

INTERAÇÃO ENTRE OS MODOS DE FLAMBAGEM LOCAL E DISTORCIONAL EM COLUNAS DE SEÇÃO RACK FORMADAS A FRIO

Raquel Gabriela A. Campos

Eduardo de Miranda Batista

raquel.campos@coc.ufrj.br

batista@coc.ufrj.br

Programa de Engenharia Civil – COPPE – UFRJ

Centro de Tecnologia - Av. Horácio Macedo, s/n - Cidade Universitária, 21941-450, Rio de Janeiro, Brasil

Juarez Moara Santos Franco

juarezfranco@ufrj.br

Instituto de Tecnologia, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Rodovia Br 465, Km 07, s/n - Zona Rural, Seropédica – RJ, Brasil

Resumo. Na última década, diversas pesquisas foram desenvolvidas para investigar a interação local-distorcional de colunas com seções U enrijecido. Entretanto, estender as descobertas para colunas exibindo outras formas de seção transversal é essencial para avaliar a generalidade, abrindo assim o caminho para o desenvolvimento de uma abordagem de projeto baseada no Método da Resistência Direta (MRD) para colunas afetadas pela interação local-distorcional. Deste modo, este trabalho de pesquisa tem como objetivo investigar o comportamento de interação entre os modos de flambagem local e distorcional em perfis de aço formados a frio com paredes finas de seção rack sem furos. O estudo será baseado (i) em resultados experimentais divulgados por pesquisadores anteriores, (ii) no desenvolvimento de um modelo numérico computacional tridimensional apropriado, com a utilização do programa de elementos finitos ANSYS e, (iii) na adoção dos princípios do Método da Resistência Direta (MRD). Espera-se que a combinação dos recursos de análise estrutural citados permita melhorar os procedimentos de projeto de perfis de aço formados a frio com paredes finas de seção rack.

Palavras-chaves: Interação de flambagem local e distorcional; perfil formado a frio; seção rack; método da resistência direta

1 Introdução

Perfis de chapa dobrada são fabricados com paredes finas, característica que os torna suscetíveis a fenômenos de instabilidade chamados de flambagem local, distorcional e global. As seções comumente usadas podem exibir cargas últimas e mecanismos de falha que são afetados pela interação entre esses modos de flambagem, como por exemplo a interação modo local-distorcional (LD).

Na última década, diversas pesquisas foram desenvolvidas para investigar a interação LD de colunas com seções U enrijecido. Entretanto, estender as descobertas para colunas exibindo outras formas de seção transversal é essencial para avaliar a generalidade, abrindo assim o caminho para o desenvolvimento de uma abordagem de projeto baseada no Método da Resistência Direta (MRD) para colunas afetadas pela interação local-distorcional.

Deste modo, este trabalho de pesquisa tem como objetivo investigar o comportamento de interação entre os modos de flambagem local e distorcional em perfis de aço formados a frio com paredes finas de seção rack sem furos de modo a determinar as variáveis relevantes no fenômeno da interação LD. O estudo será baseado em resultados experimentais divulgados por Dinis *et al.* [1] e Vasquez [2] no desenvolvimento de um modelo numérico computacional tridimensional apropriado, com a utilização do programa de elementos finitos ANSYS [3], e na adoção dos princípios do Método da Resistência Direta (MRD) [4].

2 Interação local-distorcional (LD)

A interação local-distorcional pode ocorrer em perfis que possuam geometrias de seção transversal associadas a (i) cargas críticas de flambagem local (P_{crL}) e distorcional (P_{crD}) próximas ou (ii) carga crítica local menor do que a carga crítica distorcional, desde P_{crD} que não exceda a carga de escoamento (P_y) [1].

Segundo Martins *et al.* [5], existem três tipos de interação local-distorcional que devem ser levados em conta: (i) interação verdadeira, que ocorre em colunas com cargas críticas local e distorcional próximas ($0,8 \leq P_{crD}/P_{crL} \leq 1,3$), gerando fortes efeitos de interação, (ii) interação secundária local que ocorre em colunas com carga crítica local maior do que a carga crítica distorcional ($P_{crD}/P_{crL} < 0,8$) e (iii) interação secundária distorcional, que ocorre em colunas com carga crítica distorcional maior do que a carga crítica local ($P_{crD}/P_{crL} > 1,3$). Nos dois últimos casos, a maior carga crítica deve estar significativamente abaixo da carga de escoamento.

A interação LD secundária não se manifesta na análise de flambagem elástica visto que as cargas críticas locais e distorcionais estão razoavelmente distantes, sendo identificadas, portanto, somente na análise de pós-flambagem. Tal fato pode ser observado na Figura 1 retirada do artigo de Dinis *et al.* [1], que apresenta o caminho de equilíbrio de duas colunas U enrijecido com (i) cargas críticas muito próximas e (ii) carga crítica local inferior à carga crítica distorcional.

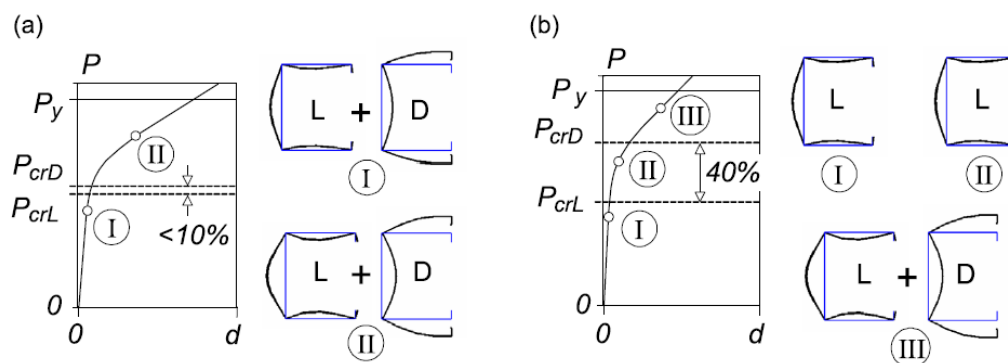


Figura 1 - Caminhos de equilíbrio de duas colunas de perfis U enrijecido
(a) Interação verdadeira (b) Interação secundária [1]

No primeiro caso (Figura 1a) a carga crítica local é apenas 10% inferior à carga crítica distorcional e pode ser observado que a interação começa nos primeiros estágios de carga e evolui à medida que o carregamento progride. Desta forma, as deformações locais e distorcionais ocorrem ao longo de todo o caminho de equilíbrio.

No segundo caso (Figura 1b) a carga crítica local é 40% menor do que a carga crítica distorcional e a deformação é basicamente local até a vizinhança do nível de carregamento crítico de flambagem distorcional. Após atingir a carga crítica distorcional, a interação LD começa a se tornar perceptível.

3 Método da Resistência Direta (MRD)

O Método da Resistência Direta (MRD) foi proposto por Schafer e Peköz [4] com a intenção de contornar os problemas encontrados no Método da Largura Efetiva (MLE). Atualmente, o método aborda as curvas de projeto para colunas que apresentam falhas nos modos local, distorcional, global e de interação local-global, faltando ainda uma normativa para abordagens de projeto em relação às colunas que exibem falhas na interação LD, DG e LDG.

A resistência nominal (P_n) de uma coluna é dada pelo mínimo valor entre as cargas nominais local (L), distorcional (D), global (G), local-global (LG) e local-distorcional (LD) [5]. As estimativas existentes para abordagens de projeto L, D, G e LG estão previstas na literatura. A interação LD tem sido largamente estudada e expressões para este dimensionamento foram propostas por Schafer [6], Silvestre *et al.* [7], Martins *et al.* [5], Matsubara [8] e Matsubara *et al.* [9].

Um parâmetro conveniente para lidar com a flambagem de colunas de perfis formados a frio é o índice de esbeltez reduzido, que relaciona cargas críticas e a carga de escoamento da coluna. O índice de esbeltez reduzido para os modos de flambagem local, distorcional e global é dado pelas seguintes equações:

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{P_y}{P_{crL}}} \quad (1)$$

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{P_y}{P_{crD}}} \quad (2)$$

$$\lambda_G = \sqrt{\frac{P_y}{P_{crG}}} \quad (3)$$

Neste trabalho, os valores de carga crítica foram obtidos através do programa GBTUL [10] correspondentes aos comprimentos reais das colunas analisadas. A nomenclatura neste artigo segue as convenções de Matsubara [8], que adota o conceito $R_{\lambda DL}$ como a relação entre os índices de esbeltez distorcional (λ_D) e local (λ_L), conforme equação abaixo.

$$R_{\lambda DL} = \frac{\lambda_D}{\lambda_L} = \sqrt{\frac{P_{crL}}{P_{crD}}} \quad (4)$$

Outro conceito utilizado por Matsubara [8] e adotado neste trabalho é o conceito de índice de esbeltez relativo máximo $\lambda_{\text{máxLD}}$, que será o máximo valor entre os índices de esbeltez local (λ_L) e distorcional (λ_D). Como o objetivo deste trabalho é a interação local e distorcional, os valores de λ_G estarão sempre muito abaixo dos outros dois nas colunas analisadas, de forma a evitar a influência do modo global.

De forma a expressar o quão distante está o modo global dos modos local e distorcional, será utilizada a relação entre o índice de esbeltez global (λ_G) e o índice de esbeltez relativo máximo ($\lambda_{\text{máxLD}}$), conforme apresentado na equação a seguir. Esse parâmetro visa estabelecer uma medida de controle do modo global com o objetivo de manter esse modo suficientemente afastado dos demais.

$$R_{\lambda G \text{máxLD}} = \frac{\lambda_G}{\lambda_{\text{máxLD}}} \quad (5)$$

O método da resistência direta proposto por Schafer e Peköz [4] é voltado para a previsão da resistência de colunas e vigas de perfis formados a frio através do ajuste de resultados experimentais e/ou numéricos, com base na equação de Winter [11]. O formato dessa equação é dado pela eq. (6):

$$P_u = \left(1 - \frac{A}{\lambda^B}\right) \frac{P_y}{\lambda^B} \quad (6)$$

Onde,

- P_u → carga última
- A e B → coeficientes de ajuste obtidos experimentalmente e/ou numericamente
- P_y → carga de início de escoamento do aço
- P_{cr} → carga crítica de flambagem local ou distorcional
- λ → índice de esbeltez, dado por

$$\lambda = \sqrt{\frac{P_y}{P_{cr}}} \quad (7)$$

O método possui fórmulas calibradas baseadas na curva de Winter [11] para os modos local e distorcional, conforme apresentado nas equações (8) e (9) a seguir. Entretanto, apesar de também constarem no apêndice C da NBR 14762 [12], essas equações não são capazes de prever cargas últimas quando sujeitas a interação entre o modo local e distorcional (LD).

$$P_{nL} = \begin{cases} P_y & \lambda_L \leq 0,776 \\ \left(1 - \frac{0,15}{\lambda_L^{0,8}}\right) \frac{P_y}{\lambda_L^{0,8}} & \lambda_L > 0,776 \end{cases} \quad (8)$$

$$P_{nD} = \begin{cases} P_y & \lambda_D \leq 0,561 \\ \left(1 - \frac{0,25}{\lambda_D^{1,2}}\right) \frac{P_y}{\lambda_D^{1,2}} & \lambda_D > 0,561 \end{cases} \quad (9)$$

A interação entre os modos local e distorcional pode ser prevista por adaptações das equações 8 e 9, tal como proposto por Schafer[6]:

$$P_{nLD} = \begin{cases} P_{nD} & \lambda_{LD} \leq 0,776 \\ \left(1 - \frac{0,15}{\lambda_{LD}^{0,8}}\right) \frac{P_{nD}}{\lambda_{LD}^{0,8}} & \lambda_{LD} > 0,776 \end{cases} \quad (10)$$

$$P_{nDL} = \begin{cases} P_{nL} & \lambda_{DL} \leq 0,561 \\ \left(1 - \frac{0,25}{\lambda_{DL}^{1,2}}\right) \frac{P_{nL}}{\lambda_{DL}^{1,2}} & \lambda_{DL} > 0,561 \end{cases} \quad (11)$$

Onde,

$$\lambda_{LD} = \sqrt{\frac{P_{nD}}{P_{crL}}} \quad (12) \quad \text{e} \quad \lambda_{DL} = \sqrt{\frac{P_{nL}}{P_{crD}}} \quad (13)$$

As expressões acima, conhecidas como abordagens NLD e NDЛ, são obtidas através da substituição de P_y (eq. (8) por P_{nD} , originando a eq. (10) e P_y (eq. 9) por P_{nL} , originando a eq. (11).

A abordagem NDЛ recebeu modificação inicialmente por Silvestre *et al.* [7] no contexto de colunas U, tornando-se conhecida como MNDL (“generalised modified NDЛ approach”). Posteriormente o método foi estendido para colunas H, Z e R por Dinis e Camotim [13] e também para colunas WSLC (“web-stiffened lipped channel”) e WFSLC (“web-flange-stiffened lipped channel”) por Martins *et al.* [5]. Para o caso de colunas U, H, Z e R, as equações propostas são as seguintes:

$$P_{MnDL} = \begin{cases} P_{nL}^* & \lambda_{DL}^* \leq 0,561 \\ \left(1 - \frac{0,25}{\lambda_{DL}^{*1,2}}\right) \frac{P_{nL}^*}{\lambda_{DL}^{*1,2}} & \lambda_{DL}^* > 0,561 \end{cases} \quad \text{Sendo,} \quad \lambda_{DL}^* = \sqrt{\frac{P_{nL}^*}{P_{crD}}} \quad (14)$$

$$P_{nL}^* = \begin{cases} P_y & L_{crD} / L_{crL} \leq 4 \\ P_y + \left(1 - 0,25 \frac{L_{crD}}{L_{crL}}\right) (P_y - P_{nL}) & 4 \leq L_{crD} / L_{crL} \leq 8 \\ P_{nL} & L_{crD} / L_{crL} \geq 8 \end{cases} \quad (15)$$

Esse método baseia-se na definição de uma força local modificada (P_{nL}^*) dependente da relação entre os comprimentos críticos distorcional e local (L_{crD}/L_{crL}) para uma meia-onda, que são obtidos através das curvas de assinatura para a condição simplesmente apoiada, e estima as cargas resistentes da coluna substituindo P_{nL} por P_{nL}^* na eq. (11), resultando na eq. (14).

Martins *et al.* [5] concluíram que o método P_{MnDL} apresenta ótimas previsões para resultados numéricos. Por outro lado, a carga última obtida experimentalmente apresenta valores inferiores aos encontrados utilizando-se o método MNDL. Portanto, segundo Martins *et al.* [5], torna-se mais prudente o uso do método NDЛ para o caso de interação local-distorcional verdadeira (*true interaction*). As cargas de falha para colunas submetidas à interação secundária local podem ser adequadamente previstas através do Método da Resistência Direta baseado nas curvas de Winter para o modo distorcional, conforme apresentado anteriormente através da equação (9).

Para colunas passíveis de interação secundária distorcional, Martins *et al.* [5] desenvolveram uma abordagem baseada no Método da Resistência Direta, mais precisa do que abordagem NDЛ. Esse método, denominado NSDB, depende da relação P_{crD}/P_{crL} e de λ_L , tal como apresentado abaixo:

$$P_{nSDB} = \begin{cases} P_{nL} & \lambda_L \leq \lambda_{L1} \\ P_1 + \frac{P_2 - P_1}{\lambda_{L2} - \lambda_{L1}} (\lambda_L - \lambda_{L1}) & \lambda_{L1} < \lambda_L < \lambda_{L2} \\ \frac{P_y}{\lambda_L^{1,2}} \left(1 - \frac{0,15}{\lambda_L^{1,2}} \right) & \lambda_L \geq \lambda_{L2} \end{cases} \quad (16)$$

Sendo,

$$P_1 = \frac{P_{y1}}{\lambda_{L1}^{0,8}} \left(1 - \frac{0,15}{\lambda_{L1}^{0,8}} \right) \quad (17)$$

$$P_2 = \frac{P_{y2}}{\lambda_{L2}^{1,2}} \left(1 - \frac{0,15}{\lambda_{L2}^{1,2}} \right) \quad (18)$$

$$\lambda_{L1} = 0,85 \frac{P_{crD}}{P_{crL}} \quad (19)$$

$$\lambda_{L2} = \lambda_{L1} + 0,25 \quad (20)$$

$$P_{y1} = \lambda_{L1}^2 P_{crL} \quad (21)$$

$$P_{y2} = \lambda_{L2}^2 P_{crL} \quad (22)$$

Matsubara e Batista [14] propõem novas equações que descrevem o comportamento de interação local-distorcional, de modo que os graus das equações de A e B foram reduzidos com relação ao trabalho anterior [8]. Para simplificar a nomenclatura da força resistente devido ao surgimento da interação do modo local-distorcional, esta foi denominada P_{nLD}^* .

$$P_{nLD}^* = \left(1 - \frac{A}{\lambda^B} \right) \frac{P_y}{\lambda^B} \quad \lambda_{\text{máx}} = \text{máx} \{ \lambda_L, \lambda_D \} \quad (23)$$

$$A = 3,5R_{\lambda DL}^3 - 7,9R_{\lambda DL}^2 + 6,1R_{\lambda DL} - 1,43 \quad 0,62 \leq R_{\lambda DL} \leq 0,98 \quad (24)$$

$$B = -2,4R_{\lambda DL}^3 + 3,9R_{\lambda DL}^2 - 0,9R_{\lambda DL} + 0,8 \quad 0,27 \leq R_{\lambda DL} \leq 1,19 \quad (25)$$

Recentemente Matsubara *et al.* [9] desenvolveram uma abordagem de projeto com alcance maior para a variedade de perfis formados a frio, testada para perfis formados a frio em colunas U enrijecido com $0,4 \leq bf/bw \leq 1,0$ e $0,2 \leq bs/bw \leq 0,3$. A equação base continuou sendo a equação (23) (23)sendo os coeficientes A e B representados pelas equações a seguir.

$$A = \begin{cases} 0,15 & R_{\lambda DL} < 0,90 \\ 20,64R_{\lambda DL}^3 - 57,75R_{\lambda DL}^2 + 54,33R_{\lambda DL} - 17,02 & 0,90 \leq R_{\lambda DL} \leq 1,05 \\ 0,25 & R_{\lambda DL} > 1,05 \end{cases} \quad (26)$$

$$B = \begin{cases} 0,80 & R_{\lambda DL} < 0,45 \\ 7,17R_{\lambda DL}^4 - 25,76R_{\lambda DL}^3 + 31,07R_{\lambda DL}^2 - 14,21R_{\lambda DL} + 2,97 & 0,45 \leq R_{\lambda DL} \leq 1,05 \\ 1,20 & R_{\lambda DL} > 1,05 \end{cases} \quad (27)$$

4 Metodologia

4.1 Modelo estrutural investigado

Esta pesquisa retoma a metodologia de Matsubara [8] e a aplica ao desenvolvimento de formulações mais precisas para perfis rack sob compressão centrada. O aço foi considerado material isotrópico, cujo coeficiente de Poisson adotado equivale a $\nu = 0,3$ e módulo de elasticidade conforme apresentado nas tabelas 1 e 2.

Foram realizadas simulações numéricas com 40 modelos, com seções transversais que se enquadrem dentro de padrões de geometria fabricáveis e usuais, tendo como objetivo a compreensão da influência da combinação de parâmetros geométricos sobre a resistência dos perfis quando sujeitos à interação local-distorcional.

A validação do modelo numérico precedeu este estudo paramétrico. Para tal, foi utilizado um grupo de colunas de perfis de aço formados a frio de seção rack estudado por Dinis *et al.* [1] e Vasquez [2], cuja seção transversal é apresentada na Figura 2(a).

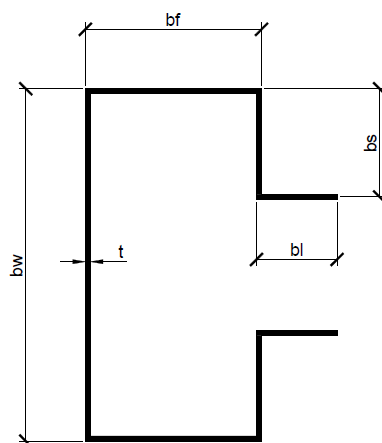


Figura 2 - Seção rack (a) utilizada para validação do modelo

No estudo de Dinis *et al.* [1], as propriedades do aço foram determinadas a partir de ensaios de tração de corpos de prova extraídos do centro da alma e de regiões dos flanges das colunas RS-1 e RS-5. Sabendo-se que todas as colunas foram fabricadas a partir de apenas dois lotes de aço, Dinis *et al.* [1] assumiram então que as propriedades do material são as mesmas para colunas que apresentam a mesma espessura nominal. Nas tabelas 1 e 2 são apresentadas as características geométricas e propriedades do aço adotados na etapa de validação.

Tabela 1 - Propriedades geométricas e de material de colunas com seção rack - Dinis *et al.* [1]

Modelo	bw (mm)	bf (mm)	bs (mm)	bl (mm)	L (mm)	t (mm)	E (MPa)	f_y (MPa)
RS-1	73,0	37,1	17,3	21,3	1300	1,002	212000	578
RS-2	78,4	47,4	17,2	21,0	1800	0,998	212000	578
RS-3	83,6	52,3	17,1	20,4	2100	0,982	212000	578
RS-4-1	88,6	57,2	17,2	21,3	2499	0,999	212000	578
RS-4-2	88,6	57,2	17,5	21,4	2500	0,981	212000	578
RS-5	83,5	52,5	17,3	21,6	1397	1,193	215000	609
RS-6	88,5	57,9	17,7	21,0	1599	1,186	215000	609
RS-7	93,7	67,3	17,4	20,8	1902	1,227	215000	609
RS-8-1	98,7	72,2	17,0	21,0	2501	1,201	215000	609
RS-8-2	98,8	72,2	17,2	20,8	2501	1,175	215000	609

Tabela 2 - Propriedades geométricas e de material de colunas com seção rack – Vasquez [2]

Modelo	bw (mm)	bf (mm)		bs (mm)		bl (mm)		L (mm)	t (mm)	E (MPa)	fy (MPa)
		sup.	inf.	sup.	inf.	sup.	inf.				
CL1-1	137,35	77,85	77,10	26,30	26,10	45,10	44,90	949	2,43	210000	293,40
CL1-2	136,35	77,40	77,50	26,00	26,30	44,90	44,80		2,34	210000	293,40
CL1-3	137,70	77,50	77,10	25,80	25,50	45,00	44,90		2,44	210000	293,55
CL1-4	137,80	77,50	77,70	26,30	26,70	44,10	44,70		2,47	210000	293,09
CL1-5	135,10	77,40	77,50	26,10	26,30	45,80	45,30		2,42	210000	293,58
CL1-6	135,70	77,60	77,40	26,20	26,50	45,50	45,20		2,44	210000	293,37
CL2-1	132,65	77,40	77,00	26,30	26,20	44,80	44,70	877	2,76	210000	313,94
CL2-2	129,95	78,10	77,55	28,80	28,30	45,20	44,80		2,83	210000	312,40
CL2-3	137,20	78,00	77,50	25,60	25,80	45,00	45,10		2,82	210000	313,94
CL2-4	131,30	77,90	77,10	27,20	28,00	44,90	44,90		2,76	210000	313,69
CL2-5	132,35	77,40	77,20	27,50	27,40	44,80	44,80		2,83	210000	314,36
CL2-6	130,50	77,90	78,00	28,50	28,30	44,90	45,00		2,82	210000	315,32
CL3-1	149,20	90,20	90,50	32,10	32,60	52,30	52,40	1086	2,76	210000	317,60
CL3-2	148,50	90,00	90,80	32,50	32,70	52,50	52,70		2,74	210000	318,12
CL3-3	149,50	90,00	90,60	32,60	32,70	52,50	52,50		2,83	210000	317,66
CL3-4	147,70	90,20	90,70	32,00	33,00	52,80	52,80		2,74	210000	317,60
CL3-5	149,40	90,10	90,80	32,30	32,10	52,60	52,40		2,75	210000	317,60
CL3-6	148,70	90,10	90,50	32,60	32,50	52,40	52,30		2,80	210000	317,04

4.2 Definição do modelo em elementos finitos

A investigação fundamenta-se na modelagem numérica de colunas de aço de perfis formados a frio, via métodos dos elementos finitos, por meio do emprego do programa ANSYS [3]. A solução numérica de estabilidade estrutural deu-se através do Método de Riks [15], que apresenta bons resultados para o estudo de placas sujeitas a fenômenos de flambagem.

Os perfis de aço e as chapas de extremidade dos modelos investigados são simuladas por elementos finitos de casca SHELL181 que considera esforços de flexão, cisalhamento e efeito de membrana. Esse tipo de elemento de casca é comumente utilizado por diversos pesquisadores no estudo de perfis de parede fina, sendo a geometria, locação dos nós e sistema de coordenadas mostrados na Figura 3.

O elemento é definido por quatro nós, sendo que cada nó possui seis graus de liberdade: translação e rotação em torno dos eixos x, y e z.

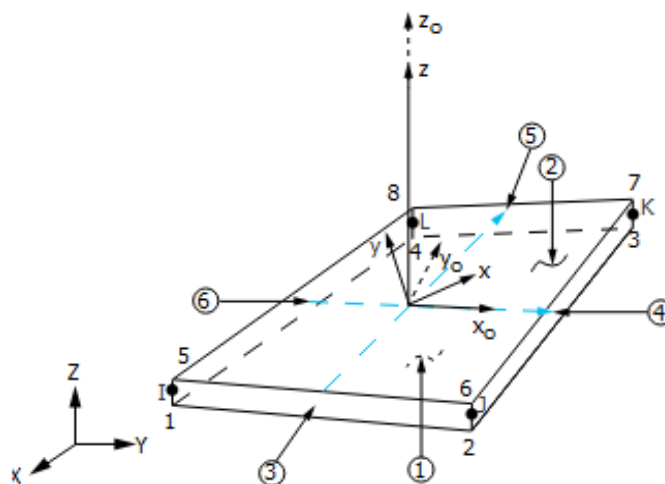


Figura 3 - Elemento finito SHELL 181 (ANSYS, 2009)

A dimensão dos elementos foi definida como sendo 5 mm de lado, conforme recomendado em seus trabalhos por pesquisadores como Fena [16], Silvestre *et al.* [7] e Matsubara [8]. A Figura 4 apresenta a malha de elementos finitos do modelo gerado no ANSYS [3].

As condições de contorno consideradas nesta análise restringem os deslocamentos dos nós de extremidade, nas direções da seção transversal. A rotação dos nós de extremidade está impedida nos três eixos principais, configurando assim apoios engastados. O movimento de corpo rígido na direção longitudinal da barra foi impedido em um único nó localizado no meio do comprimento coluna e à meia altura da alma.

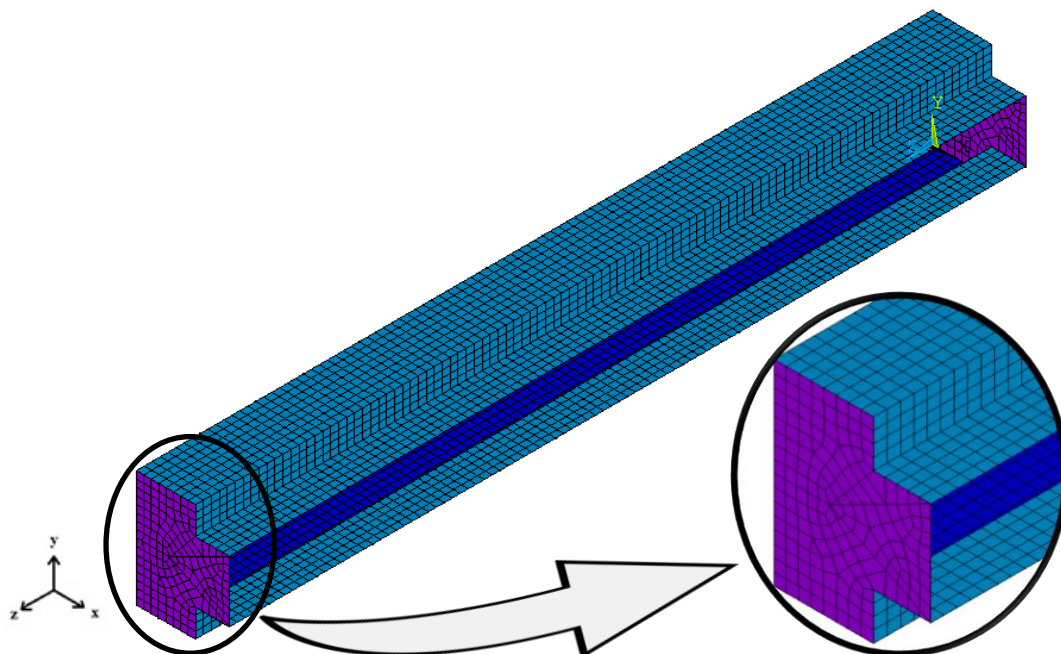


Figura 4 - Perspectiva da malha em elementos finitos com as chapas de extremidade

4.3 Imperfeições

Todo elemento de barra em aço possui imperfeições tais que influenciam diretamente a carga última (P_u), também conhecida como carga de colapso, carga de ruína ou resistência da coluna. Essas imperfeições geométricas iniciais são adotadas geralmente na forma de modos de flambagem local, distorcional e/ou global. Neste trabalho serão consideradas apenas as imperfeições geométricas iniciais dos perfis que ocorrem na seção transversal contribuindo desfavoravelmente para a segurança do elemento estrutural.

Embora existam diversos métodos para a caracterização das imperfeições geométricas iniciais, será adotado no presente trabalho o mesmo método que Martins *et al.* [5] utilizam em seu artigo, considerando apenas os modos puros local ou distorcional com amplitude equivalente a 10% da espessura da parede do perfil. Isto significa que será necessário realizar primeiramente a análise de estabilidade elástica no programa de elementos finitos para a obtenção do modo crítico de flambagem da coluna que, posteriormente, será incorporado ao programa como imperfeição geométrica inicial de amplitude 0,10 t.

Segundo Martins *et al.* [17], estudos anteriores de colunas que apresentam P_{crD}/P_{crL} próximos de 1 ($0,9 < P_{crD}/P_{crL} < 1,1$) mostram que as imperfeições geométricas iniciais associadas ao modo puramente distorcional são as mais prejudiciais para os elementos estruturais quando comparadas com qualquer outra combinação de imperfeições locais e distorcionais compartilhando a mesma amplitude. Portanto, como as colunas de Dinis *et al.* [1] estão na faixa de $1,3 < P_{crD}/P_{crL} < 1,5$ e as colunas de Vasquez [2] de $0,6 < P_{crD}/P_{crL} < 0,8$ na etapa de validação do modelo serão analisadas as colunas com imperfeições puramente distorcionais, puramente locais e combinando os modos local-distorcional de modo a verificar o caso mais prejudicial e o mais próximo da realidade do experimento.

5 Validação do modelo

A validação de modelos numéricos é uma etapa importante em um projeto de pesquisa, pois a escolha correta de um modelo representativo influencia diretamente a qualidade dos resultados definidos em função dos objetivos que se deseja alcançar. Neste trabalho, a validação do modelo em elementos finitos se deu em duas etapas: validação numérica-numérica e validação numérica-experimental.

A validação numérica-numérica do modelo de elementos finitos foi realizada através da comparação dos resultados das cargas críticas locais e distorcionais determinadas através das curvas de assinatura geradas pelos programas computacionais CUFSM [18] e GBTUL [10], bem como a comparação com os resultados obtidos nos trabalhos de Dinis *et al.* [1] e Vasquez [2] para as colunas cujas características são apresentadas no item 3.1.

A validação numérica-experimental do modelo foi fundamentada a partir de valores experimentais de carga última extraídos do artigo Dinis *et al.* [1] e da dissertação de Vasquez [2], que serão comparados aos resultados de carga última obtidos através do modelo em elementos finitos.

5.1 Resultados

Nas análises lineares de estabilidade foram obtidas as cargas críticas e os modos de instabilidade. As tabelas 3 e 4 ilustram os modos local e distorcional observados através do software GBTUL e ANSYS para as colunas RS-5 e CL1-5 respectivamente. As regiões tracejadas serão apresentadas amplificadas na Figura 5.

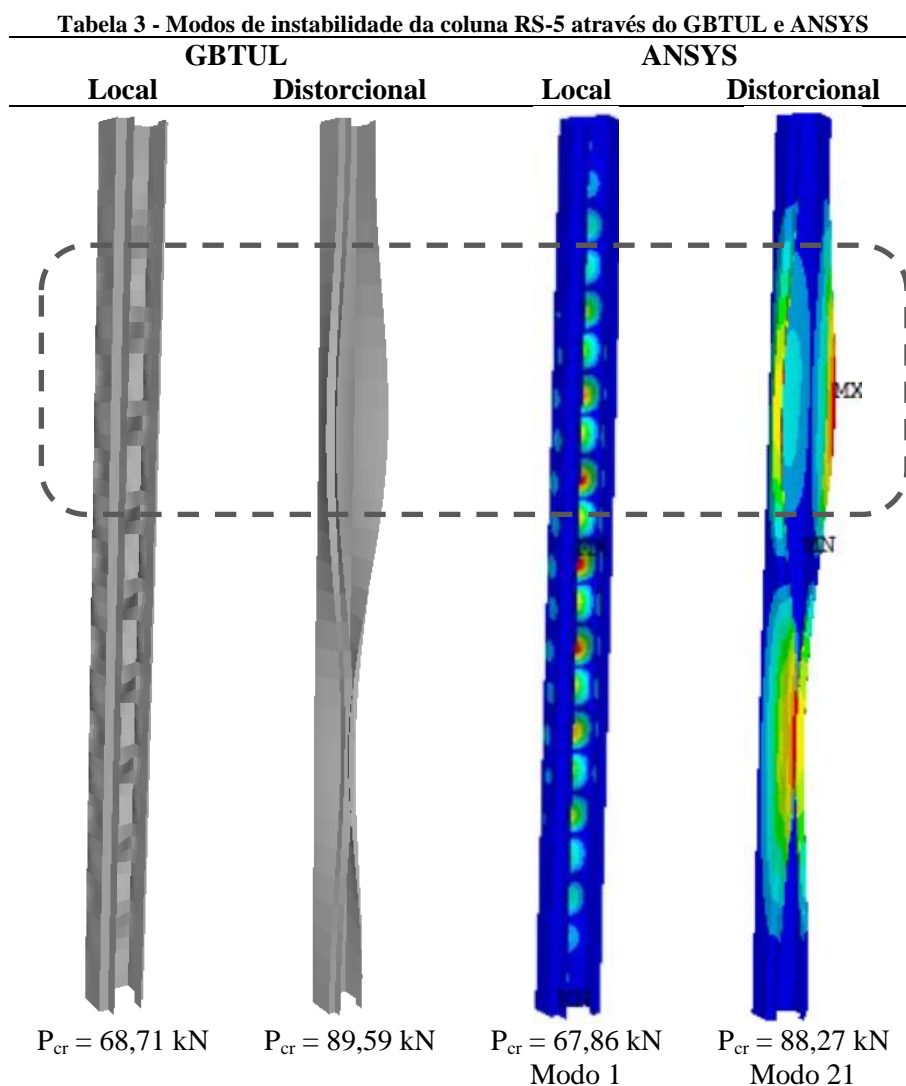



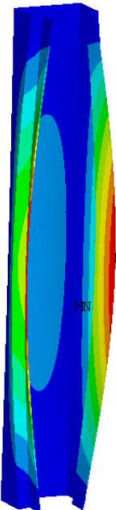


Tabela 4 - Modos de instabilidade da coluna CL 1-5 através do GBTUL e ANSYS

GBTUL		ANSYS	
Local	Distorcional	Local	Distorcional
			
$P_{cr} = 348,02 \text{ kN}$	$P_{cr} = 245,97 \text{ kN}$	$P_{cr} = 339,78 \text{ kN}$ Modo 2	$P_{cr} = 249,08 \text{ kN}$ Modo 1

Comparando-se as cargas críticas destas colunas, observa-se diferença de aproximadamente 1,5% para RS-5 e 2,5% para CL1-5, o que apresenta coerência do modelo em elementos finitos utilizado para esta análise. Observa-se que os modos de instabilidade obtidos através dos dois softwares para esses comprimentos são compatíveis, apresentando no modo local 19 semiondas e no modo distorcional 2 semiondas na coluna RS -5, e 9 semiondas locais e 1 distorcional na coluna CL1-5.

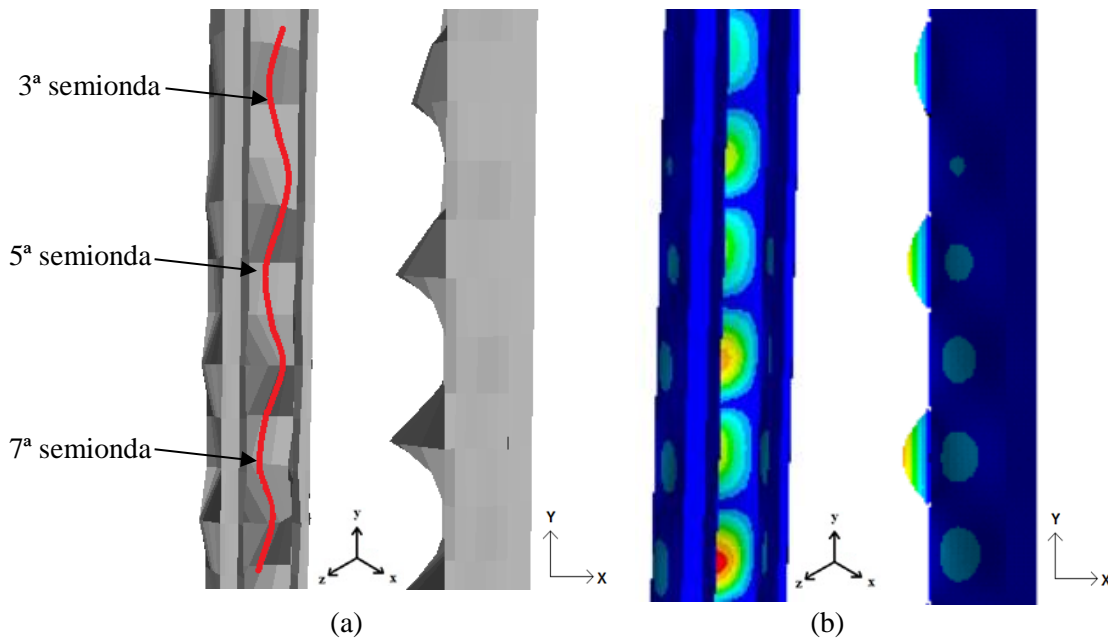


Figura 5 - Coluna RS-5: ampliação da região tracejada referente ao modo local nos programas

(a) GBTUL (b) ANSYS

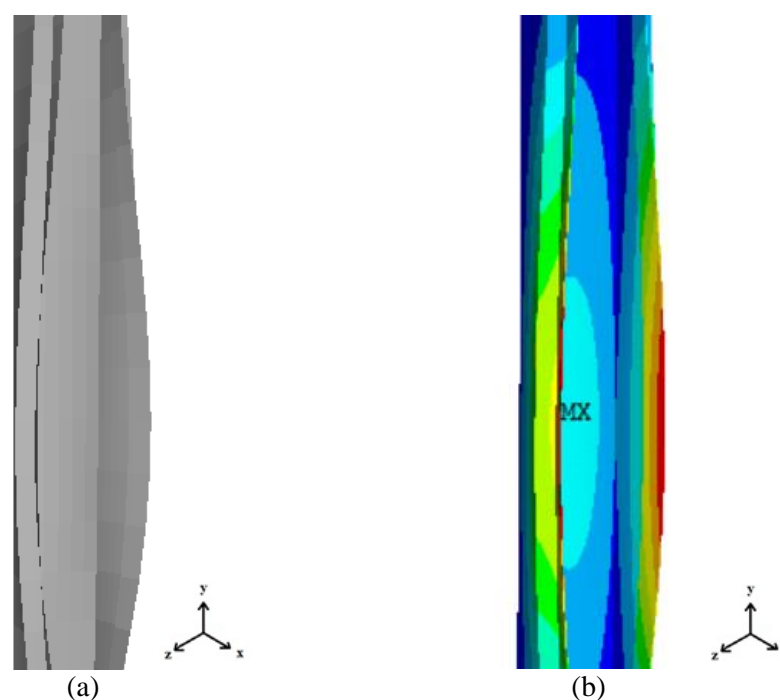


Figura 6 - Coluna RS-5: ampliação da região tracejada referente ao modo distorcional nos programas
(a) GBTUL (b) ANSYS

A partir da etapa de validação numérica-numérica foram geradas a Tabela 5 e a Tabela 6 que comparam os valores encontrados, apresentando resultados coerentes e semelhantes entre os programas numéricos tanto para as colunas de Dinis *et al.* [1] como para as colunas de Vasquez [2]. A correlação com os programas GBTUL [10] e CUSFM [18] indica que o programa em elementos finitos está coerente e, portanto, o modelo em elementos finitos está funcionando adequadamente.

Tabela 5 - Relação entre as cargas críticas obtidas através dos programas computacionais para as colunas de Dinis *et al.* [1]

COLUNA	L [mm]	P _{cr}	GBTUL	CUFSM	ANSYS	CUFSM	ANSYS	ANSYS
			[kN]	[kN]	[kN]	GBTUL	GBTUL	CUFSM
RS-1	1300	L	45,36	44,65	44,92	0,98	0,99	1,01
		D	63,16	63,18	62,63	1,00	0,99	0,99
RS-2	1800	L	42,19	41,70	41,93	0,99	0,99	1,01
		D	59,39	58,48	58,21	0,98	0,98	1,00
RS-3	2100	L	37,26	36,67	36,83	0,98	0,99	1,00
		D	55,19	54,95	54,53	1,00	0,99	0,99
RS-4-1	2499	L	37,01	36,41	36,56	0,98	0,99	1,00
		D	52,60	52,61	52,27	1,00	0,99	0,99
RS-4-2	2500	L	35,15	34,57	34,72	0,98	0,99	1,00
		D	51,71	51,53	51,18	1,00	0,99	0,99
RS-5	1397	L	68,71	67,66	67,86	0,98	0,99	1,00
		D	89,59	89,36	88,27	1,00	0,99	0,99
RS-6	1599	L	63,23	62,34	62,42	0,99	0,99	1,00
		D	87,57	87,34	86,38	1,00	0,99	0,99
RS-7	1902	L	66,51	65,47	65,59	0,98	0,99	1,00
		D	87,20	86,94	86,22	1,00	0,99	0,99
RS-8-1	2501	L	58,59	57,72	57,84	0,99	0,99	1,00
		D	76,45	76,04	75,46	0,99	0,99	0,99
RS-8-2	2501	L	54,91	54,07	54,09	0,98	0,99	1,00
		D	73,69	73,26	73,86	0,99	1,00	1,01

Tabela 6 - Relação entre as cargas críticas obtidas através dos programas computacionais para as colunas de Vasquez [2]

COLUNA	L [mm]	P _{cr}	GBTUL [kN]	CUFSM [kN]	ANSYS [kN]	CUFSM GBTUL	ANSYS GBTUL	ANSYS CUFSM
CL1-1	949	L	345,20	340,76	334,33	0,99	0,97	0,98
		D	251,16	253,97	251,92	1,01	1,00	0,99
CL1-2	949	L	308,78	307,72	301,88	1,00	0,98	0,98
		D	230,00	229,21	231,54	1,00	1,01	1,01
CL1-3	949	L	343,60	342,39	335,99	1,00	0,98	0,98
		D	247,52	246,62	252,15	1,00	1,02	1,02
CL1-4	949	L	356,81	355,56	348,86	1,00	0,98	0,98
		D	260,66	259,62	264,05	1,00	1,01	1,02
CL1-5	949	L	348,02	346,77	339,78	1,00	0,98	0,98
		D	245,97	245,08	249,08	1,00	1,01	1,02
CL1-6	949	L	354,05	352,78	345,76	1,00	0,98	0,98
		D	251,53	250,59	254,72	1,00	1,01	1,02
CL2-1	877	L	528,50	526,32	516,63	1,00	0,98	0,98
		D	328,47	327,19	332,34	1,00	1,01	1,02
CL2-2	877	L	596,47	593,87	582,42	1,00	0,98	0,98
		D	365,79	364,05	365,39	1,00	1,00	1,00
CL2-3	877	L	534,75	532,16	523,90	1,00	0,98	0,98
		D	336,46	334,71	341,63	0,99	1,02	1,02
CL2-4	877	L	541,21	538,99	528,99	1,00	0,98	0,98
		D	339,41	337,86	339,97	1,00	1,00	1,01
CL2-5	877	L	575,28	572,82	562,00	1,00	0,98	0,98
		D	356,85	355,25	359,31	1,00	1,01	1,01
CL2-6	877	L	585,97	583,46	572,28	1,00	0,98	0,98
		D	361,62	359,90	361,17	1,00	1,00	1,00
CL3-1	1086	L	483,84	482,24	473,24	1,00	0,98	0,98
		D	335,87	334,79	334,91	1,00	1,00	1,00
CL3-2	1086	L	478,09	476,52	467,65	1,00	0,98	0,98
		D	331,91	330,83	330,64	1,00	1,00	1,00
CL3-3	1086	L	520,80	519,00	509,13	1,00	0,98	0,98
		D	355,99	354,63	355,33	1,00	1,00	1,00
CL3-4	1086	L	482,64	481,03	472,05	1,00	0,98	0,98
		D	330,90	329,85	329,72	1,00	1,00	1,00
CL3-5	1086	L	477,68	476,11	467,26	1,00	0,98	0,98
		D	331,75	330,69	330,79	1,00	1,00	1,00
CL3-6	1086	L	508,35	506,60	497,02	1,00	0,98	0,98
		D	347,93	346,67	347,12	1,00	1,00	1,00

Na segunda etapa de validação, observa-se que ao aplicar a imperfeição inicial correspondente ao primeiro modo de flambagem elástica com amplitude de 10% da espessura, apenas a coluna RS-1 não apresentou mecanismo de colapso numérico igual ao mecanismo de colapso observado no experimento. Os resultados para cada coluna são apresentados nas tabelas 7 e 8 a seguir com seus respectivos valores experimentais extraídos de Dinis *et al.* [1] e Vasquez [2].

Tabela 7 - Relação entre as cargas últimas experimentais de Dinis *et al.* [1] e cargas últimas numéricas com imperfeição inicial local, distorcional e local-distorcional

COLUNA	P_{uExp} (kN)	Imperfeição Local			Imperfeição Distorcional			Imperfeição LD		
		P_{uNum} (kN)	$\frac{P_{uExp}}{P_{uNum}}$	Mecanismo de colapso	P_{uNum} (kN)	$\frac{P_{uExp}}{P_{uNum}}$	Mecanismo de colapso	P_{uNum} (kN)	$\frac{P_{uExp}}{P_{uNum}}$	Mecanismo de colapso
RS-1	58,24	65,65	0,89	L	62,46	0,93	L+D	63,44	0,92	L+D
D	54,37	58,54	0,93	L+D	55,57	0,98	L+D	53,22	1,02	L+D
RS-3	54,34	56,92	0,95	L+D	51,62	1,05	L+D	54,75	0,99	L+D
RS-4-1	51,38	54,99	0,93	L+D	50,30	1,02	L+D	50,24	1,02	L+D
RS-4-2	50,96	53,16	0,96	L+D	51,05	1,00	L+D	49,43	1,03	L+D
RS-5	81,57	93,05	0,88	L+D	86,36	0,94	L+D	87,16	0,94	L+D
RS-6	79,83	93,21	0,86	L+D	84,84	0,94	L+D	85,75	0,93	L+D
RS-7	79,82	91,76	0,87	L+D	85,67	0,93	L+D	86,26	0,93	L+D
RS-8-1	75,45	79,97	0,94	L+D	78,97	0,96	L+D	66,48	1,13	L+D
RS-8-2	74,29	76,78	0,97	L+D	70,83	1,05	L+D	74,84	0,99	L+D

Tabela 8 - Relação entre as cargas últimas experimentais de Vasquez [2] e cargas últimas numéricas com imperfeição inicial local, distorcional e local-distorcional

COLUNA	P_{uExp} (kN)	Imperfeição Local			Imperfeição Distorcional			Imperfeição LD		
		P_{uNum} (kN)	$\frac{P_{uExp}}{P_{uNum}}$	Mecanismo de colapso	P_{uNum} (kN)	$\frac{P_{uExp}}{P_{uNum}}$	Mecanismo de colapso	P_{uNum} (kN)	$\frac{P_{uExp}}{P_{uNum}}$	Mecanismo de colapso
CL1-1	315,00	250,20	1,26	L+D	238,04	1,32	D	250,70	1,26	L+D
CL1-2	-	231,65	-	L+D	220,25	-	D	231,16	-	L+D
CL1-3	284,00	250,70	1,13	L+D	238,28	1,19	D	247,88	1,15	L+D
CL1-4	267,00	259,64	1,03	L+D	248,11	1,08	D	261,45	1,02	L+D
CL1-5	267,00	248,03	1,08	L+D	235,48	1,13	D	245,52	1,09	L+D
CL1-6	286,00	252,85	1,13	L+D	239,67	1,19	D	249,69	1,15	L+D
CL2-1	-	322,30	-	L+D	305,24	-	D	322,27	-	L+D
CL2-2	350,00	342,79	1,02	L+D	326,44	1,07	D	343,35	1,02	L+D
CL2-3	293,00	332,86	0,88	L+D	311,16	0,94	D	331,49	0,88	L+D
CL2-4	347,00	327,33	1,06	L+D	310,32	1,12	D	320,49	1,08	L+D
CL2-5	340,00	340,84	1,00	L+D	319,48	1,06	D	335,56	1,01	L+D
CL2-6	322,00	342,39	0,94	L+D	325,35	0,99	D	343,75	0,94	L+D
CL3-1	-	335,20	-	L+D	318,82	-	D	334,95	-	L+D
CL3-2	383,00	331,15	1,16	L+D	315,47	1,21	D	330,47	1,16	L+D
CL3-3	377,00	354,73	1,06	L+D	336,35	1,12	D	348,71	1,08	L+D
CL3-4	347,00	330,34	1,05	L+D	314,63	1,10	D	330,09	1,05	L+D
CL3-5	355,00	331,50	1,07	L+D	315,76	1,12	D	331,40	1,07	L+D
CL3-6	367,00	346,73	1,06	L+D	329,04	1,12	D	346,58	1,06	L+D

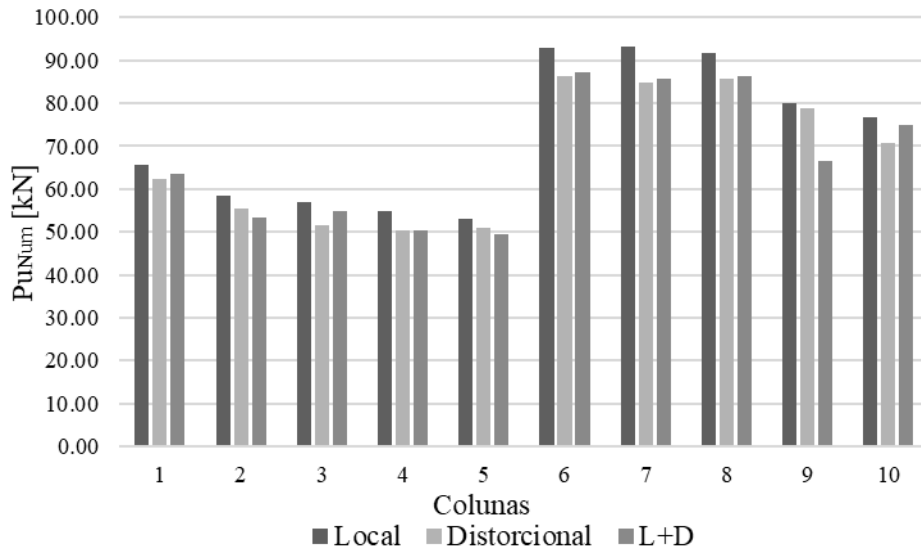


Figura 7 – Gráfico das cargas últimas associadas à imperfeição inicial adotada para as colunas de Dinis *et al.* [1]

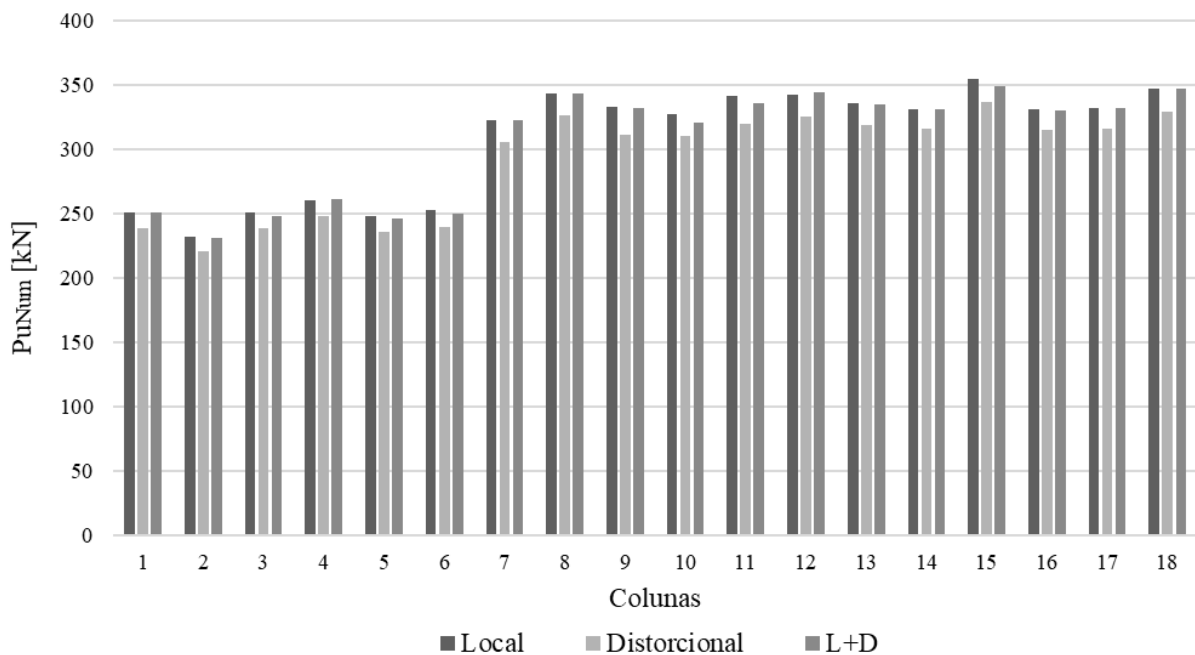


Figura 8 - Gráfico das cargas últimas associadas à imperfeição inicial adotada para as colunas de Vasquez [2]

A partir das figuras Figura 7 e Figura 8, observa-se que 70% das colunas de Dinis *et al.* [1] e 100% das colunas de Vasquez [2] apresentaram-se mais prejudiciais estruturalmente com imperfeições inicialmente puramente distorcionais porém, as colunas com imperfeições equivalentes ao primeiro modo de flambagem apresentaram resultados mais próximos à realidade evidenciada através dos experimentos.

A diferença entre os resultados pode ser explicada devido aos valores atribuídos às propriedades do aço (módulo de elasticidade e tensão de escoamento) ou à forma das imperfeições iniciais adotadas. Entretanto, apesar dos ensaios das colunas RS-5, RS-6 e RS-7 apresentarem um grande desvio, os modelos numéricos apresentaram de modo geral bons resultados para a aplicação de imperfeição local, com média das correlações P_{uExp}/P_{uNum} das dez colunas de Dinis *et al.* [1] igual a 0,92 e desvio padrão de 0,04 no caso de aplicação de imperfeição inicial local. No caso de aplicação de imperfeição inicial distorcional, a média das correlações foi de 0,98 com desvio padrão de 0,05. E, para imperfeição inicial LD, a média obtida foi igual a 0,99 com desvio padrão de 0,07.

Devido ao pequeno espaço amostral de perfis rack formados a frio sem furos testados experimentalmente que apresentassem interação entre os modos local e distorcional, foi feita uma análise adicional com as colunas de Vasquez [2]. As colunas CL1-1 e CL3-2 apresentaram grandes desvios quando comparadas às demais colunas do ensaio de Vasquez [2], o que elevou consideravelmente a média e o desvio padrão. Considerando a aplicação de imperfeição inicial local, a média e o desvio padrão equivalem respectivamente a 1,06 e 0,09; 1,12 e 0,09 para imperfeição inicial distorcional e, 1,07 e 0,09 para LD.

A Figura 9 representa o mecanismo de colapso obtido numericamente das colunas RS-8-2 e CL1-4 que coincidem com apresentados pelos autores das pesquisas experimentais: (a) interação local-distorcional e (b) distorcional.

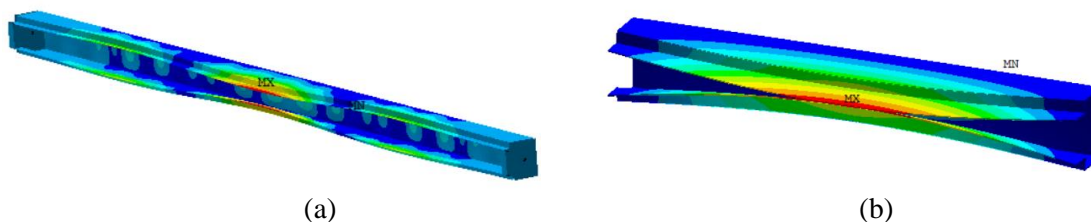


Figura 9 - Mecanismo de colapso das colunas (a) RS-8-2 (L+D) e (b) CL1-4 (Distorcional), considerando imperfeições iniciais equivalentes ao primeiro modo de flambagem elástica

Os resultados obtidos para cada tipo de imperfeição inicial são apresentados nas figuras 8, 9 e 10 que correlacionam as cargas numéricas com as experimentais de modo que ambas são normalizadas pela carga de escoamento (P_y) – quanto mais perto os pontos estiverem da reta tracejada, mais a carga última numérica estará próxima da carga última experimental. Com base na análise de dispersão dos resultados da correlação numérico-experimental, conclui-se que o modelo em elementos finitos de casca é confiável e pode ser considerado para análises paramétricas complementares que serão discutidas mais adiante.

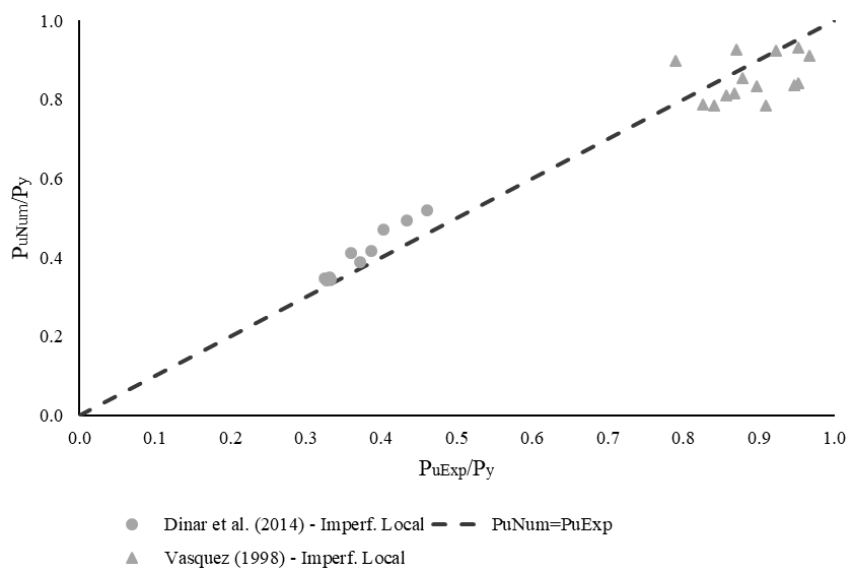


Figura 10 - Correlação entre as cargas últimas experimentais e numéricas com aplicação de imperfeições cuja forma corresponde ao modo local

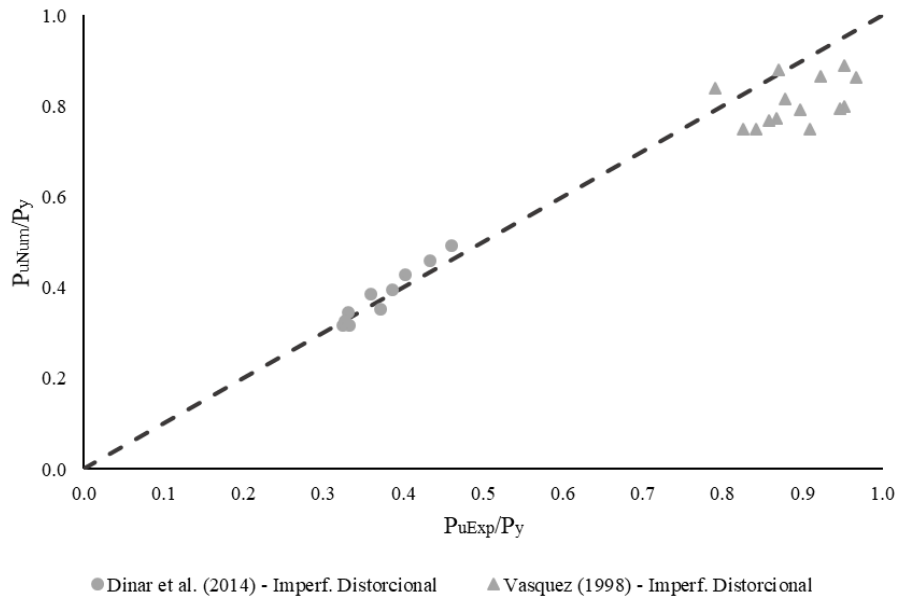


Figura 11 - Correlação entre as cargas últimas experimentais e numéricas com aplicação de imperfeições cuja forma corresponde ao modo distorcional

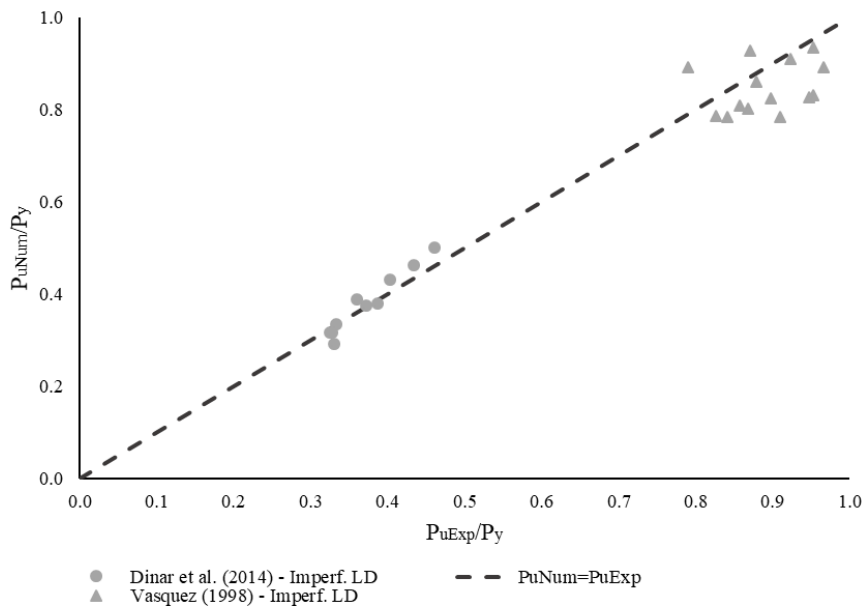


Figura 12 - Correlação entre as cargas últimas experimentais e numéricas com aplicação de imperfeições cuja forma corresponde à combinação dos modos local-distorcional

Com o intuito de observar a sensibilidade à imperfeição distorcional, foram implementados oito valores distintos de amplitude (D) para a imperfeição inicial da coluna RS-4-2, conforme Tabela 9. A partir do gráfico representado na figura é possível observar que, para esta coluna, a magnitude da imperfeição distorcional não é sensível e, portanto, a amplitude de 10% utilizada neste trabalho é uma boa representação.

Tabela 9 – Influência do aumento da amplitude da imperfeição inicial distorcional na carga última numérica da coluna RS-4-2

	$\Delta=0,02t$	$\Delta=0,04t$	$\Delta=0,06t$	$\Delta=0,08t$	$\Delta=0,10t$	$\Delta=0,12t$	$\Delta=0,14t$	$\Delta=0,16t$	$\Delta=0,18t$
P_u [kN]	52.32	51.97	51.66	51.35	51.05	50.75	50.46	50.16	49.86

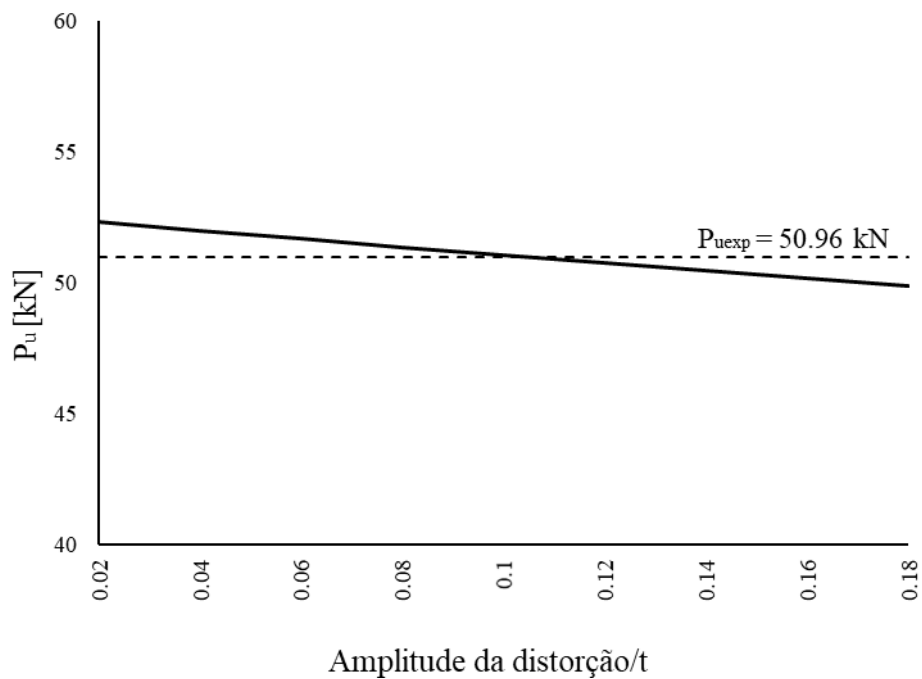


Figura 13 - Sensibilidade à amplitude da imperfeição inicial geométrica correspondente ao modo distorcional

6 Resultados de interação LD obtidos através do MEF

Foram gerados 40 modelos numéricos a partir da fixação dos seguintes parâmetros: $bf/bw = 0,65$; $bs/bw = 0,20$; $bl/bw = 0,25$ e $\theta = 0^\circ$, de tal forma que a relação λ_D/λ_L variasse de 0,45 a 1,21. Analisando o comportamento de uma dessas colunas, pode-se exprimir o gráfico representado na Figura 14, no qual apresenta carga aplicada por deslocamento no flange de bordo livre medido no meio do comprimento da coluna.

Neste exemplo foram selecionados quatro pontos de observação, onde temos:

0-I: desenvolvimento da flambagem local elástica;

I-II: desenvolvimento da interação entre os modos local e distorcional de flambagem elástica;

II-III: desenvolvimento da interação LD com deformação plástica até atingir a carga última em III.

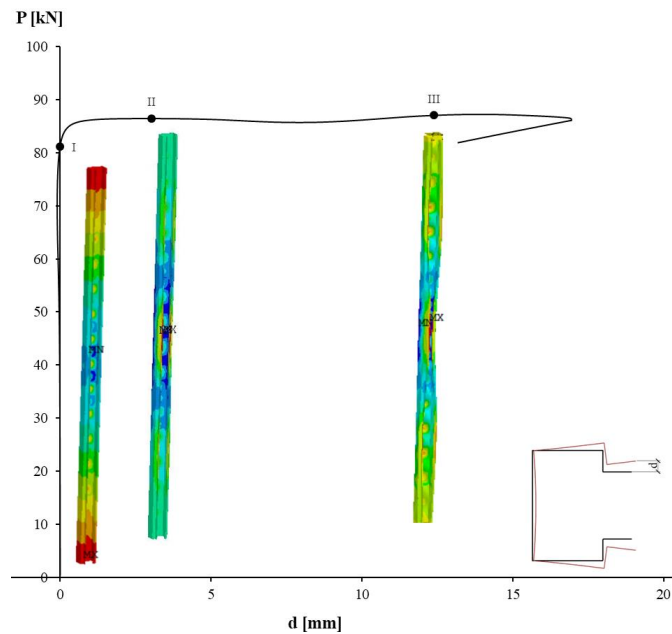


Figura 14 - Gráfico da carga aplicada P por deslocamento no flange de bordo livre

Conclusões

A partir dos gráficos P_{uNum}/P_y X P_{uExp}/P_y ilustrados nas figuras 7, 8 e 9, pode-se observar que os resultados numéricos das colunas sujeitas a interação entre os modos local e distorcional testadas por Dinis *et al.* [1] apresentaram bons resultados com a aplicação dos três tipos de imperfeições iniciais, visto que os pontos se aproximam da reta que representa $P_{uNum} = P_{uExp}$. No caso das colunas testadas por Vasquez [2], observa-se maior dispersão dos resultados, porém a nuvem de pontos também está na região próxima à reta.

O mecanismo de colapso observado por Dinis *et al.* [1] em seu experimento foi de interação LD nas dez colunas ensaiadas, o que está condizente ao mecanismo de ruptura de nove das dez colunas testadas numericamente, podendo-se concluir que o modelo numérico conduziu a resultados satisfatórios. No conjunto de experimentos realizados por Vasquez, o mecanismo de ruptura observado foi distorcional, estando em concordância com o modelo numérico cuja imperfeição inicial adotada foi a distorcional. Para os modelos com as demais imperfeições iniciais adotadas (local; local-distorcional), observa-se que o mecanismo de ruptura resultante é de interação entre os modos local-distorcional.

As diferenças entre o modelo numérico e o experimental podem ter sido ocasionadas pela possível imprecisão nas medições experimentais de geometria ou devido às variações das propriedades do aço. Apesar de não se ter conhecimento das imperfeições iniciais, a adoção da metodologia apresentada por Martins *et al.* [5] de utilizar 10% da espessura da parede do perfil como amplitude da imperfeição resultou em uma boa aproximação dos modelos numéricos com os experimentos.

Referências

- [1] P. B. Dinis, B. Young and D. Camotim, "Local–distorcional interaction in cold-formed steel rack-section columns," *Thin-Walled Structures*, pp. 185-194, 2014.
- [2] E. G. Vasquez, Estabilidade e resistência de perfis de chapa dobrada afetados pelo modo distorcional. Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro: COPPE/ UFRJ, 1998.
- [3] Swanson Analysis Systems, Inc., "ANSYS," 2009.
- [4] B. W. Schafer and T. Peköz, "Direct strength prediction of cold-formed steel members using numerical elastic buckling solutions," *Fourteenth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures*, 1998.
- [5] A. D. Martins, D. Camotim and P. Dinis, "On the direct strength design of cold-formed steel columns failing in local-distortional interactive modes.," *Thin-Walled Structures*, vol. 120, no. March, p. 432–445, 2017.
- [6] B. W. Schafer, "Local, Distortional, and Euler Buckling of Thin-Walled Columns," *Journal of Structural Engineering*, vol. 128, p. 289–299, 2002.
- [7] N. Silvestre, D. Camotim and P. B. Dinis, "Post-buckling behaviour and direct strength design of lipped channel columns experiencing local/distortional interaction," *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 73, pp. 12-30, 2012.
- [8] G. Y. Matsubara, Análise da interação entre modos de flambagem local e distorcional em perfis de aço formados a frio com seção U enrijecido sob compressão axial, Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado, COPPE/ UFRJ, 2018.
- [9] G. Y. Matsubara, E. d. M. Batista and G. C. Salles, "Lipped channel cold-formed steel columns under local-distortional buckling mode interaction," *Thin-Walled Structures*, pp. 251-270, 2019.
- [10] R. Bebiano, N. Silvestre and D. Camotim, "GBT theoretical background," 2010. [Online]. Available: <http://www.civil.ist.utl.pt/gbt/>. [Accessed 12 Janeiro 2019].
- [11] G. Winter, "Thin-Walled Structures-Theoretical Solutions and Test Results," *Preliminary Publications of the Eight Congress (IABSE)*, 1968.
- [12] Associação Brasileira de Normas Técnicas, NBR 14762 – Dimensionamento de Estruturas de Aço Constituídas por Perfis Formados a Frio, Rio de Janeiro, 2010.
- [13] P. B. Dinis and D. Camotim, "Cold-formed steel columns undergoing local–distorcional coupling: Behaviour and direct strength prediction against interactive failure," *Computers and Structures*, no. 147, pp. 181-208, Outubro 2015.
- [14] G. Y. Matsubara and E. d. M. Batista, "Cold-formed steel columns under local-distortional buckling mode interaction," in *Eighth International Conference on Thin-Walled Structures*, Lisboa, Portugal, 2018.
- [15] E. Riks, "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems," *Internacional Journal of solids and structures*, vol. 15, p. 529–551, 1979.
- [16] R. P. T. Fena, Interação Local / Distorcional Em Colunas De Aço Enformadas a Frio Com Secção Em " Hat ", Lisboa: Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, 2011.
- [17] A. D. Martins, D. Camotim, P. Dinis and B. Young, "Local-Distortional Interaction in Cold-formed Steel Columns: Mechanics, Testing, Numerical Simulation and Design," *Structures*, vol. 4, p. 38–57, 2015.
- [18] Z. Li and B. W. Schafer, *Buckling analysis of cold-formed steel members with general boundary conditions using CUFSM: Conventional and constrained finite strip*, 2010.