

AN APPLICATION FOR THE CALCULATION OF WARPING CONSTANT AND OTHER GEOMETRIC PROPERTIES FOR THIN-WALLED ARBITRARY SECTIONS

Ítalo Samuel da Silva Araújo

italo.-samuel@hotmail.com

Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Selma Hissae Shimura da Nóbrega

shsnobrega@gmail.com

Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Campus Universitário, Lagoa Nova, 59078-970, Natal-RN, Brasil

Abstract. In the design of structures, when loadings that cause torsion and / or buckling are considered, it is essential to calculate the warping constant. This parameter can be easily obtained by expressions available in many technical publications, and they are applicable to mono-symmetric or double-symmetric profiles (standard sections). The problem, however, is to obtain the warping constant for thin-walled arbitrary sections, without symmetry axes, that can eventually be found in structural designs. This paper does not focus on the explanation of torsion theories (that was in fact used) nor the presentation of all expressions that allow the calculation of the warping constant, but summarizes and organizes them in a computer application. The idea is to offer an easy and friendly code to the technical community so that undergraduate students and even structural engineers can use it in their projects. In order to make it comprehensive and employed in the various levels of the Engineering courses, several other geometric properties were considered, such as centroid and shear center positions, moments of inertia, radii of gyration, principal moments of inertia, section moduli, among others. The obtained results are compared with those presented in expressions available in technical literature and international publications.

Keywords: Geometric properties; Warping constant, Thin-walled section

1 Introdução

O projeto estrutural envolve etapas classicamente conhecidas como concepção, análise, dimensionamento e detalhamento. Neste processo, as propriedades geométricas dos elementos são indispensáveis e usualmente encontradas nas publicações técnicas quando se refere às seções transversais mais simples (perfis padronizados). Contudo, elementos com seções abertas e paredes delgadas submetidas à torção apresentam tensões tangenciais de torção pura, assim como tensões tangenciais e normais de empenamento, para os quais a determinação manual da constante de empenamento da seção (C_w) é uma tarefa extenuante, por envolver integrações ao longo das seções.

Algumas publicações que tratam deste cálculo podem ser citadas. Timoshenko e Goodier [1] estudaram os efeitos de empenamento das seções e apresentaram expressões para o cálculo da função de empenamento fazendo uso da função de Prandtl. Posteriormente, Lue *et al.* [2] citam pesquisadores que se dedicaram à tarefa da determinação específica da constante C_w e consideraram simplificações sobre as funções lineares das propriedades de empenamento, resultando em expressões matemáticas adequadas para a implementação computacional; contudo, não apresentam de forma clara as etapas de programação. Fong e Vanni [3] desenvolveram a teoria apresentada por Lue *et al.* de forma detalhada para seções de geometria genérica.

Este trabalho teve como motivação o desenvolvimento de um aplicativo computacional, de uso fácil e amigável, para o cálculo das propriedades geométricas de perfis delgados em seções abertas e sem eixos de simetria, para os quais inexitem expressões fechadas para a sua determinação, lançando mão de procedimentos numéricos relativos a integrais de linha e de área. O artigo não se propõe à exposição das teorias analíticas para a obtenção dos parâmetros citados, mas resumí-las e organizá-las de forma a possibilitar a compreensão de sua implementação. Com base metodológica no trabalho de Fong e Vanni [3], este aplicativo está disponível para a comunidade acadêmica e profissional, com a finalidade de disseminar o seu uso. Sabe-se que existem alguns programas para este cálculo, porém de complexidade maior, por serem baseados no Método dos Elementos Finitos.

2 Desenvolvimento teórico

O passo inicial consiste na determinação das posições do centroide (C), Eq. 1, e do centro de cisalhamento (CC) da seção, Eq. 2, ilustradas na Fig. 1. Embora as expressões para seu cálculo sejam elementares, a partir destas informações as demais variáveis podem ser estabelecidas.

$$X_C = \frac{1}{A} \int_A x \, dA \quad \text{e} \quad Y_C = \frac{1}{A} \int_A y \, dA \quad (1)$$

A origem inicial do sistema de coordenadas (x,y) , idealmente, deve ser posicionada no canto inferior esquerdo da seção, e as coordenadas da Eq. 1 estão associadas a este sistema de referência. Para o CC, por sua vez, consideram-se as coordenadas (x,y) a partir do centroide, calculado pela Eq. 1 e indicado na Fig. 1. ρ é a distância do centroide à tangente da linha média da seção aberta; o limite “E” da integral significa a extensão da estrutura; e “S”, a extensão do trecho em estudo.

$$X_{CC} = \frac{1}{I_x} \int_0^E \rho \left(\int_0^S y t \, ds \right) ds \quad \text{e} \quad Y_{CC} = \frac{1}{I_y} \int_0^E \rho \left(\int_0^S x t \, ds \right) ds \quad (2)$$

Galambos, em 1968, *apud* Lue *et al.* [2], apresentou as expressões abaixo para a determinação da constante de empenamento (C_w). Observe-se que a definição, embora relativamente simples, associa integrais de funções integrais, o que dificulta sobremaneira o cálculo manual.

$$C_w = \int_0^E W_N^2 t \, ds \quad (3)$$

com
$$W_N = \frac{1}{A} \int_0^E w_0 t \, ds - w_0 \quad (4)$$

$$w_0 = \int_0^S \rho_0 \, ds \quad (5)$$

e
$$A = \int_0^E t \, ds \quad (6)$$

W_N é a unidade de empenamento normalizado; w_0 , a unidade de empenamento com relação ao CC; “ t ”, a espessura; ρ_0 , a distância do CC à tangente da linha média; e “ A ”, a área da seção.

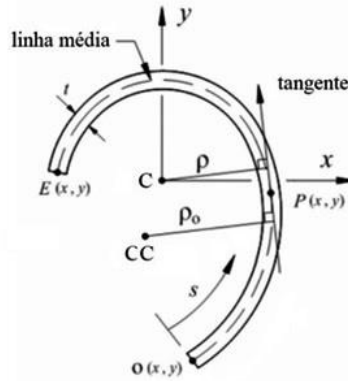


Figura 1. Centroide e centro de cisalhamento em seções abertas. Adaptado de Lue *et al.* [2]

3 Desenvolvimento numérico-computacional

Para a rotina computacional, utilizaram-se expressões simplificadoras do processo de integração numérica sobre seções abertas genéricas, considerando-se o comportamento linear das funções das propriedades de empenamento (Fong e Vanni [3]). De forma sintética, o processo é composto das seguintes etapas principais:

(1) Definição dos nós e dos segmentos (ou ramos) sobre a linha média do perfil. Os nós devem ser posicionados nas extremidades e intersecções de segmentos; e entre estes, outros, em posição e quantidade a serem definidos pelo usuário de acordo com sua expectativa de distribuição das tensões de cisalhamento. Para os “ r ” ramos, é importante que cada espessura “ t ” seja constante e a conectividade, ou incidência, seja definida pelos nós inicial (i) e final (f), acompanhando o sentido esperado do fluxo de cisalhamento.

(2) Determinação do centroide. Definem-se a origem e a orientação do sistema de coordenadas global. Assim, calcula-se a posição do centroide (C) da seção genérica que, pela Eq. 1, resulta em:

$$X_C = \frac{\sum_k x_k A_k}{\sum_k A_k} \quad \text{e} \quad Y_C = \frac{\sum_k y_k A_k}{\sum_k A_k}; \quad \text{com } k = 1, \dots, r \quad (7)$$

(3) Determinação do centro de cisalhamento (CC). Da forma integral da Eq. 2, tem-se:

$$X_{CC} = \frac{I_{xy} I_{wx} - I_{yy} I_{wy}}{I_{xy}^2 - I_{xx} I_{yy}} \quad \text{e} \quad Y_{CC} = \frac{I_{xx} I_{wx} - I_{xy} I_{wy}}{I_{xy}^2 - I_{xx} I_{yy}} \quad (8)$$

I_{xx} e I_{yy} são os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados x e y (no centroide), respectivamente; I_{xy} é o produto de inércia, e I_{wx} e I_{wy} são os momentos de inércia de empenamento.

Os momentos de inércia da seção, definidos a partir dos r segmentos, são dados por:

$$I_{xx} = \sum_k \frac{A_k}{3} \left[(y_i^k - Y_C)^2 + (y_i^k - Y_C)(y_f^k - Y_C) + (y_f^k - Y_C)^2 \right]; \quad k = 1, \dots, r \quad (9)$$

$$I_{yy} = \sum_k \frac{A_k}{3} \left[(x_i^k - X_C)^2 + (x_i^k - X_C)(x_f^k - X_C) + (x_f^k - X_C)^2 \right]; \quad k = 1, \dots, r \quad (10)$$

$$I_{xy} = \sum_k \left\{ \frac{A_k}{3} \left[(x_i^k - X_C)(y_i^k - Y_C) + (x_f^k - X_C)(y_f^k - Y_C) \right] + \frac{A_k}{6} \left[(x_i^k - X_C)(y_f^k - Y_C) + (x_f^k - X_C)(y_i^k - Y_C) \right] \right\}; \quad k = 1, \dots, r \quad (11)$$

Os momentos de inércia de empenamento I_{wx} e I_{wy} requerem a determinação, para cada nó n , do valor da resultante nodal $w_n = \int_0^S \rho ds$ e $w_n^k = \sum_k \rho_k L_k$, onde ρ_k é a distância normal do centroide à tangente da linha média por cada segmento k ; e L_k é o comprimento de cada segmento. Assim:

$$\rho_k = (-L_y^k X_C + L_x^k Y_C + x_i^k y_f^k - x_f^k y_i^k) / L_k \quad (12)$$

A partir da definição de w_n para os nós inicial e final do segmento k , tem-se w_i^k e w_f^k , e as coordenadas nodais definidas em relação ao centroide, as quais serão designadas por $X'_n = x_n - X_C$ e $Y'_n = y_n - Y_C$. Desta forma, é possível determinar I_{wx} e I_{wy} conforme as seguintes expressões:

$$I_{wx} = \frac{1}{3} \sum_k [w_i^k X'_i + w_f^k X'_f] t_k L_k + \frac{1}{6} \sum_k [w_i^k X'_f + w_f^k X'_i] t_k L_k \quad (13)$$

$$I_{wy} = \frac{1}{3} \sum_k [w_i^k Y'_i + w_f^k Y'_f] t_k L_k + \frac{1}{6} \sum_k [w_i^k Y'_f + w_f^k Y'_i] t_k L_k \quad (14)$$

(4) Cálculo da constante de empenamento. Com a Eq. 5, a resultante nodal $w_{0n} = \int_0^S \rho_0 ds$ e $w_{0n}^k = \sum_k \rho_{0k} L_k$, onde ρ_{0k} é a distância normal do centro de cisalhamento à tangente da linha média para cada segmento k . Usando-se a Eq. 12 e substituindo-se as coordenadas (X_C, Y_C) por (X_{CC}, Y_{CC}) , de forma análoga ao procedimento anterior, obtém-se se w_{0i}^k e w_{0f}^k para cada segmento k e procede-se ao cálculo do empenamento normalizado apresentado na Eq. 4, para cada nó n . Na Eq. 15 omitir-se-á o índice “N” (de normalizado), a fim de simplificar as expressões.

$$W_n = \frac{1}{2A} [\sum_k (w_{0i}^k + w_{0f}^k) (t_k L_k)] - w_{0n} \quad (15)$$

Para cada segmento k associam-se W_{ni} e W_{nf} , para os nós de incidência correspondentes, procedendo-se à determinação da constante C_w , conforme apresentado na Eq. 3:

$$C_w = \frac{1}{3} \sum_k (W_{ni}^2 + W_{ni} W_{nf} + W_{nf}^2) (t_k L_k) \quad (16)$$

A dificuldade maior na implantação computacional refere-se ao cálculo da seção genérica, não padronizada, pois este requer o gerenciamento de muitos dados e a sua organização em “planilhas”.

4 O aplicativo PROPGEO

O aplicativo PROPGEO utiliza as linguagens de programação Java e HTML e o que o diferencia de outros programas que apresentam finalidade semelhante é o cálculo da constante de empenamento para seção qualquer. A Fig. 2 ilustra a interface de entrada de dados e a saída de resultados para a opção “Pré-definido” ativada. Nesta, encontram-se as seções nos formatos retangular, I, T, C, e L. Mais abaixo, visualiza-se a opção “Personalizado”, com a entrada das coordenadas nodais e a identificação de cada segmento e sua incidência, caso a seção não seja padronizada.

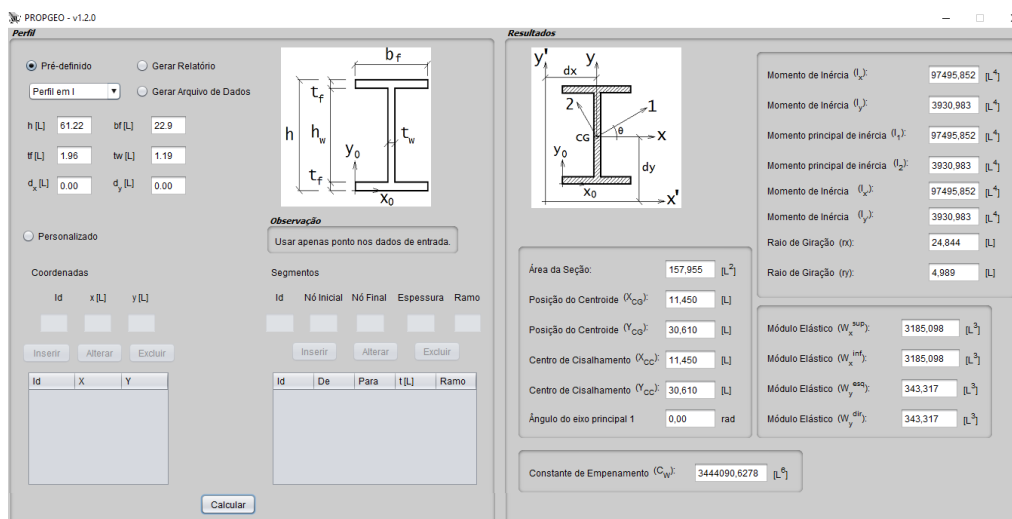


Figura 2. Tela do PROPGEO com a entrada de dados e saída dos resultados

A Tabela 1 mostra os valores resultantes da constante de empenamento de seções padrão do aplicativo considerando a opção “pré-definido” em confronto com o valor teórico. A Tabela 2 exibe os resultados obtidos para as seções genéricas de paredes delgadas apresentadas na Fig. 3a e 3b (sendo que a Fig. 3c ilustra a discretização desta), apresentadas por Lue *et al.* [2] e por Fong e Vanni [3].

Tabela 1. Constante de empenamento para seções pré-definidas

Seções	H (cm)	B (cm)	h (cm)	b (cm)	C_w PROP GEO (cm ⁶)	C_w teórico (cm ⁶)
I	57,3	22,9	1,96	1,19	344090,6278	344090,6278
L	19,03	10,2	1,27	1,27	482,4961	482,0
C	27,96	7,4	1,27	0,72	29109,7339	29109,7339

Tabela 2. Constante de empenamento para seções genéricas (personalizadas)

Seções	C_w PROP GEO (cm ⁶)	C_w literatura (cm ⁶)	Erro (%)
3a	4484,1847	4482,66922	0,033
3b	7571,5992	7571,520976	0,001

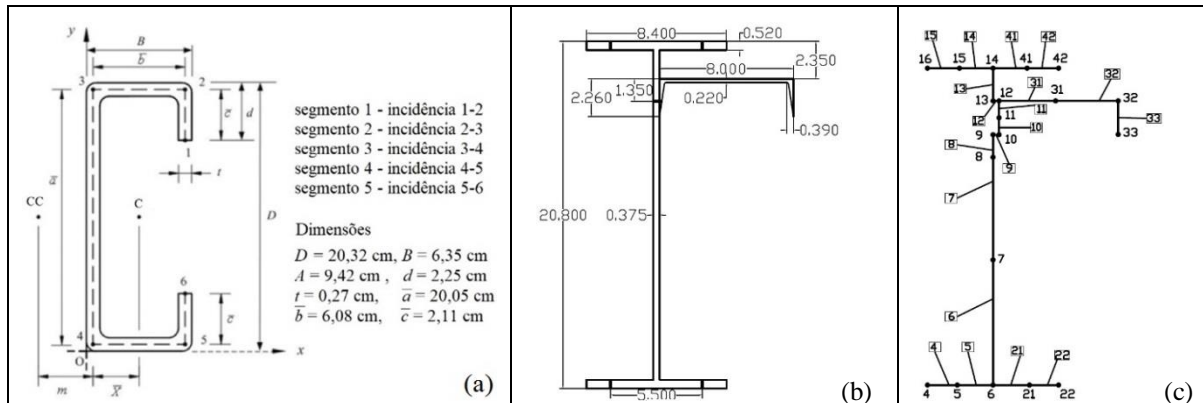


Figura 3. Seções de paredes delgadas e indicação dos nós e segmentos

5 Conclusões

Este trabalho, fruto de uma pesquisa de Iniciação Científica, foi motivada pela necessidade de se calcular parâmetros geométricos de seções abertas e paredes delgadas genéricas na consideração da torção em projetos de estruturas metálicas e de concreto. Observou-se a carência destas informações e de expressões analíticas disponíveis na literatura, especialmente no tocante ao empenamento, quando se tem uma seção não padronizada.

O aplicativo, chamado de PROP GEO, além das características geométricas usuais, fornece especialmente o valor da constante de empenamento, cujo cálculo manual é complexo e árduo. Nas sub-rotinas foram consideradas integrais de linha e de área, aplicadas na discretização da seção em segmentos retilíneos. Os resultados dos testes iniciais indicam a potencialidade do aplicativo e a sua confiabilidade. O próximo passo planejado é a introdução do cálculo do módulo plástico das seções.

Agradecimentos

Os autores agradecem à UFRN pela concessão da bolsa de Iniciação Científica.

Referências

- [1] S. P. Timoshenko e J. N. Godier. *Teoria da elasticidade*. 3. ed. Editora Guanabara Dois, 1970.
- [2] D. M. Lue; J. Lui e C. Lin. Numerical evaluation of warping constants of general cold-formed steel open sections. *Steel Structures*. v.7, p. 297-309, 2010.
- [3] J. Fong e B. Vanni. *Warping constant of open sections with arbitrary profile geometry*. Structural Design Corporation, 2010.