistema estrutural analisado. Já o Processo de Monte Carlo é definido pela geração de valores aleatórios para as variáveis de projeto e então o cálculo da média e o desvio padrão da função de performance. Neste o índice de confiabilidade é definido como a razão entre a média e o desvio padrão da função de performance.

No caso do método GRG, o índice de confiabilidade é definindo como a distância entre o projeto atual e a origem do sistema no espaço das variáveis aleatórias reduzidas, respeitando-se a restrição de que a margem de segurança deve ser nula. Para o cálculo da distância, as variáveis reduzidas são elevadas ao quadrado, somadas e então computada a raiz quadrada desta soma. Ao se elevar ao quadrado as variáveis reduzidas, perde-se a informação se ela é positiva ou negativa. Por exemplo, num caso onde a variável de projeto é a carga atuante numa viga, deseja-se que esta carga seja majorada à partir de um valor médio. Neste caso a variável reduzida deve ser positiva para se ter uma segurança adequada. No caso da variável aleatória ser a resistência do material da viga, é desejável que a resistência considerada no cálculo seja um valor menor do que a média, portanto com a variável reduzida negativa. Observa-se que este projeto apresenta uma certa segurança, visto que a força externa considerada é superior à média e a resistência considerada é inferior à média.

Agora imagine uma situação onde a viga possui um projeto não seguro, onde para se obter o equilíbrio entre a carga externa e a resistência, minora-se a força (variável reduzida negativa) e majora-se a resistência (variável reduzida positiva) em relação à média. Neste caso, observe que o projeto não é seguro, mas ao se elevar ao quadrado as variáveis reduzidas, perde-se a informação de que as mesmas são positivas ou negativas e portanto pode-se ter um índice de confiabilidade igual ao do projeto do parágrafo anterior, mas que não reflete a probabilidade de falha do modelo, muito pelo contrário, fornece uma informação errônea de que o projeto é seguro, mas que na verdade não é. Com o Processo de Monte Carlo, pelo fato da média do função de performance poder ser negativa ou positiva, não se perde a informação do sinal das variáveis reduzidas, conferindo à análise um índice de confiabilidade correto que pode indicar claramente se o projeto é seguro ou não.

Foi realizada uma revisão da bibliografia sobre os principais métodos para o cálculo da confiabilidade estrutural. Os trabalhos lidos vão desde uma revisão geral das principais ferramentas e conceitos básicos até aplicações avançadas com algoritmos e problemas específicos. Apesar da grande quantidade de referências disponíveis, procurou-se focar nos métodos e estruturas similares às analisadas no presente trabalho.

O trabalho de Tao (2017) apresenta um novo modelo, no qual ferramentas da lógica Fuzzi são combinadas para representar incertezas epistêmicas. Uma Markov Chain Monte Carlo (MCMC – Cadeia de Markov com Simulação de Monte Carlo) é usada para resolver problemas de confiabilidade introduzindo eventos intermediários que representam a ruptura do sistema estrutural. O uso da Simulação de Monte Carlo foi realizado por Li (2015) em cujo trabalho são analisados os componentes internos das engrenagens de uma turbina eólica visando melhorar o cômputo sua confiabilidade. A relação entre os diferentes componentes internos é abordada através de árvores de falhas. Os resultados obtidos nesta formulação foram validados através da metodologia de rede Bayesiana.

A comparação entre o Processo de Monte Carlo e o método FORM foi realizada por Sciuvia (2003). Foram estudadas cinco diferentes variações destes métodos, os quais foram aplicadas a dois

exemplos, sendo uma estrutura de material isotrópico e outra com material compósito laminado. As variáveis aleatórias consideradas foram as forças, a geometria e a propriedade dos materiais, todos com distribuição normal não-correlacionadas. O principal objetivo deste trabalho foi analisar a performance dos métodos utilizados. Jin (1993) utilizou o Processo de Monte Carlo juntamente com o Método dos Elementos Finitos para o cálculo da confiabilidade de um complexo sistema de rolamentos, trabalhando sob pressão, utilizado na indústria petrolífera. A conclusão do autor é que foram necessárias poucas simulações para se obter o valor da confiabilidade do sistema estrutural, mostrando o poder de aplicabilidade dos métodos.

A aplicação do Processo de Monte Carlo, juntamente com uma versão modificada do procedimento de BRANZ, para avaliação de capacidade lateral de paredes de contraventamento em madeira, foi realizada por Foliente et al (2000). Uma das recomendações deste trabalho é que as forças sísmicas sejam tratadas introduzindo incertezas no sistema. Nesta mesma linha, Yen (1987) propõe que a análise da segurança de estruturas submetidas a carregamentos provenientes de fontes geofísicas seja realizada sob um ponto de vista estocástico, introduzindo-se incertezas tanto na estrutura quanto nos carregamentos. O autor aplicou o método MVFOSM e o Advanced First-Order Method, juntamente com uma árvore de falha para determinar a probabilidade de falha do sistema estrutural. Hwang et al (1979) utilizaram como sucesso o método do Lagrangiano aumentado (GLF) e o GRD para a solução de diversos problemas de confiabilidade e de otimização não-linear e afirmam que estes são os melhores métodos entre os muitos algoritmos existentes.

De acordo com Akpan (2015), o projeto tradicional de estruturas navais se baseia em uma combinação de experiência, bom senso e abordagens determinísticas e normalmente ignora o potencial de melhoria de design e outros benefícios oferecidos pelo uso de métodos de confiabilidade e estratégias de otimização estrutural. Neste trabalho foram otimizadas duas estruturas: (1) uma estrutura de navio simples e (2) uma estrutura de navio mais complexa, na tentativa de alcançar a redução de peso em face das restrições sobre a resistência final e capacidade de flambagem. Obteve-se uma redução de peso de 5,6% no caso (1) e de 2,0% no caso (2). Segundo os autores, esses resultados destacam os benefícios potenciais dos métodos de confiabilidade e estratégias de otimização estrutural e incentivam sua implementação durante a fase inicial do projeto estrutural do navio.

O estudo da confiabilidade ao longo do tempo de vigas caixão protendidas, levando-se em consideração a deformação lenta ao longo do tempo, foi realizado por Guo (2016). Ele estudou vários tipos de reforços e suas respectivas confiabilidades. A análise ao longo do tempo foi simulada através de uma análise estática incremental. Já Yanaka (2016) estuda também pontes construídas com vigas protendidas, mas foca em sua durabilidade analisando a confiabilidade da armadura quando esta está submetida a ataques de agentes que provocam corrosão. Este artigo trata do desenvolvimento de recomendações para o design de durabilidade de estruturas em ambientes marinhos do ponto de vista da confiabilidade, levando em consideração o custo do ciclo de vida de uma estrutura. Steinberg (1997) estuda a confiabilidade de conexões tipo “haunch” utilizadas em vigas de concreto protendido. Os resultados apresentados neste artigo mostram que o índice de confiabilidade para esses tipos de conexões é relativamente baixo em comparação com os níveis de confiabilidade encontrados na maioria dos padrões de projeto atualmente em uso.

A análise da confiabilidade de tubos metálicos sob um processo de corrosão foi realizada por Gong (2017) utilizando-se o método FORM. A metodologia envolve primeiro construir duas funções de estado limite equivalentes linearizadas para o segmento de tubulação no espaço normal padrão e então avaliar as probabilidades de vazamento e explosão do segmento incrementalmente ao longo do tempo com base nas funções de estado limite equivalentes. Makhduomi et al (2017) estudam três algoritmos do método de confiabilidade de primeira ordem (FORM) usando a direção de busca baseada no gradiente (steepest descent search direction). Os resultados são comparados para avaliar o índice de confiabilidade de problemas de aço estrutural que são projetados pelo código de construção nacional iraniano. Os componentes de aço projetados pelo código iraniano mostraram bons níveis de confiança com o índice de confiabilidade na faixa de 2,5 a 3,0. O estudo de torres para suporte de

geradores eólicos instalados offshore foi realizado por Kim (2015). É realizada uma análise dinâmica onde a resposta é expressa como a resposta estática multiplicada pelo fator de resposta de pico. O índice de confiabilidade é encontrado usando o método de confiabilidade de primeira ordem (FORM). A análise de falhas por fratura, com uma abordagem sob a ótica da confiabilidade, foi realizada por Beom-Jun et al (2016). Devido às incertezas relacionadas aos parâmetros de avaliação de falhas, como tamanho da falha, tenacidade à fratura, espectro de carga e assim por diante, o conceito de probabilidade é preferível ao determinístico na avaliação de falhas. Neste estudo, foram feitos esforços para desenvolver o procedimento de avaliação de falhas baseada na confiabilidade, que combina procedimentos de avaliação de falhas e os métodos de confiabilidade de primeira e segunda ordem (FORM/SORM). A validade dos resultados obtidos foi verificada comparando-os com os obtidos pela simulação de Monte Carlo. Foi confirmado que a metodologia desenvolvida funcionou perfeitamente no cálculo da confiabilidade sem a demorada simulação de Monte Carlo, segundo os autores.

Reddy (1994) realizou o projeto ótimo de diversos tipos de estrutura impondo um índice de confiabilidade mínimo. Neste caso, o índice de confiabilidade é obtido por interpolação de valores em torno de um valor médio designado. Nesta mesma linha, mas trabalhando no projeto de canais hidráulicos, Adarsh (2013) impõe um determinado índice de confiabilidade e varia demais parâmetros de projeto para se obter uma solução otimizada. Neste caso são utilizados um método avançado de segundo momento de primeira ordem e a Simulação de Monte Carlo, e verificou-se que os resultados de ambas as abordagens mostram boa concordância. Trabalhando também com Simulação de Monte Carlo e com método de segundo momento de primeira ordem, Kareem (1990) fez várias estimativas de confiabilidade de uma chaminé de concreto. Múltiplos modos de falha potencial são representados pela superação do momento admissível em qualquer nível da altura da chaminé. Os limites são estabelecidos com base na teoria existente, levando em consideração não apenas a probabilidade de falha dos modos individuais, mas também as probabilidades conjuntas de falha em quaisquer dois modos. Este autor sugere que a aproximação de segundo-momento de primeira ordem e os métodos de simulação, que combinam a técnica de Monte Carlo com técnicas de redução de variância, possam fornecer resultados precisos para análise de confiabilidade em casos práticos de estruturas excitadas pelo vento. De acordo com Saydam (2013), o índice de confiabilidade de um determinado sistema pode ser calculado usando o método de segundo momento de primeira ordem (FOSM). De acordo com este autor, este método é exato se ambos os efeitos de carga e resistência do sistema seguem distribuições normais ou lognormais. No entanto, a quantidade de erro introduzida pode ser significativa quando as variáveis aleatórias seguem distribuições diferentes de normal ou lognormal.

Greiner (2012) apresenta uma abordagem para otimização simultânea da massa estrutural e confiabilidade em estruturas de treliça. Além do dimensionamento de membros, a seleção de uma topologia ótima a partir de uma estrutura pré-especificada é uma característica da metodologia proposta pelo autor. Para permitir uma busca global, a otimização é realizada usando um algoritmo evolucionário multiobjetivo. No trabalho de Meng et al (2016) um novo método para calcular a probabilidade de falha de uma estrutura submetido à fadiga é proposto, lidando com problemas com incertezas e com variáveis aleatórias. O método é baseado no cálculo dos momentos da função de performance desenvolvendo-a em série de Taylor. Dois exemplos numéricos de complexidade crescente são empregados para demonstrar a viabilidade da abordagem proposta.

Bian (2015) desenvolveu uma nova abordagem baseada em confiabilidade para a análise e projeto de estacas, incorporando os requisitos do Estado Limite de Serviços e do Estado Limite Último da norma LRFD. Três métodos para análise e projeto baseados em confiabilidade foram adotados, sendo eles o método MVFOSM, o AFOSM e o método de simulação de Monte Carlo. Este estudo recomenda o método AFOSM para executar a análise de confiabilidade. Continuando nos trabalhos aplicados a fundações em estacas, vale destacar o trabalho de Kwak (2010), que como parte de um estudo para desenvolver parâmetros para a determinação de fatores de carga e resistência para projeto (LRFD) para estruturas de fundação na Coreia do Sul, calibrou os fatores de resistência para a capacidade de carga estática de estacas de aço no contexto da teoria de confiabilidade. Um banco de dados de 52 resultados de testes de carga estática foi compilado, e os dados foram classificados em dois casos: um valor-N padrão de penetração (SPT) na ponta da pilha (i) menor que 50 e (ii) maior ou

igual a 50. Análises de confiabilidade e calibração de fator de resistência foram realizadas usando o método de confiabilidade de primeira ordem (FORM) e a simulação de Monte Carlo (MCS). Os índices de confiabilidade e os fatores de resistência calculados pelo MCS são estatisticamente idênticos aos computados pelo FORM. Índices de confiabilidade alvo foram selecionados como 2,0 e 2,33 para o caso de um grupo de estacas e 2,5 para o caso de uma estaca isolada. O autor ressalta que os fatores de resistência recomendados por este estudo são específicos para o projeto de fundação de estacas e as práticas de construção e as condições de subsuperfície na Coreia do Sul.

A utilização de dois métodos conjuntamente para a otimização e determinação da confiabilidade foram usados por Meng (2014). Os métodos são o Mean-Value First-Order Saddlepoint Approximation (MVFOOSA) para o cálculo da confiabilidade e o Collaborative Optimization (CO) Method para o processo de otimização. Os autores mostraram que a combinação destes métodos proporcionou uma boa precisão em dois exemplos analisados. De acordo com Haug (2008), devido ao uso de informações completas de distribuição, o MVFOOSA é geralmente mais preciso do que o MVFOOSA com o mesmo esforço computacional. Ainda complementa que ele também é mais eficiente que o FORM porque não é necessário um processo de pesquisa iterativo para o chamado Ponto Mais Provável (ponto ótimo). Estas conclusões são confirmadas pelo autor através de quatro exemplos numéricos.

Al-Harthy e Frangopol (1994) apresentam um procedimento baseado em confiabilidade para o projeto de vigas de concreto protendido. O carregamento, as propriedades do material e os níveis de força de protensão são tratados como variáveis aleatórias. Métodos de confiabilidade, baseados no segundo momento, são usados para calcular as probabilidades de falha das vigas nos estágios inicial e final. Alguns exemplos são resolvidos e gráficos de projeto são fornecidos pelos autores para facilitar a implementação da abordagem proposta. Rackwitz e Flessler (1978) propuseram um algoritmo para o cálculo da confiabilidade estrutural sob uma combinação de carregamentos. Cargas ou quaisquer outras ações sobre estruturas são modeladas como variáveis aleatórias independentes. A função de performance é aproximada em pontos por um hiperplano tangente. O algoritmo de iteração procura um ponto onde a probabilidade de falha dada pelo hiperplano tangente atinge o seu máximo. Qualquer tipo de função de performance e qualquer tipo de distribuição de probabilidade para as cargas podem ser tratados. O método é ilustrado em um exemplo com uma viga parede sem resistência à tração, carregada por um momento fletor e uma força normal.

Um trabalho que chamou bastante a atenção durante a realização desta pesquisa foi o de Pachás (2009), onde é apresentada uma versão do método FORM em bastante detalhes e possibilita uma boa implementação computacional. Além disso, é apresentado um resumo das principais ferramentas estatísticas envolvidas no processo de cálculo da confiabilidade estrutural. As aplicações são na área de estabilidade de talude. Além desse trabalho, materiais didáticos contendo desde os conceitos básicos até abordagens mais sofisticadas, como também o Método dos Elementos Finitos, podem ser encontradas nos trabalhos de Melchers e Beck (2018), Nowak e Colloins (2012) e Ditlevsene Madsen (2005).

## 2 Bases Teóricas

A probabilidade de falha de um modelo pode ser calculada utilizando-se um método de confiabilidade. Usualmente tem-se as variáveis aleatórias designadas por  $x$  e as variáveis reduzidas dadas por  $y$ . A relação entre elas é dada por

$$y_i = (x_i - \mu_i) / \sigma_i, \quad (1)$$

onde  $\mu$  é o vetor das médias e  $\sigma$  o vetor dos desvios padrões. Sendo a média um número positivo,

observe em (1) que se o valor da variável aleatória  $x_i$  for maior que a média,  $y_i$  é positivo, e se for menor  $y_i$  é negativo. No presente trabalho, por questões didáticas, foi considerado que todas as variáveis aleatórias apresentam distribuição normal.

Um clássico problema de confiabilidade pode ser definido como sendo um problema de otimização:

determine  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  que minimize

$$f(\mathbf{x}) = h(\mathbf{y}) = (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)^{0,5} \quad (2)$$

sujeito à

$$g(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) = 0 \quad (3)$$

Neste problema, as componentes do vetor das variáveis de projeto são as variáveis aleatórias  $\mathbf{x}$  e  $F(\mathbf{x})$  é a função de performance que pode representar, na confiabilidade estrutural, a margem de segurança do sistema. O índice de confiabilidade é  $\beta = f(\mathbf{x}^*) = \min f(\mathbf{x})$ , onde  $\mathbf{x}^*$  é a solução do problema definido pelas Equações (2) e (3). Quanto maior o valor de  $\beta$  menor a probabilidade de falha. Observe que na Equação (2) o fato de  $y_i$  ser positivo ou negativo, tendo o mesmo valor absoluto, não interfere no resultado da equação. Este fato pode gerar erros no cálculo de  $\beta$ .

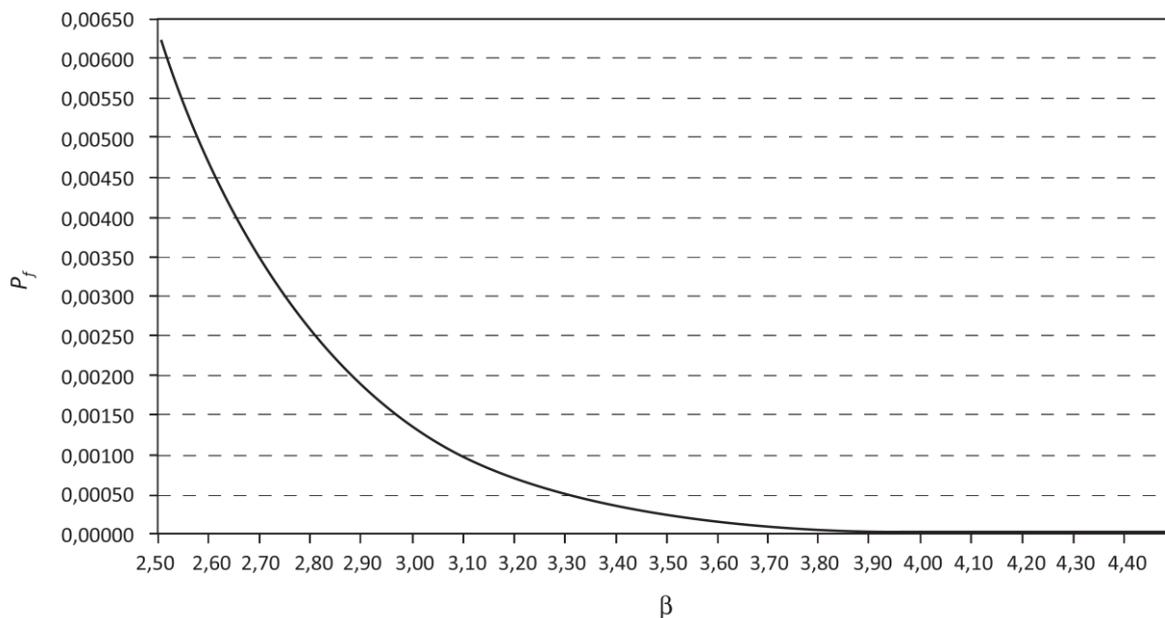


Figura 1 – Probabilidade de falha  $P_f$  em função do índice de confiabilidade  $\beta$  (Brasil e Silva, 2019)

Uma outra definição para o  $\beta$  é a utilizada no Processo de Monte Carlo, sendo:

$$\beta = \mu_F / \sigma_F, \quad (4)$$

onde  $\mu_F$  e  $\sigma_F$  são, respectivamente a média e o desvio padrão da função de performance  $F(\mathbf{x})$ . No Processo de Monte Carlo é gerada uma grande quantidade de números, aleatoriamente, para as variáveis aleatórias e a função  $F(\mathbf{x})$  é computada para cada conjunto de dados gerado. Finalmente são computadas a média e o desvio padrão de  $F$  e com isso calculado  $\beta$ . Observe agora que  $\beta$  pode ser tanto positivo quanto negativo. Um valor de  $\beta$  negativo significa que o sistema tem mais de 50% de

chance de fracasso, enquanto que quando  $\beta$  é positivo o sistema tem menos de 50% de chance de fracasso. Existem situações, quando a segurança da estrutura é baixa, por exemplo, onde  $\beta$  é negativo. Na Figura 1 é mostrado um gráfico relacionando  $\beta$  com a probabilidade de falha.

Em resumo,  $\beta$  pode ser determinado tanto pela formulação das equações (2) e (3), onde foi utilizado neste trabalho o método GRG, quanto pela formulação dada por (4), onde se adotou o Processo de Monte Carlo para a resolução.

### 3 Resultados

#### PROBLEMA 1.1

Considere um problema de uma barra (Figura 2) submetida a uma força de tração  $S (= x_1)$  e que possui uma resistência interna igual a  $R (= x_2)$ . Então a variável aleatória  $x_1$  é a força atuante, enquanto que a variável aleatória  $x_2$  é a resistência do material, com distribuição normal de probabilidade, conforme mostrado na Figura 3.



Figura 2 – Barra submetida à tração

A função de desempenho é

$$F = R - S = x_2 - x_1 \quad (5)$$

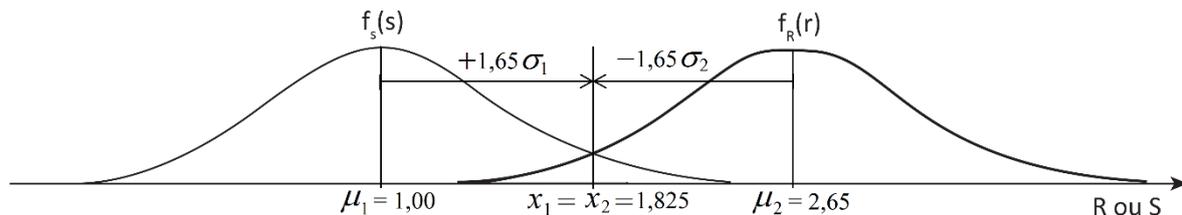


Figura 3 – Problema onde  $S < R$

Observe na Figura 3 que  $\mu_1 = 1,00$  e  $\mu_2 = 2,65$ . Os valores de  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$ . As variáveis reduzidas são calculadas pela expressão (1).

Resolvendo-se o problema descrito pelas equações (2) e (3), com o método GRG, com os dados acima, tem-se que a solução ótima é

$$\mathbf{x}^* = [1,825 ; 1,825]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{y}^* = [1,65 ; -1,65]^T. \quad (6)$$

Com isso o valor de  $\beta$  é

$$\beta = [1,65^2 + (-1,65)^2]^{0,5} = 2,333 \quad (7)$$

e a probabilidade de falha associada é

$$P_f = 0,98\%. \quad (8)$$

Observa-se de (8) que o projeto apresenta uma certa segurança.

Resolvendo-se o mesmo problema com o Processo de Monte Carlo (MC), gerando 1.000.000 de projetos, obtém-se

$$\mu_F = 1,65 \quad \text{e} \quad \sigma_F = 0,71 \quad (9)$$

o que determina um valor de  $\beta$  igual a

$$\beta = \mu_F / \sigma_F = 2,34 \quad (10)$$

e a probabilidade de falha associada é

$$P_f = 0,96\%. \quad (11)$$

Comparando-se os resultados do GRG (7) e (8) com os do MC (10) e (11) observa-se que os resultados são praticamente idênticos, convergindo para um mesmo valor. Neste caso, é válido lembrar que a média da solicitação é menor que a média da resistência, portanto obteve-se um projeto seguro.

### PROBLEMA 1.2

Considere a mesma barra da Figura 2, sendo que as distribuições de probabilidade são mostradas na Figura 4. Observe agora que  $\mu_2$  (média da resistência) é menor que média da solicitação  $\mu_1$ . Trocou-se as posições no gráfico da Figura 3.

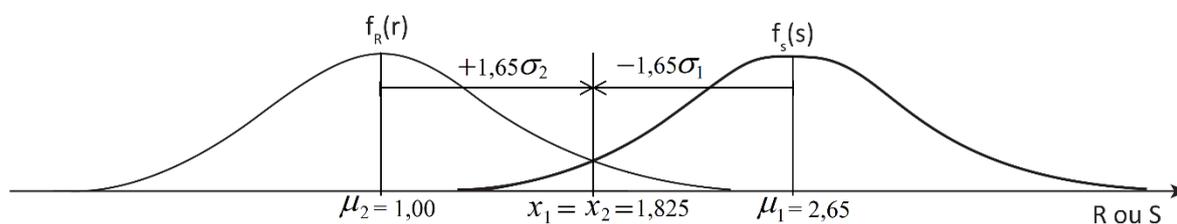


Figura 4 – Problema onde  $R < S$

Observe na Figura 4 que  $\mu_1 = 2,65$  e  $\mu_2 = 1,00$ . Considere que  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$ . As variáveis reduzidas são calculadas pela expressão (1).

Resolvendo-se o problema descrito pelas equações (2) e (3), com o método GRG, com os dados acima, tem-se que a solução ótima é

$$\mathbf{x}^* = [1,825 ; 1,825]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{y}^* = [-1,65 ; 1,65]^T. \quad (12)$$

Com isso o valor de  $\beta$  é

$$\beta = [ (-1,65)^2 + 1,65^2 ]^{0,5} = 2,333 \quad (13)$$

e a probabilidade de falha associada é

$$P_f = 0,98\%. \quad (14)$$

Observa-se de (14) que o projeto, nesta formulação, apresenta uma certa segurança.

Resolvendo-se o mesmo problema com o Processo de Monte Carlo (MC), gerando 1.000.000 de projetos, obtém-se

$$\mu_F = -1,65 \quad \text{e} \quad \sigma_F = 0,71 \quad (15)$$

o que determina um valor de  $\beta$  igual a

$$\beta = \mu_F / \sigma_F = -2,34 \quad (16)$$

e a probabilidade de falha associada é

$$P_f = 99,04\%. \quad (17)$$

Comparando-se os resultados do GRG (14) com o do MC (17) observa-se que os resultados são totalmente discrepantes. Embora o valor absoluto de  $\beta$  seja o mesmo em ambos os casos, eles apresentam sinais contrários, o que muda totalmente a probabilidade de falha do modelo. É intuitivo que quando a média da resistência é inferior à média da solicitação, que o projeto não é seguro e tem uma alta probabilidade de falha. Observa-se nesse caso que a formulação dada pelas equações (2) e (3) não é adequada.

## PROBLEMA 2.1

Considere uma estaca circular vazada, com diâmetro de 42 cm, parede de 9 cm, armadura longitudinal de 8 barras de 12,5 mm (CA-50), com um  $d' = 3,625$  cm e  $f_{ck} = 40$  MPa. O diagrama de interação dessa estaca é mostrado na Figura 5, sendo  $N$  a força axial e  $M$  o momento fletor, com seus respectivos índices que indicam resistência ou solicitação, conforme a NBR-6118 (ABNT, 2014).

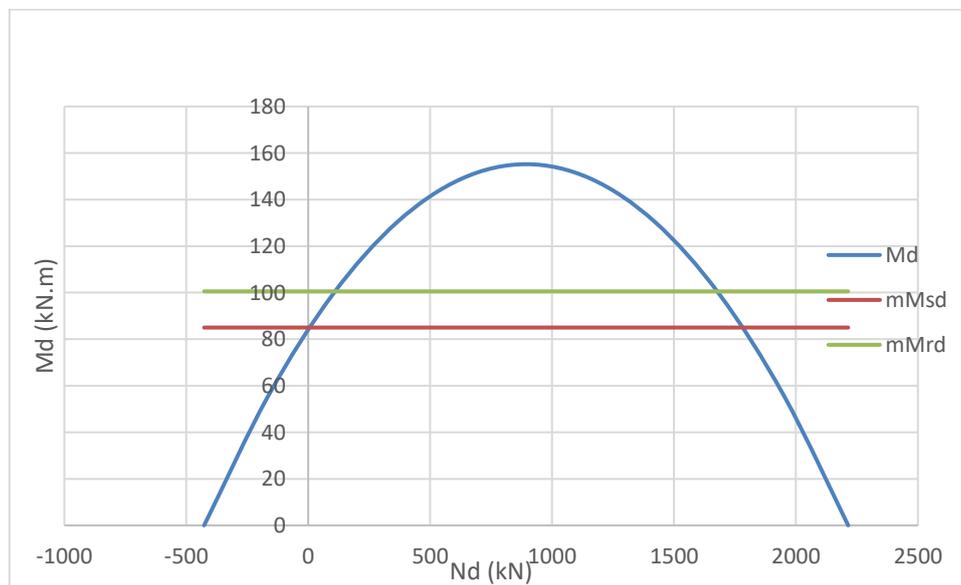


Figura 5 – Diagrama de interação com  $S < R$

Em verde no gráfico (Figura 5) é mostrada a média da resistência, enquanto que em vermelho é mostrada a média da solicitação. Observa-se que a resistência média é maior que a solicitação média, o que indica um projeto com uma certa segurança.

Neste problema, considere que as variáveis aleatórias são  $N_{sd}$  ( $= x_1$ ) e  $M_{sd}$  ( $= x_2$ ). Os valores das médias e desvios padrões das variáveis aleatórias são  $\mu_1 = 110$  kN,  $\sigma_1 = 11$  kN,  $\mu_2 = 85$  kN.m e  $\sigma_2 = 8,5$  kN.m. Observe que neste caso

$$M_{rd} = M_{rd}(N_{sd}), \quad (18)$$

ou seja, o momento resistente é uma função da sollicitação axial. A função de performance é

$$F = M_{rd} - M_{sd} \quad (19)$$

Resolvendo-se o problema descrito pelas equações (2) e (3), com o método GRG, com os dados acima, tem-se que a solução ótima é

$$\mathbf{x}^* = [106 ; 100]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{y}^* = [-0,32 ; 1,77]^T. \quad (20)$$

Com isso o valor de  $\beta$  é

$$\beta = [(-0,32)^2 + 1,77^2]^{0,5} = 1,8 \quad (21)$$

e a probabilidade de falha associada é

$$P_f = 3,6\%. \quad (22)$$

Observa-se de (22) que o projeto, apesar de apresentar um valor baixo para  $\beta$ , comparado com os indicados na literatura (Brasil e Silva, 2019) que é da ordem de 3, apresenta uma certa segurança.

Resolvendo-se o mesmo problema com o Processo de Monte Carlo (MC), gerando 1.000.000 de projetos, obtém-se um valor de  $\beta$  igual a

$$\beta = 1,8 \quad (23)$$

e a probabilidade de falha associada é

$$P_f = 3,6\%. \quad (24)$$

Comparando-se os resultados do GRG (22) com o do MC (24) observa-se que os resultados são idênticos. Neste caso, é válido lembrar que a média da sollicitação é menor que a média da resistência, portanto obteve-se um projeto seguro.

## **PROBLEMA 2.2**

Considerando a mesma estaca, o diagrama de interação é mostrado na Figura 6. Novamente em verde no gráfico é mostrada a média da resistência e em vermelho a média da sollicitação. Observa-se que a resistência média é menor que a sollicitação média, o que indica um projeto com uma segurança muito baixa e certamente com uma alta probabilidade de falha.

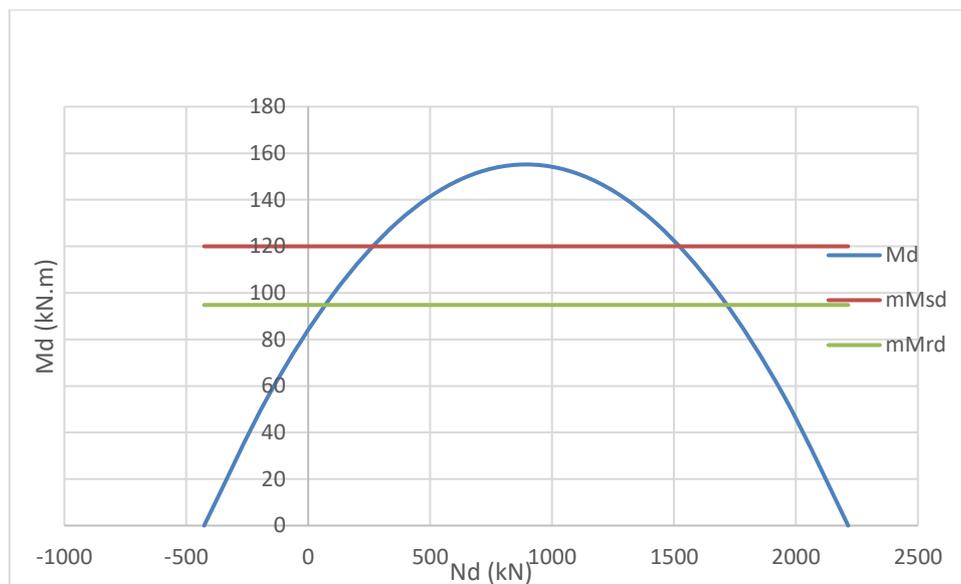


Figura 6 – Diagrama de interação com  $R < S$

Neste problema, considere novamente que as variáveis aleatórias são  $N_{sd}$  ( $= x_1$ ) e  $M_{sd}$  ( $= x_2$ ). Os valores das médias e desvios padrões das variáveis aleatórias são  $\mu_1 = 70$  kN,  $\sigma_1 = 7$  kN,  $\mu_2 = 120$  kN.m e  $\sigma_2 = 12$  kN.m. Observe que neste caso também  $M_{rd} = M_{rd}(N_{sd})$  e que  $F = M_{rd} - M_{sd}$ .

Resolvendo-se o problema descrito pelas equações (2) e (3), com o método GRG, com os dados acima, tem-se que a solução ótima é

$$\mathbf{x}^* = [71 ; 95]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{y}^* = [0,18 ; -2,08]^T. \quad (25)$$

Com isso o valor de  $\beta$  é

$$\beta = [0,18^2 + (-2,08)^2]^{0,5} = 2,09 \quad (26)$$

e a probabilidade de falha associada é

$$P_f = 1,8\%. \quad (27)$$

Observa-se de (27) que o projeto apresenta uma certa segurança.

Resolvendo-se o mesmo problema com o Processo de Monte Carlo (MC), gerando 1.000.000 de projetos, obtém-se um valor de  $\beta$  igual a

$$\beta = -2,09 \quad (28)$$

e a probabilidade de falha associada é

$$P_f = 98,2\%. \quad (29)$$

Comparando-se os resultados do GRG (27) com o do MC (29) observa-se que os resultados são totalmente discrepantes. Embora o valor absoluto de  $\beta$  seja o mesmo em ambos os casos novamente, eles apresentam sinais contrários, o que muda totalmente a probabilidade de falha do modelo. Em mais este exemplo observa-se que a formulação dada pelas equações (2) e (3) não fornece resultados adequados quando a resistência é menor que a solicitação.

## 4 Conclusões

Foram apresentadas no trabalho duas das principais formulações de problemas utilizadas para o cálculo da confiabilidade de sistemas estruturais, sendo a primeira baseada em um problema de otimização, que foi resolvido aqui pelo método GRG (Generalized Reduced Gradient). A segunda fundamenta-se na definição do índice de confiabilidade e foi resolvida pelo Processo de Monte Carlo (MC). Mostrou-se através de dois exemplos resolvidos que a formulação baseada no problema de otimização foi eficaz nos casos onde a solicitação era menor que a resistência, porém ineficaz nos casos onde a resistência era menor do que a solicitação, apresentando valores totalmente contrários à intuição e também à correta solução matemática do problema. Já o MC foi eficaz em ambas as situações e pôde computar com bastante precisão os valores dos índices de confiabilidade. Com isso, conclui-se que a utilização de métodos tais como o GRG e o FORM precisa ser cautelosa em problemas onde se pode ter os valores de resistência menor que a solicitação. Em casos mais complexos onde se possa ter muitas variáveis aleatórias pode-se perder a intuição de engenheiro para a solução do problema, aumentando a chance de falha na aplicação da primeira formulação. Sugere-se para futuros estudos explorar problemas com um grande número de variáveis de projeto e também a comparação de mais métodos para se identificar padrões de comportamento dos principais métodos de confiabilidade empregados.

## Agradecimentos

O autor agradece aos Professores Jasbir S. Arora, da The University of Iowa, e Reylando M.L.R.F. Brasil, da UFABC, pelo apoio e dicas preciosas durante condução deste trabalho. Grande parte desta pesquisa foi realizada na The University of Iowa com Bolsa de Pesquisa no Exterior (BPE) fornecida pela FAPESP sob o número do processo 2018/11820-2, a qual foi recebida com muita gratidão.

## Referencias

- Y. Tao, (2017), A novel evidence-based fuzzy reliability analysis method for structures. *Structural and multidisciplinary optimization* [1615-147X] Ano:2017 v.:55 n.:4 p.:1237 -1249.
- Y. F. Li, (2015), Reliability assessment of generic geared wind turbines by GTST-MLD model and Monte Carlo simulation. *Renewable energy* [0960-1481] Ano:2015 v.:83 n.:C p.:222 -233.
- M. Di Sciuva, (2003), A comparison between Monte Carlo and FORMs in calculating the reliability of a composite structure. *Composite structures* [0263-8223] Ano:2003 v.:59 n.:1 p.:155 -162.
- G. Jin, (1993), Monte Carlo Finite Element Method of Structure Reliability Analysis. *Reliability engineering & systems safety* [0951-8320] Ano:1993 v.:40 n.:1 p.:77 -83
- G. C. Foliente, P. Paevere, T. Saito and N. Kawai, (2000), Reliability Assessment of Timber Shear Walls Under Earthquake Loads. 12th World Conference on Earthquake Engineering 12WCEE 2000, At Auckland, New Zealand.
- B. C. Yen, (1987), Reliability of Hydraulic Structures Possessing Random Loading and Resistance. In: Duckstein L., Plate E.J. (eds) *Engineering Reliability and Risk in Water Resources*. NATO ASI Series (Series E: Applied Sciences), vol 124. Springer, Dordrecht.
- C. L. Hwang, F. A. Tillman and W. Kuo, (1979), Reliability optimization by generalized Lagrangian-function and reduced-gradient methods. *IEEE Trans. Reliab.* R-28, (4) 316 (1979). *Microelectronics and reliability* [0026-2714] Ano:1980 v.:20 n.:5 p.:754 -754.
- U. Akpan, (2015), Reliability-Based Optimal Design of Steel Box Structures. II: Ship Structure Applications. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems*, Part

A: Civil Engineering [2376-7642] Ano:2015 v.:1 n.:3.

- T. Guo, (2016), Time-dependent reliability of strengthened PSC box-girder bridge using phased and incremental static analyses. *Engineering structures* [0141-0296] Ano:2016 v.:117 p.:358 - 371.
- M. Yanaka, (2016), Reliability-based and life-cycle cost-oriented design recommendations for prestressed concrete bridge girders. *Structural Concrete* [1464-4177] Ano:2016 v.:17 n.:5 p.:836 -847.
- E. Steinberg, (1997), Reliability of Structural Steel Haunch Connections for Prestressed Concrete. *Journal of Structural Engineering* [0733-9445] Ano:1997 v.:123 n.:10 p.:1382 -1389.
- C. Gong, (2017), First-order reliability method-based system reliability analyses of corroding pipelines considering multiple defects and failure modes. *Structure and infrastructure engineering* [1573-2479] Ano:2017 v.:13 n.:11 p.:1451 -1461.
- H. Makhduomi, B. Keshtegar, M. Shahraki and S. Quek, (2017), A Comparative Study of First-Order Reliability Method-Based Steepest Descent Search Directions for Reliability Analysis of Steel Structures *Advances in Civil Engineering*, 2017, Vol.2017, 10 pages.
- D. Kim, (2015), Reliability analysis of offshore wind turbine support structures under extreme ocean environmental loads. *Renewable energy* [0960-1481] Ano:2015 v.:79 n.:1 p.:161 -166.
- K. Beom-Jun, K. Jeong-Hwan, K. Yooil, (2016), Engineering criticality analysis on an offshore structure using the first- and second-order reliability method *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering* Volume 8, Issue 6, November 2016, Pages 577-588.
- M. V. Reddy, (1994), Reliability based structural optimization: A simplified safety index approach. *Computers & structures* [0045-7949] Ano:1994 v.:53 n.:6 p.:1407 -1418.
- S. Adarsh, (2013), Reliability analysis of composite channels using first order approximation and Monte Carlo simulations. *Stochastic environmental research and risk assessment* [1436-3240] Ano:2013 v.:27 n.:2 p.:477 -487.
- A. Kareem, (1990), Reliability analysis of wind-sensitive structures. *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics* [0167-6105] Ano:1990 v.:33 n.:3 p.:495 -514.
- D. Saydam, (2013), Applicability of simple expressions for bridge system reliability assessment. *Computers & structures* [0045-7949] Ano:2013 v.:114-115 p.:59 -71.
- D. Greiner, (2012), Truss topology optimization for mass and reliability considerations — co-evolutionary multiobjective formulations. *Structural and multidisciplinary optimization* [1615-147X] Ano:2012 v.:45 n.:4 p.:589 -613.
- G. Meng, X. Feng, L. Zhou and F. Li, (2016), Hybrid reliability analysis of structural fatigue life: Based on Taylor expansion method. *Advances in Mechanical Engineering*, November 2016, Vol.8(11).
- X. Bian, (2015), Incorporating serviceability limit state requirements into reliability-based analysis and design of piles. *KSCE Journal of Civil Engineering* [1226-7988] Ano:2015 v.:19 n.:4 p.:904 -910.
- K. Kwak, (2010), Reliability-based calibration of resistance factors for static bearing capacity of driven steel pipe piles. *Canadian Geotechnical Journal* [0008-3674] Ano:2010 v.:47 n.:5 p.:528 - 538.
- D. Meng, (2014), Mean-value first-order saddlepoint approximation based collaborative optimization for multidisciplinary problems under aleatory uncertainty. *Journal of mechanical science and technology* [1738-494X] Ano:2014 v.:28 n.:10 p.:3925 -3935.
- B. Huang, (2008), Probabilistic uncertainty analysis by mean-value first order Saddlepoint Approximation. *Reliability engineering & systems safety* [0951-8320] Ano:2008 v.:93 n.:2 p.:325 - 336.
- A. S. Al-Harthy and D. M. Frangopol, (1994), Reliability-Based Design of Prestressed Concrete Beams, *ASCE* [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1994\)120:11\(3156\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1994)120:11(3156)) *Journal of Structural Engineering* Vol. 120, Issue 11 (November 1994).
- M. A. C. Pachás, (2009), Análise Limite com Otimizador de Grande Escala e Análise de Confiabilidade, Tese de Doutorado, PUC-RJ., Certificado Digital 0421307/CB – 188f.
- R. Rackwitz and B. Flessler, (1978), Structural reliability under combined random load

sequences, Elsevier, Computers & Structures, Volume 9, Issue 5, November 1978, Pages 489-494  
[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(78\)90046-9](https://doi.org/10.1016/0045-7949(78)90046-9).

- R. E. Melchers and A. T. Beck, (2018), Structural Reliability Analysis and Prediction, 3rd Edition ISBN: 978-1-119-26599-3 Apr 2018 528 pages.

- A. S. Nowak and K. R. Collins, (2012), Reliability of Structures, 2nd Edition, CRC Press, Published December 20, 2012, Textbook - 407 Pages - 200 B/W Illustrations ISBN 9780415675758 - CAT# Y119676.

- O. Ditlevsen and H.O. Madsen, (2005), Structural Reliability Methods. (First edition published by John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 1996, ISBN 0 471 96086 1) Internet edition 2.2.5 July, 2005.

- R. Brasil e M. A. Silva, (2019), Otimização de Projetos de Engenharia, Editora Edgard Blucher.

- Associação Brasileira de Normas Técnicas, (2014), Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento, NBR-6118.