

ANÁLISE DE VIGA DE TIMOSHENKO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Amadeo K. P. de Souza

Fernanda R. Mittelbach

amadeo_10@hotmail.com

fernanda_mittelbach@yahoo.com.br

Departamento de Engenharia Civil - Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Av. Senador Salgado Filho, 300, 059078-970, Natal/RN, Brasil

Abstract. This work aims to analyze the structural behavior of beams in linear elastic regime by the Finite Element Method (MEF) based on the Timoshenko Beam Theory. A numerical study of the problem was developed and used as a base to a computational code that was developed in Fortran language to be capable of simulating the structural behavior of beams through the aforementioned theory. In order to validate the computational code, the results obtained through the analytical solutions of the Timoshenko Beam Theory were compared with the numerical results, which were also compared with the results of the analytical solutions obtained through the Euler-Bernoulli Beam Theory, highlighting the differences between the two theories.

Keywords: Finite Element Method. Timoshenko beam theory. Beam static analysis.

1 Introdução

A viga é um elemento estrutural amplamente utilizado na Engenharia Civil e, por isso, torna-se importante o conhecimento de seu comportamento. A Resistência dos Materiais apresenta teorias básicas para determinar os deslocamentos e esforços solicitantes envolvidos na análise de vigas (HIBBELER [1]).

A teoria mais comum para o cálculo dos deslocamentos de vigas é a Teoria de Euler-Bernoulli, também chamada de teoria clássica, como apresentado em Beer et al. [2]. Essa teoria não leva em consideração os efeitos do cisalhamento na deformação da viga, diferentemente da Teoria de Timoshenko.

Em vigas esbeltas (razão comprimento-altura maior do que 20), os resultados da Teoria de Timoshenko recaem nos resultados da Teoria de Euler-Bernoulli, sendo desprezível a parcela da distorção na viga. Já em vigas semi-espessas (razão comprimento-altura menor do que 20), observa-se uma discrepância entre as curvas de deflexão das duas teorias, com a Teoria de Timoshenko mostrando-se mais precisa (SORIANO; LIMA [3]).

Por resultar em interações ação-estrutura mais complexas, o estudo de vigas através da Teoria de Timoshenko torna essencial a utilização de modelos matemáticos e a discussão das formulações de elementos finitos para a caracterização do comportamento mecânico destes elementos.

Devido a sua grande versatilidade, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é o método numérico mais empregado no âmbito da Engenharia Estrutural, e sua modelagem garante soluções viáveis e precisas para os mais diversos problemas estruturais. Sua ideia geral consiste em discretizar um domínio contínuo em diversos elementos finitos, interligados através de nós com determinados graus de liberdade.

O presente trabalho pretende implementar computacionalmente um código baseado no Método dos Elementos Finitos para a avaliação elástica linear de vigas de Timoshenko.

2 Justificativa

A viga é um elemento que tem diferentes tipos de aplicações estruturais e é comumente abordada, no âmbito da graduação, utilizando-se as hipóteses simplificadoras da Teoria de Euler-Bernoulli.

Em casos nos quais a deformabilidade por esforço cortante se torna relevante, como é o caso de vigas semi-espessas, a Teoria de Euler-Bernoulli não mais se aplica. A teoria de vigas que estuda o comportamento de vigas semi-espessas é a Teoria de Vigas de Timoshenko, de que trata o presente trabalho.

Conforme exposto por Bandeira e Gonzalez [4], este aprofundamento dos estudos resulta em problemas que vão além daqueles descritos por Euler-Bernoulli e exigem o conhecimento de outras teorias estruturais, resultando em interações ação-estrutura mais complexas e tornando essencial a discussão das formulações de elementos finitos.

3 Objetivos

3.1 Objetivos gerais

O objetivo geral do presente trabalho é desenvolver um código computacional para realizar a análise de um elemento de viga semi-espessa (viga de Timoshenko), através da formulação Método dos Elementos Finitos (MEF). Os resultados numéricos serão então comparados com as soluções analíticas da Teoria de Vigas de Timoshenko e da Teoria de Vigas de EulerBernoulli.

3.2 Objetivos específicos

- Realizar uma análise analítica dos deslocamentos e esforços solicitantes de uma viga de Timoshenko;
- Utilizar a formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) para desenvolvimento e programação de um código computacional para a obtenção dos resultados;
- Verificar o quão significativa é a diferença nos resultados obtidos através da teoria de Euler-Bernoulli e de Timoshenko no cálculo de vigas semiespessas;
- Comparar os resultados numéricos com os resultados obtidos analiticamente, validando o código desenvolvido.

4 Metodologia

Primeiramente, foi realizada uma revisão bibliográfica com o intuito de garantir o domínio dos conceitos estabelecidos pela Teoria de Euler-Bernoulli e pela Teoria de Timoshenko para o estudo de vigas.

A etapa seguinte consistiu na aprendizagem do modelo de cálculo do Método dos Elementos Finitos para vigas de Timoshenko.

Em seguida, houve a escolha das características das vigas a serem estudadas e dos tipos de carregamentos aplicados, para que então as vigas sejam estudadas analiticamente.

Com base no Método dos Elementos Finitos, foi realizada a formulação numérica e desenvolvido um código computacional em linguagem FORTRAN para que fosse feita uma comparação dos resultados obtidos analítica e numericamente.

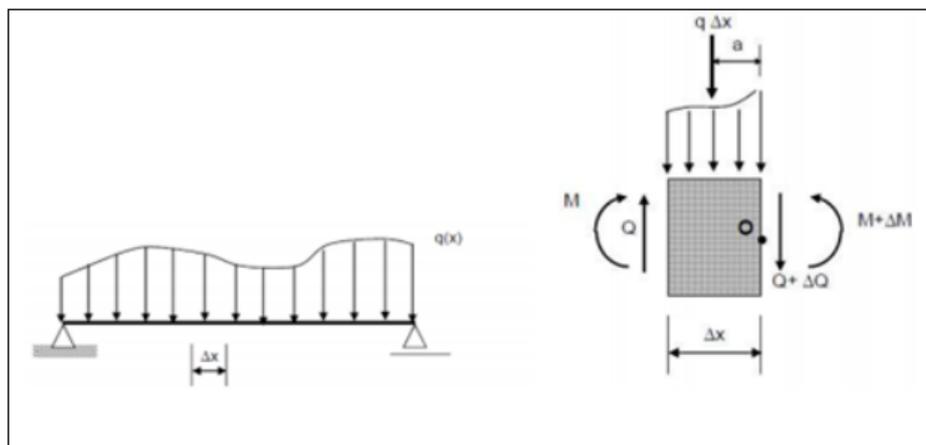
5 Fundamentação teórica

5.1 Definição de viga

As vigas são elementos lineares (elementos nos quais uma das dimensões, no caso o comprimento, é consideravelmente maior do que as outras duas) nos quais a flexão é preponderante em relação às demais deformações.

Os elementos de pórtico plano são elementos nos quais o plano das cargas é coincidente com o plano da estrutura. Elementos de viga são casos especiais de elementos de pórtico plano, uma vez que as cargas que atuam nas vigas são dispostas perpendicularmente ao seu eixo longitudinal, podendo ser concentradas ou distribuídas. Devido a simplificações das teorias de vigas, somente as componentes de tensão σ_x e τ_{xy} são consideradas na análise, sendo as demais desprezadas.

Figura 1 - Viga biapoiada e elemento infinitesimal.



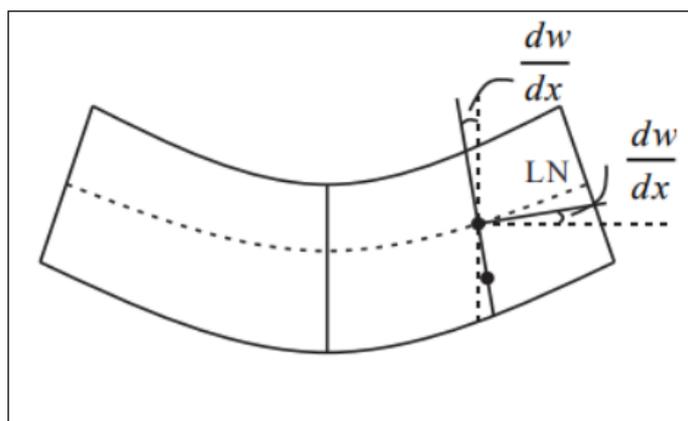
Fonte: Hallack, Lemonge, Barbosa e Hallack (2012).

Como todo elemento estrutural, é importante conhecer comportamento mecânico das vigas. O levantamento de esforços internos e deformações é necessário para o correto dimensionamento de tais elementos.

5.2 A Teoria de Vigas de Euler Bernoulli

No estudo do comportamento de vigas, a teoria de Euler-Bernoulli é comumente utilizada. De acordo com Silva e Silva (2010) apud Souza e Cruz [5], adotando-se um campo de deslocamentos, a teoria baseia-se nas hipóteses de que uma linha reta e normal à superfície neutra antes da deformação permanecerá reta e normal após a deformação da peça. Além disso, esta assume que o deslocamento lateral é nulo, bem como que os deslocamentos transversais em todos os pontos da mesma seção transversal são pequenos e iguais aos deslocamentos transversais do eixo da viga.

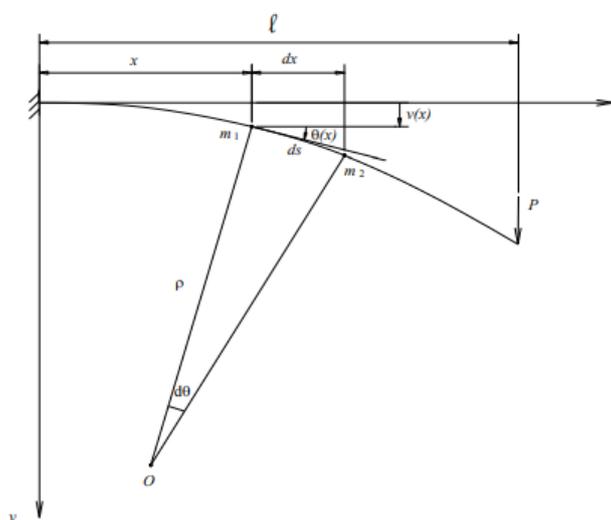
Figura 2 - Modelo de viga de Euler-Bernoulli.



Fonte: Souza e Cruz (2018).

Portanto, o modelo de Euler-Bernoulli para vigas desconsidera as distorções por cisalhamento e, como consequência, supõe que a derivada do deslocamento transversal seja igual à rotação da seção transversal. A figura 3 representa, de forma exagerada, a deformação de uma viga levando-se em conta o modelo de Euler- Bernoulli.

Figura 3 – Deformada de uma viga engastada e livre.



Fonte: Mittelbach (2011)

Onde:

$v(x)$ - deslocamento transversal de um ponto genérico do eixo longitudinal da viga, também chamado de elástica da viga;

$\theta(x)$ - ângulo que a reta tangente, num ponto genérico, à deformada da viga faz com o eixo x ;
Com o objetivo de obter a expressão de $v(x)$, considera-se o trecho situado entre os pontos m_1 e m_2 da figura 3. Neste trecho de comprimento infinitesimal pode-se admitir que o raio de curvatura ρ seja constante e, neste caso, seu comprimento ds pode ser escrito por $ds = \rho \cdot d\theta$, donde se conclui que a curvatura κ do eixo longitudinal da viga, convencionada como positiva quando a concavidade da curva for voltada para baixo, é:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (1)$$

Considerando que a deformada da viga é uma função $v(x)$, a inclinação da reta tangente à deformada da viga, num determinado ponto, é dada pela $tg(\theta(x))$, e é igual à derivada de $v(x)$ em relação a x avaliada nesse mesmo ponto. Assim,

$$tg\theta = \frac{dv}{dx} \quad (2)$$

Da figura 3 tem-se, ainda,

$$ds = \frac{dx}{\cos\theta} \quad (3)$$

No caso de pequenas rotações, valem as aproximações:

$$\cos\theta \cong 1 \quad (4)$$

$$tg\theta \cong \theta \quad (5)$$

Com base em **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, a equação **Erro! Fonte de referência não encontrada.** se escreve $ds \cong dx$, e conseqüentemente a equação **Erro! Fonte de referência não encontrada.** se torna

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \quad (6)$$

Com base em **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, a equação **Erro! Fonte de referência não encontrada.** se torna:

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} \quad (7)$$

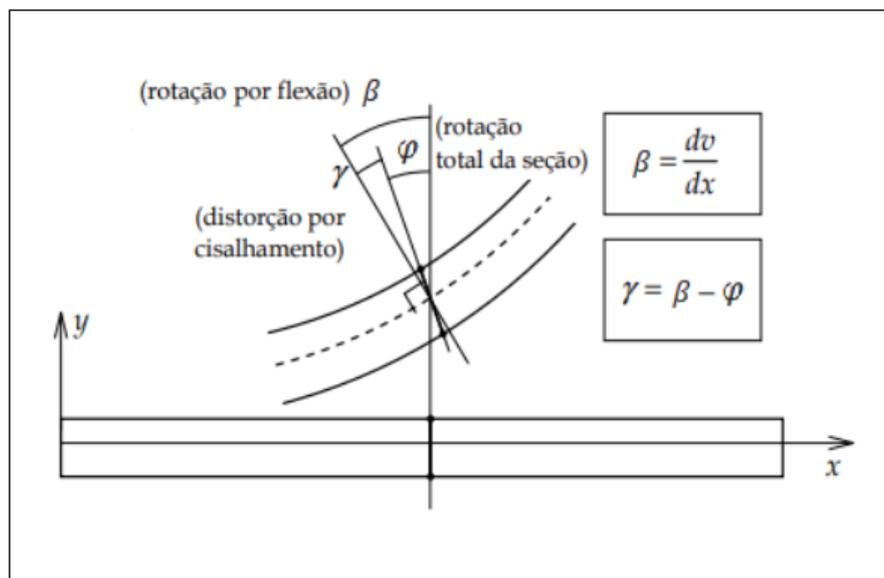
5.3 A Teoria de Vigas de Timoshenko

A hipótese de que as seções transversais permanecem planas e normais à linha neutra, na teoria clássica, corresponde a desprezar a deformabilidade por esforço cortante na deflexão da viga. Porém, esta deformabilidade nem sempre pode ser desprezada. A teoria proposta por Timoshenko para vigas leva em consideração os efeitos oriundos da contribuição da distorção no comportamento dos elementos de viga (deslocamentos e rotações), chegando a resultados mais refinados e mais próximos da realidade do que aqueles advindos da teoria de Euler-Bernoulli, principalmente nas vigas com uma maior razão comprimento-altura.

De acordo com Martha e Burgos [6], quando o modelo de Timoshenko para uma viga é aplicado, considera-se normalmente a distorção por cisalhamento como uma rotação adicional, sendo esta

incorporada ao problema, que, dessa forma, leva-se em conta a rotação da seção transversal e o deslocamento transversal como variáveis independentes.

Figura 4 - Distorção por cisalhamento na viga de Timoshenko.



Fonte: Adaptado de Marthe e Burgos (2014)

A solução das equações constituintes do modelo de Timoshenko é, para casos muito restritos, obtida na literatura especializada por métodos analíticos. Quando esses métodos não atendem às condições impostas pelo problema, faz-se uso de métodos numéricos. Nesse último, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é mais frequentemente aplicado (SOUZA; MENDONÇA [7]).

5.4 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma ferramenta numérica eficiente de resolução de problema de meio contínuo e é parte integrante de modernos currículos de engenharia (SORIANO; LIMA [3]).

Apesar de haver diversos sistemas computacionais com implementação de elementos finitos, não é recomendável utilizá-los sem estabelecer um modelo matemático a partir do sistema físico em questão e sem conhecer as hipóteses que fundamentam a idealização do modelo discreto em elementos finitos. Além disso, os resultados de análise devem ser interpretados adequadamente.

Conforme citado por Soriano e Lima [3], a concepção do MEF consiste em fazer a divisão do domínio de um meio contínuo em um número discreto de 21 subdomínios interligados entre si por pontos em seus contornos, de modo que juntos se comportem de maneira similar ao meio contínuo original.

Podemos estruturar o MEF em cinco etapas principais: pré-processamento, onde é estabelecida a subdivisão do domínio do problema em elementos finitos; formulação dos elementos, onde as equações para os elementos são desenvolvidas; montagem, onde obtém-se o sistema global de equações; resolução das equações; e pós-processamento, onde os valores de interesse são determinados e a visualização das respostas é obtida (FISH; BELYTSCHKO [8]).

6 MEF aplicado a vigas de Timoshenko

A utilização de elementos finitos para o estudo de vigas pela Teoria de Timoshenko é proposta por diversos autores, entre eles NICKEL & SECOR (1972), TESSLER & DONG (1981), NAVARRA (1995), e vários outros, que diferem entre si pela escolha da função de interpolação utilizada na aproximação dos deslocamentos transversais e rotações. De acordo com a literatura existente, as formulações já desenvolvidas baseiam-se no Método dos Deslocamentos ou em Métodos Mistos.

(NEVES [9]).

Ainda de acordo com Neves [9], as formulações em elementos finitos mais simples, que consideram interpolações lineares para os deslocamentos transversais e para as rotações, são muito rígidas para vigas que pouco se deformam ao esforço cortante, acarretando o travamento da solução, conhecido como efeito “shear locking”, que é a tendência da solução por elementos finitos ser zero à medida que certos parâmetros tornam-se grandes.

Por ser simples e eficiente, a formulação utilizada neste trabalho para a dedução da matriz de rigidez do elemento de viga de Timoshenko é a que está contida em NEVES [9], baseada em GERE & WEAVER (1987), e que é obtida com função de forma exata, evitando o problema de travamento.

Os parâmetros nodais utilizados nesta dedução são os seguintes:

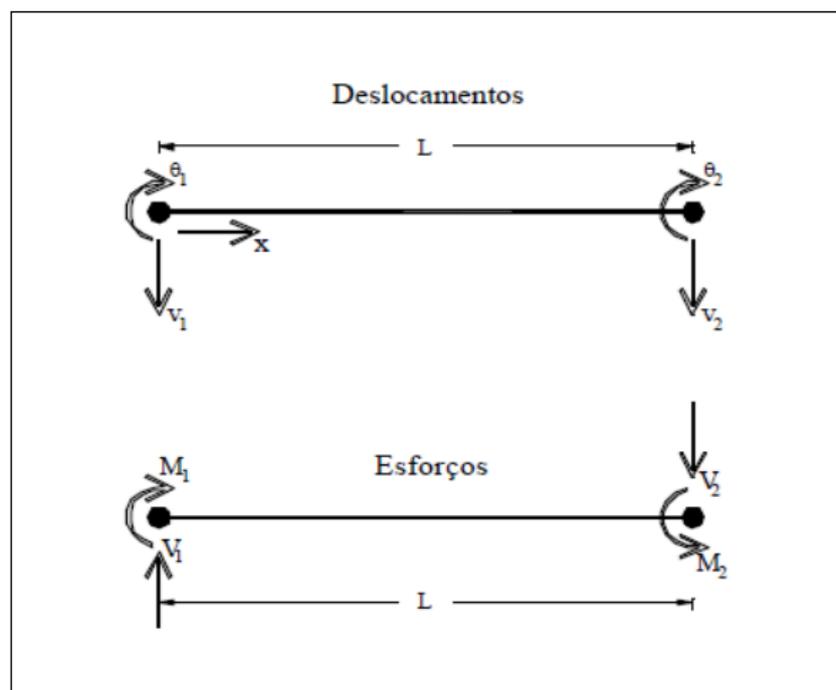
v_1 e v_2 – flechas devidas a momento fletor e força cortante

θ_1 e θ_2 – rotações devidas apenas a momento fletor

As convenções usuais para a formulação de problemas através do Método dos Elementos Finitos apresentam uma certa incompatibilidade com as convenções adotadas nas equações clássicas da resistência dos materiais, pois são diferentes. À princípio, seria ideal o uso das convenções da Resistência dos Materiais, mas para que a programação fique mais simples será utilizada a convenção da formulação em elementos finitos e os sinais serão ajustados ao final da formulação.

Nas equações da Resistência dos Materiais, tem-se a convecção de sinais descrita na Figura 5:

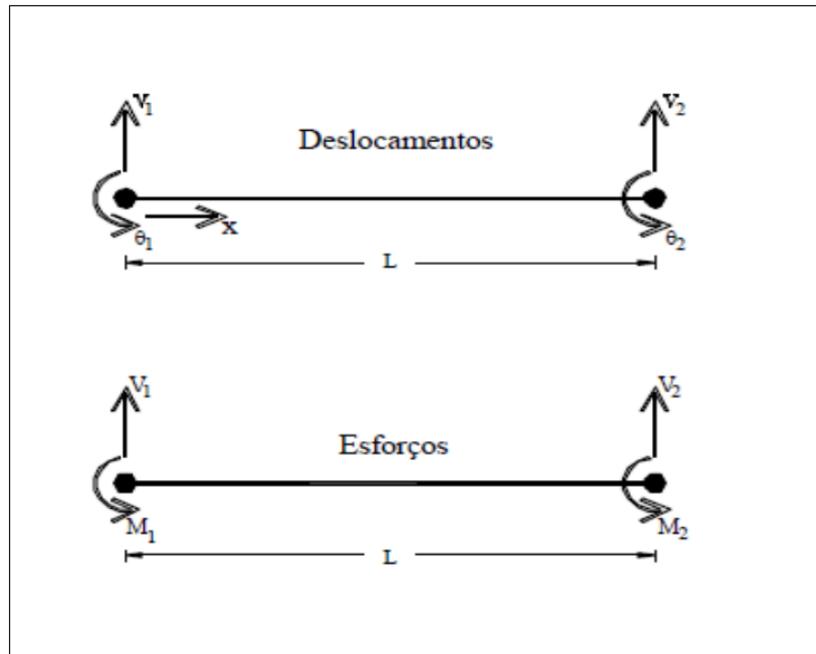
Figura 5 – Convenção de sinais da Resistência dos Materiais.



Fonte: Neves (2000).

Na formulação em elementos finitos, utiliza-se a convenção de sinais ilustrada na Figura 6:

Figura 6 – Convenção de sinais do MEF.



Fonte: Neves (2000).

A partir da Figura 4, temos que $vt = vf + vc \rightarrow dvt/dx = dvf/dx + dvc/dx$, onde:

$vt =$ deslocamento transversal total

$vf =$ deslocamento transversal devido à flexão

$vc =$ deslocamento transversal devido ao cisalhamento

$$\therefore \beta = \varphi + \gamma \rightarrow \gamma = \beta - \varphi \quad (8)$$

Tomando-se as equações de equilíbrio da Resistência dos Materiais, para um elemento isolado tem-se:

$$\frac{dV}{dx} = -q. \quad (9)$$

$$\frac{dM}{dx} = V. \quad (10)$$

Onde:

$V =$ força cortante

$M =$ momento fletor

$q =$ taxa de carregamento transversal distribuída no elemento

A Resistência dos Materiais também fornece as seguintes relações:

$$M = -EI \frac{d\varphi}{dx}; \quad V = -EI \frac{d^2\varphi}{dx^2}. \quad (11)$$

$$V = KGA \times \gamma = KGA \left(\frac{dv}{dx} - \varphi \right). \quad (12)$$

Obs.: K é o fator de forma da seção transversal. Para uma seção retangular, $K = 5/6$. Para uma seção circular, $K = 10/9$.

A partir de agora, será desenvolvida a formulação em elementos finitos e, portanto, será adotada a convenção de sinais do Método dos Elementos Finitos, fazendo-se a compatibilização mais adiante.

Como na formulação em elementos finitos temos vetor de cargas nodais equivalentes, admite-

se que não haja cargas distribuídas ao longo do comprimento do elemento ($q = 0$).

$$\therefore \frac{dv}{dx} = 0. \quad (13)$$

Relacionando (12) e (13), tem-se:

$$\frac{d}{dx} KGA \left(\frac{dv}{dx} - \varphi \right) = 0 \rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{dx} - \varphi \right) = 0. \quad (14)$$

Substituindo (11) e (12) em (10):

$$\frac{d}{dx} \left(-EI \frac{d\varphi}{dx} \right) - KGA \left(\frac{dv}{dx} - \varphi \right) = 0 \rightarrow EI \frac{d^2\varphi}{dx^2} + KGA \left(\frac{dv}{dx} - \varphi \right) = 0. \quad (15)$$

$$\text{Como } \frac{dv}{dx} = -q = 0 \rightarrow \frac{d}{dx} \left(-EI \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) = 0 \rightarrow \frac{d^3\varphi}{dx^3} = 0$$

Para se ter nula a terceira derivada da rotação, escolhe-se uma função de interpolação para as rotações, dada por:

$$\varphi = C + Bx + Ax^2. \quad (16)$$

Da equação (8), sabe-se que:

$$\gamma = \frac{dv}{dx} - \varphi. \quad (17)$$

Substituindo (16) e (17) em (15), tem-se:

$$EI \frac{d^2}{dx^2} (C + Bx + Ax^2) + KGA(\gamma) = 0 \rightarrow EI(2A) + KGA(\gamma) = 0 \rightarrow \gamma = -\frac{2AEI}{KGA}. \quad (18)$$

A equação (18) descreve a expressão para a distorção em função dos parâmetros gerais e das características geométricas e físicas da seção.

Substituindo (18) e (16) em (17):

$$\frac{dv}{dx} = C + Bx + Cx^2 - \frac{2AEI}{KGA}. \quad (19)$$

Integrando-se, a equação (19) obtém-se:

$$v = D + Cx + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Ax^3}{3} - \frac{2AEI}{KGA}x \rightarrow v = D + Cx + \frac{Bx^2}{2} + A \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2EI}{KGA}x \right). \quad (20)$$

Considerando a constante para viga de Timoshenko $g = 6EI/KGAL^2$, pode-se reescrever (20):

$$v = D + Cx + \frac{Bx^2}{2} + \frac{A}{3}(x^3 - gL^2x). \quad (21)$$

A equação (21) é o polinômio aproximador dos deslocamentos transversais da viga.

As equações (21) e (16) são polinômios expressos em função de parâmetros generalizados e devem ser reescritos em função dos parâmetros nodais do elemento, com os devidos ajustes nas convenções de sinais da Resistência dos Materiais e do MEF.

No contorno do elemento, tem-se:

- $x = 0 \rightarrow v = -v_1, \quad x = 0 \rightarrow \varphi = -\theta_1$
- $x = L \rightarrow v = -v_2, \quad x = L \rightarrow \varphi = -\theta_2$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{L^3(1-g)}{3} & \frac{L^2}{2} & L & 1 \\ L^2 & L & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ -\theta_1 \\ -v_2 \\ -\theta_2 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Resolvendo a matriz (22), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3(L\theta_2+L\theta_1-2v_2+2v_1)}{L^3(1+2g)} \\ -\frac{2(-L\theta_2-2Lv_1+L\theta_2g-L\theta_1g+3v_2-3v_1)}{L^2(1+2g)} \\ -\theta_1 \\ -v_1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

A derivada da rotação de flexão, em relação a x , é dada por:

$$\varphi' = B + 2Ax. \quad (24)$$

Substituindo os valores obtidos em (23) na equação (24), tem-se:

$$\varphi' = \left[-\frac{2(-L\theta_2-2Lv_1+L\theta_2g+L\theta_1g+3v_2-3v_1)}{L^2(1+2g)} \right] + 2x \left[-\frac{3(L\theta_2+L\theta_1-2v_2+2v_1)}{L^3(1+2g)} \right]. \quad (25)$$

Para obtermos a distorção, podemos relacionar (23), (18) e a constante “ g ”:

$$\gamma = \left[-\frac{3(L\theta_2+L\theta_1-2v_2+2v_1)}{L^3(1+2g)} \right] \times \frac{gL^2}{3} \rightarrow \gamma = \frac{g[L(\theta_1+\theta_2)+2(v_1-v_2)]}{L(1+2g)}. \quad (26)$$

A energia de deformação do elemento de viga de Timoshenko leva em consideração as parcelas de flexão e de cisalhamento, conforme mostrado na equação (27):

$$U = \frac{EI}{2} \times \int_0^L (\varphi')^2 dx + \frac{KGA}{2} \int_0^L (\gamma)^2 dx. \quad (27)$$

Assumindo que $KGA/2 = 3EI/gL^2$ e substituindo (25) e (26) em (27), tem-se:

$$U = \frac{EI}{2} \left\{ \int_0^L \left[-\frac{2(-L\theta_2-2Lv_1+L\theta_2g+L\theta_1g+3v_2-3v_1)}{L^2(1+2g)} \right] + \left[2x \left[-\frac{3(L\theta_2+L\theta_1-2v_2+2v_1)}{L^3(1+2g)} \right] \right]^2 + \frac{3EI}{gL^2} \int_0^L \left[\left[-\frac{3(L\theta_2+L\theta_1-2v_2+2v_1)}{L^3(1+2g)} \right] \times \frac{gL^2}{3} \right]^2 dx \right\}. \quad (28)$$

Calculando a equação (28), chega-se à expressão da energia de deformação:

$$U = \frac{EI}{(1+2g)L^3} (2L^2\theta_2^2 + L^2\theta_2^2g + 2L^2\theta_2\theta_1 - 2gL^2\theta_2\theta_1 - 6v_2\theta_2L + 6v_1\theta_2L + L^2\theta_1^2g + 2L^2\theta_1^2 - 6v_2\theta_1L + 6v_1\theta_1L - 12v_1v_2 + 6v_1^2 + 6v_2^2). \quad (29)$$

Derivando (29) em relação aos parâmetros nodais, segundo o princípio da mínima energia potencial total, tem-se:

$$\frac{dU}{dv_1} = \frac{6EI}{(1+2g)L^3} (2v_1 + L\theta_1 - 2v_2 + L\theta_2). \quad (30)$$

$$\frac{dU}{d\theta_1} = \frac{-2EI}{(1+2g)L^2} (-3v_1 - 2L\theta_1 - \theta_1Lg + 3v_2 - L\theta_2 + \theta_2Lg). \quad (31)$$

$$\frac{dU}{dv_2} = \frac{-6EI}{(1+2g)L^3} (2v_1 + L\theta_1 - 2v_2 + L\theta_2). \quad (32)$$

$$\frac{dU}{d\theta_2} = \frac{2EI}{(1+2g)L^2} (3v_1 + L\theta_1 - \theta_1Lg - 3v_2 + 2L\theta_2 + \theta_2Lg). \quad (33)$$

A partir da organização das equações (30), (31), (32) e (33) em forma matricial segundo o sistema $[k] \times \{u\} = \{f\}$, tem-se:

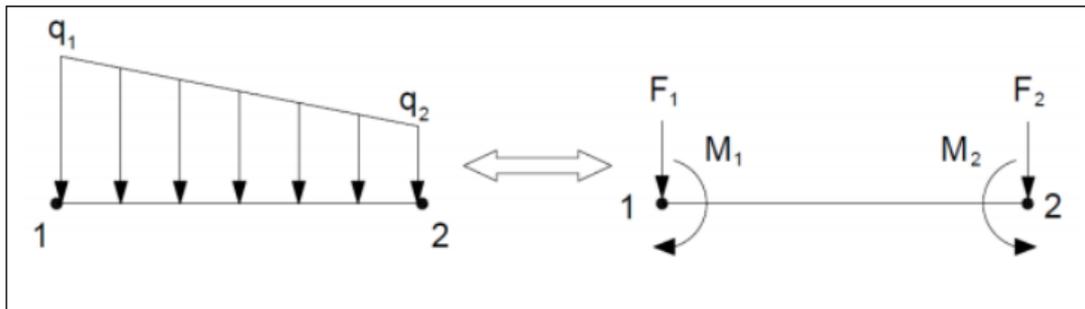
$$\frac{EI}{1+2g} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2(2+g)}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2(1-g)}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2(1-g)}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2(2+g)}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Onde $[k]$ é a Matriz de Rigidez do Elemento.

7 Vetor de cargas nodais

O vetor de cargas nodais foi estabelecido de acordo com o trabalho desenvolvido por Campos [10], que concentra os carregamentos distribuídos nos nós do elemento, como forças nodais equivalentes.

Figura 7 – Cargas nodais equivalentes do carregamento de domínio.



Fonte: Campos (2015).

Considerou-se que o carregamento distribuído assume comportamento linear, conforme a equação abaixo:

$$q(x) = ax + b. \quad (34)$$

Onde $q(x)$ é a equação que rege a função do carregamento distribuído e a e b são constantes. Nos nós, pode-se assumir as seguintes condições:

$$x = 0 \rightarrow q = q_1$$

$$x = L \rightarrow q = q_2$$

Logo:

$$a = \frac{q_2 - q_1}{L}. \quad (35)$$

$$b = q_1. \quad (36)$$

Substituindo (35) e (36) em (34):

$$q(x) = \left(\frac{q_2 - q_1}{L}\right)x + q_1. \quad (37)$$

É necessário desenvolver a integral da função do carregamento distribuído pela função dos respectivos deslocamentos virtuais para obter as parcelas de cargas nodais equivalentes:

$$\int_0^L q(x) \cdot \Delta(x) \cdot dx. \quad (38)$$

$$\Delta(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)\Delta_1 + \left(\frac{x}{L}\right)\Delta_2. \quad (39)$$

$$\int_0^L q(x) \cdot \Delta(x) \cdot dx = \left(\frac{Lq_1}{3} - \frac{Lq_2}{6}\right) \Delta_1 + \left(\frac{Lq_1}{6} - \frac{Lq_2}{3}\right) \Delta_2. \quad (40)$$

Em seguida, chega-se ao vetor de cargas nodais equivalentes do elemento:

$$\{c\} = \begin{bmatrix} \frac{L(3q_2 + 7q_1)}{20} \\ \frac{q_2L^2}{30} + \frac{q_1L^2}{20} \\ \frac{L(7q_2 + 3q_1)}{20} \\ -\frac{q_2L^2}{20} - \frac{q_1L^2}{30} \end{bmatrix}$$

8 Código computacional

O código computacional foi desenvolvido em linguagem Fortran e funciona através da leitura de dados de um arquivo de entrada em formato de texto, que são processados e resultam em um arquivo de saída onde são apresentados os valores das reações de apoio, dos esforços internos e dos deslocamentos nodais.

No arquivo de entrada devem ser incluídas informações referentes à discretização estrutural, às características físicas do material, às propriedades geométricas do elemento estrutural, aos vínculos, às restrições e aos carregamentos da estrutura.

O programa principal funciona chamando sub-rotinas específicas em sequência. As sub-rotinas utilizadas são “Declaração de variáveis”, “Abertura de arquivos”, “Montagem da matriz”, “Condições de contorno”, “Resolução do sistema”, “Reações de apoio”, “Esforços internos”, “Saída de dados” e, por fim, “Fechamento de arquivo”.

9 Análise numérica

Para a análise numérica das vigas, utilizou-se refinamentos de malha de 2, 4, 20 e 50 elementos. Os resultados obtidos numericamente foram comparados com os resultados das soluções analíticas da Teoria de Timoshenko e da Teoria de Euler-Bernoulli, que foram deduzidas e fornecidas por Fleischfresser [11], para os diferentes tipos de apoios e carregamentos abordados neste estudo.

Nos três exemplos analisados foram consideradas vigas com seção transversal retangular constante medindo 0,20m x 0,60m (área igual a 0,12m²) e fator de forma K igual a 5/6; o momento de inércia no maior sentido da seção é igual 0,0036m⁴; o material das vigas tem módulo de elasticidade longitudinal E igual a 50 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,20.

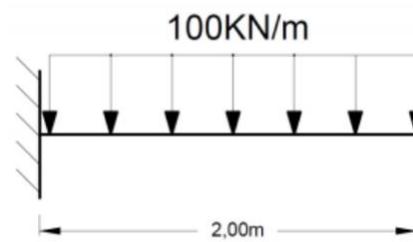
Para este estudo, foi considerada como sendo aceitável uma diferença percentual de até 2,0% entre os resultados numéricos e analíticos para os deslocamentos transversais. Esta diferença percentual foi calculada da seguinte maneira:

$$\text{Diferença percentual} = \frac{\text{Resultado Numérico} - \text{Resultado Analítico}}{\text{Resultado Analítico}}$$

9.1 Exemplo 1

Neste primeiro exemplo, foi analisado o comportamento de uma viga isostática com vinculação do tipo engastada e livre, sob ação de um carregamento de 100 KN/m distribuído de maneira uniforme ao longo de seu comprimento, que é de 2 metros, conforme ilustrado:

Figura 8 – Viga engastada e livre.



Fonte: Campos (2015).

Os resultados numéricos foram obtidos utilizando os diversos refinamentos de malha citados, e comparados com os resultados analíticos da Teoria de Timoshenko e da Teoria de Euler-Bernoulli, obtidos por meio das soluções propostas por Fleischfresser [11], que para este caso são:

- Solução analítica para o deslocamento vertical de viga de Euler-Bernoulli:

$$v(x) = \frac{q}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + xL^3). \quad (41)$$

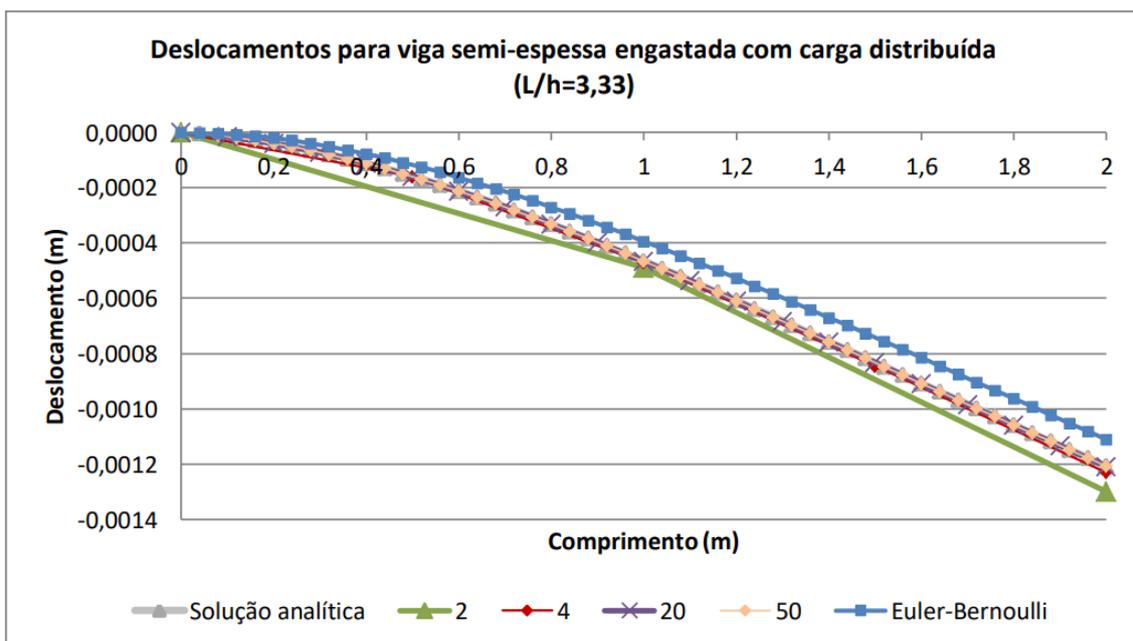
Soluções analíticas para o deslocamento vertical e para a rotação da seção transversal de qualquer ponto da viga de Timoshenko:

$$v(x) = \frac{q}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2) + \frac{q}{2KGA} (-x^2 + 2Lx). \quad (42)$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{2} + \frac{qL^2x}{2} \right). \quad (43)$$

A partir dos resultados obtidos, elaboram-se o Gráfico 1, onde podemos testar a validação do código computacional e também comparar o comportamento da estrutura previsto pelas duas teorias abordadas neste trabalho:

Gráfico 1 – Deslocamentos Transversais para a viga do Exemplo 1.

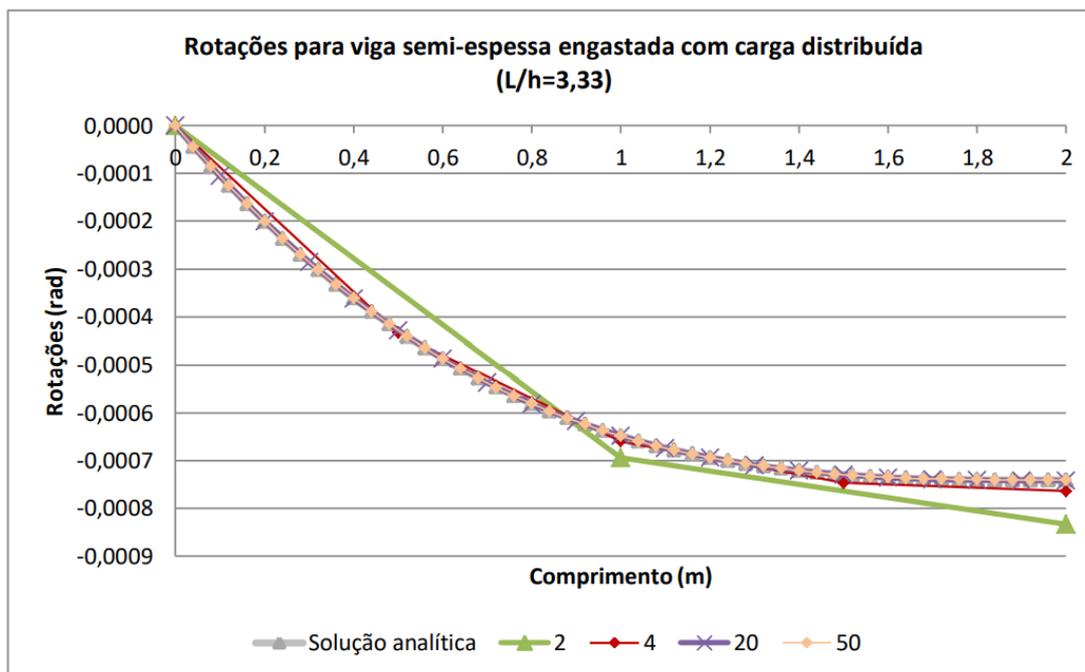


Fonte: Elaboração do autor.

No caso das rotações, os valores obtidos analiticamente pela teoria de Euler-Bernoulli não foram

levados em consideração, pois são grandezas diferentes das obtidas pela teoria de Timoshenko, uma vez que considera apenas a rotação por flexão. As rotações das seções transversais para os diferentes refinamentos de malha e para o resultado analítico de viga de Timoshenko foram comparadas no Gráfico 2:

Gráfico 2 – Rotações para a viga do Exemplo 1.



Fonte: Elaboração do autor.

A análise em conjunto dos dois gráficos nos permite perceber que com um refinamento adequado de malha é possível obtermos resultados precisos que convergem com a solução analítica de viga de Timoshenko. A tabela 1 nos mostra isso de maneira ainda mais objetiva:

Tabela 1 – Diferenças Percentuais dos Deslocamentos Transversais para a viga do Exemplo 1.

Deslocamentos máximos $v(x)$ em metros		
Numérico	Analítico	Diferença Percentual
2 elementos	-0,001207497	7,6607%
4 elementos		1,9464%
20 elementos		0,0748%
50 elementos		0,0085%

Fonte: Elaboração do autor.

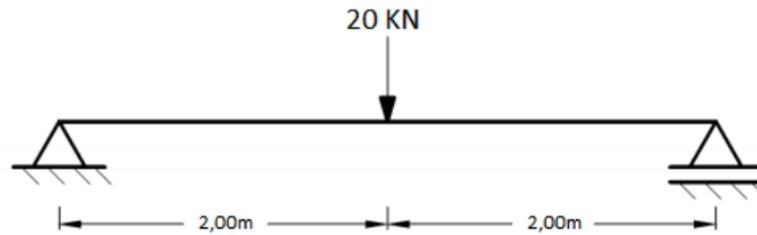
Neste exemplo, os resultados obtidos a partir da malha refinada com 4 elementos já se mostraram suficientemente precisos (abaixo de 2,0%). A curva de deslocamento obtida através da Teoria de Euler-Bernoulli, por sua vez, nos apresenta resultados que ficam abaixo daqueles obtidos através da Teoria de Timoshenko, o que já era esperado, uma vez que por ser um método simplificado, a deflexão oriunda do esforço cortante não é levada em consideração. Percebe-se que, ao utilizar a formulação simplificada, o resultado estaria contra a segurança da estrutura.

9.2 Exemplo 2

Este exemplo traz uma viga isostática, com vinculação do tipo bi apoiada, e com uma carga concentrada no centro do vão da viga, que tem comprimento de 4 metros. A carga aplicada é de 20 KN.

O restante das propriedades geométricas e das características do material consta no início deste tópico, e é o mesmo das vigas analisadas anteriormente.

Figura 10 – Viga biapoiada semi-espessa.



Fonte: Adaptado de Campos (2015).

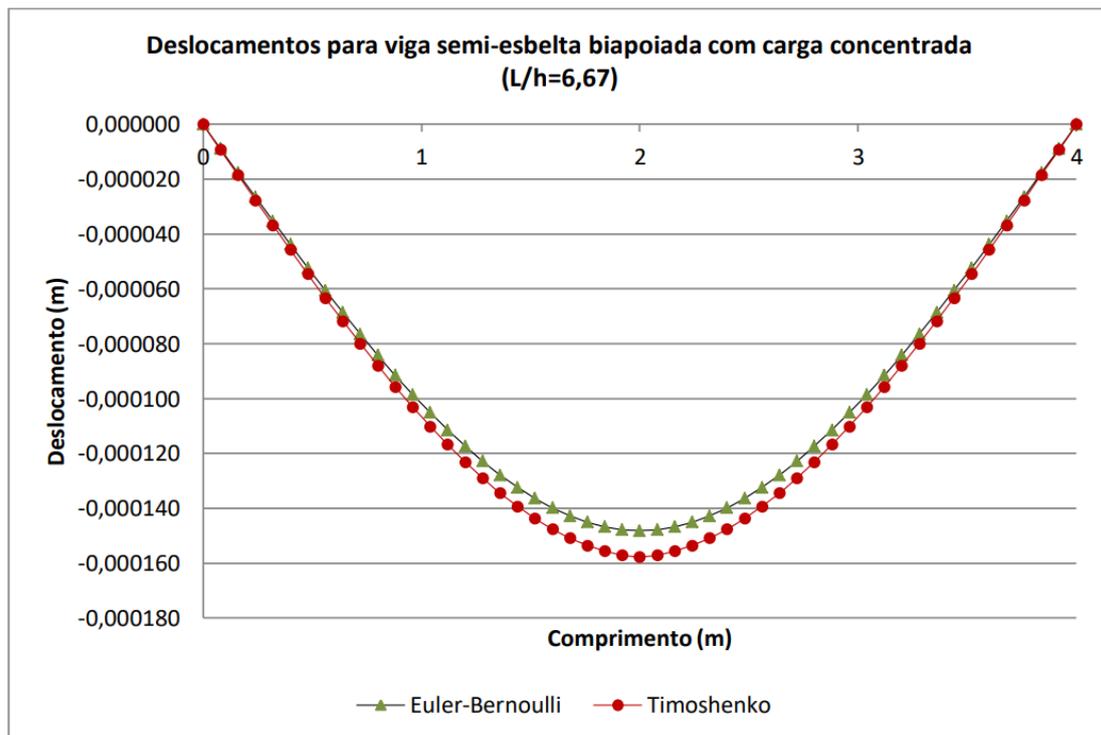
Para que fique mais explícita a diferença entre os deslocamentos verticais obtidos pelas duas teorias abordadas neste trabalho, será comparada a solução analítica de Euler-Bernoulli proposta por Fleischfresser [11] para este tipo de viga, com a solução numérica baseada na Teoria de Vigas de Timoshenko, utilizando apenas uma malha de 50 elementos, já que este refinamento se mostrou bastante preciso no exemplo anterior.

Para este caso, a equação utilizada para mensurar os deslocamentos previstos pela teoria de Euler-Bernoulli foi:

$$v(x) = -\frac{PL^3}{48EI} \left[3\left(\frac{x}{L}\right) - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right]. \quad (47)$$

Os resultados obtidos foram plotados no Gráfico 5:

Gráfico 5 – Deslocamentos Transversais para a viga do Exemplo 3.



Fonte: Elaboração do autor.

Em seguida, o deslocamento máximo definido por cada curva do gráfico foi comparado na Tabela 3 para obtenção da diferença percentual. Neste exemplo, a diferença percentual foi obtida por:

$$\text{Diferença percentual} = \frac{\text{Resultado de Timoshenko} - \text{Resultado de Euler - Bernoulli}}{\text{Resultado de Timoshenko}}$$

Tabela 3 – Comparação do deslocamento máximo pelas teorias de Timoshenko e Euler-Bernoulli para a viga do Exemplo 3

Deslocamento máximo $v(x)$ em metros			
Timoshenko (numérico)		Euler-Bernoulli (analítico)	Diferença Percentual
50 elementos	-0,0001578	-0,0001481	6,1165%

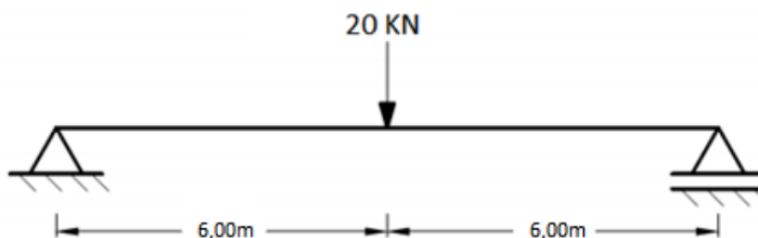
Fonte: Elaboração do autor.

As informações alcançadas através desta análise confirmam que, para vigas semi-espessas, a Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli prevê deslocamentos aquém daqueles previstos pela Teoria de Vigas de Timoshenko, indo de acordo ao já abordado no referencial teórico deste trabalho. Essa diferença é elevada e acima da diferença percentual aceitável estabelecida neste trabalho, que é de 2,0%.

9.3 Exemplo 3

Neste exemplo é feita a análise de uma viga similar à anterior (mesma vinculação e mesmo carregamento), mas com um comprimento maior, de 12 metros. O aumento do comprimento nos faz chegar a uma relação comprimento/altura igual a 20, caracterizando, portanto, a viga como esbelta.

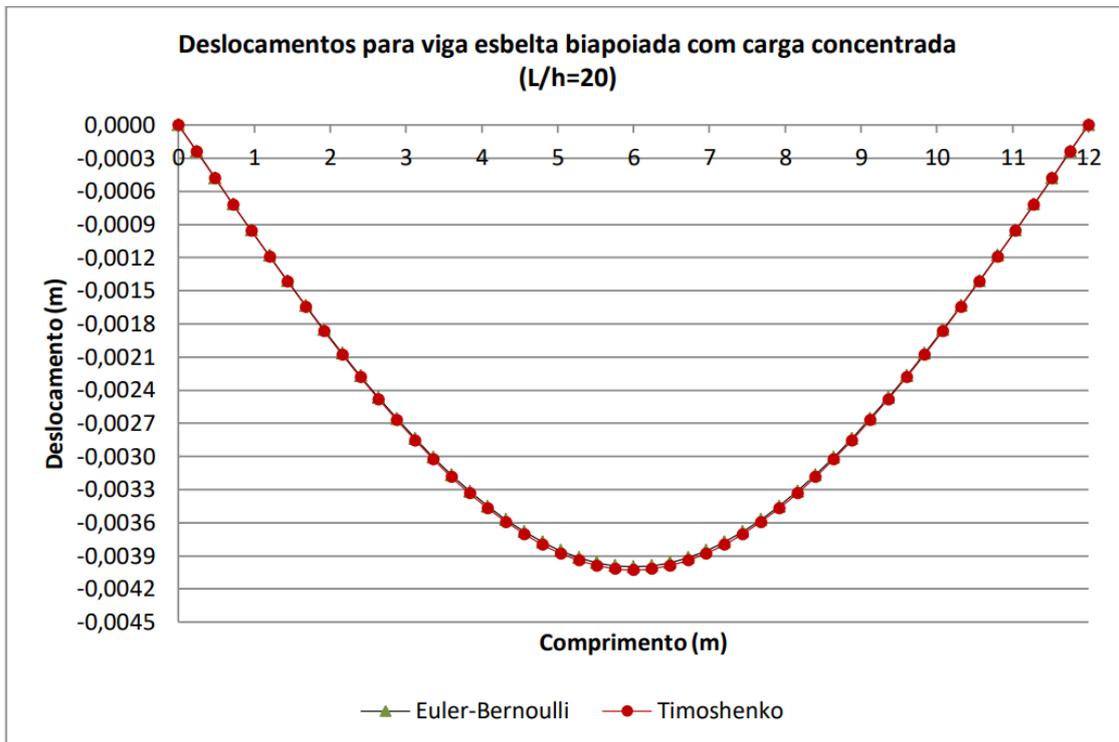
Figura 11 – Viga biapoiada delgada.



Fonte: Adaptado de Campos (2015).

Mais uma vez foram comparados os resultados analíticos baseados em Euler-Bernoulli (utilizando a equação 47 apresentada no exemplo interior) e os resultados numéricos baseados em Timoshenko, com um refinamento de malha de 50 elementos. Os resultados foram ilustrados no gráfico 6, no qual é possível observar que as curvas coincidem, e estão de acordo com o que indicam estudos prévios acerca desse assunto: para vigas esbeltas, as teorias de Timoshenko e de Euler-Bernoulli chegam a resultados coincidentes.

Gráfico 6 – Deslocamentos Transversais para a viga do Exemplo 4.



Fonte: Elaboração do autor.

Observa-se, na Tabela 4, a diferença percentual entre os deslocamentos máximos de cada curva, que neste exemplo foi obtida por:

$$\text{Diferença percentual} = \frac{\text{Resultado de Timoshenko} - \text{Resultado de Euler - Bernoulli}}{\text{Resultado de Timoshenko}}$$

Tabela 4 – Comparação do deslocamento máximo pelas teorias de Timoshenko e Euler-Bernoulli para a viga do Exemplo 4.

Deslocamento máximo $v(x)$ em metros			
Timoshenko (numérico)		Euler-Bernoulli (analítico)	Diferença Percentual
50 elementos	-0,0040289	-0,0040000	0,7225%

Fonte: Elaboração do autor.

A única diferença entre a viga analisada no Exemplo 2 e a viga analisada neste exemplo é o comprimento. Enquanto na viga anterior, que é caracterizada como semi-espessa, temos uma diferença percentual de aproximadamente 6,12%, nesta, que é esbelta, temos uma diferença de aproximadamente 0,72%, que está dentro da margem aceitável de diferença percentual.

10 Considerações finais

A utilização do Método dos Elementos Finitos para o desenvolvimento de um código computacional capaz de interpretar e simular o comportamento linear de vigas de acordo com a Teoria de Vigas de Timoshenko foi o que motivou o presente trabalho. A partir dos conceitos teóricos aqui apresentados e dos exemplos desenvolvidos, pode-se chegar a conclusões importantes quanto à utilização de métodos numéricos na Engenharia Estrutural e acerca das teorias apresentadas por Timoshenko e Euler-Bernoulli.

A eficiência da formulação em elementos finitos para o elemento de viga de Timoshenko foi comprovada, chegando a resultados que coincidem com aqueles obtidos analiticamente, desde que o operador do programa utilize um refinamento de malha adequado. O programa desenvolvido tem função facilitadora na análise estrutural, uma vez que o estudo analítico de vigas de Timoshenko apresenta certa complexidade.

Os três exemplos analisados com diferentes tipos de vinculações e carregamentos, além de validarem o código, forneceram informações úteis e que endossam estudos prévios de outros autores, que indicam as hipóteses de Timoshenko como sendo uma aproximação mais precisa que o modelo de Euler-Bernoulli para a análise de vigas, principalmente as que possuem uma baixa relação de comprimento/altura (L/h), já que nessas a deformabilidade por esforço cortante passa a contribuir de forma mais ativa na deformada da estrutura.

Para vigas esbeltas, a convergência de resultados entre as duas teorias explica o uso disseminado das hipóteses de Euler-Bernoulli no âmbito da graduação, já que elas trazem resultados seguros e soluções simples para as estruturas abordadas nesse contexto.

Fica como sugestão para futuros trabalhos o desenvolvimento de códigos numéricos para o estudo do comportamento de outras estruturas presentes na Engenharia Estrutural, como cascas, grelhas e pórticos, por exemplo. Outra abordagem para futuros trabalhos é a adequação do código desenvolvido para a análise dinâmica de vigas de Timoshenko.

11 Referências

- [1] HIBBELER, R. C. Resistência dos Materiais. 7. Ed. São Paulo: Pearson, 2010.
- [2] BEER, F. P.; JR, E. R. J.; DEWOLF, J. T.; MAZUREK, D. F. Mecânica dos Materiais. 5. Ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.
- [3] SORIANO, H. L.; LIMA, S. D. S. Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas. 1. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.
- [4] BANDEIRA, Alex; GONZALEZ, Marcio. Didática para o ensino superior aplicada às disciplinas de teoria das estruturas e método dos elementos finitos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 09, 2008, São Paulo. Anais eletrônicos. São Paulo, 2008. Disponível em: <<http://www.abenge.org.br/cobenge/arquivos/11/artigos/3307.pdf>>. Acesso em 08 de nov. 2018.
- [5] SOUZA, Calebe; CRUZ, Gustavo. Análise comparativa das teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko via método das diferenças finitas com implementação computacional em Scilab. Revista Tecnologia, v. 39, n. 1, p. 1- 12, jun. 2018.
- [6] MARTHA, Luiz; BURGOS, Rodrigo. Diferenças na consideração da distorção no modelo de Timoshenko de uma viga submetida a carregamento axial. In: JORNADAS SUL AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 11, 2014, Montevideu. Anais eletrônicos. Montevideu, 2014. Disponível em: <<http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~lfm/papers/Martha-Jornadas-2014.pdf>>. Acesso em 05 de nov. de 2018.
- [7] SOUZA, M. R. A.; MENDONÇA, A. V. Análise dinâmica de uma viga de Timoshenko apoiada sobre base elástica utilizando equações integrais: um caso particular. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 11, 2008, Natal. Anais eletrônicos. Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008. Disponível em: <http://www.dimap.ufrn.br/~sbmac/ermac2008/Anais/Resumos%20Estendidos/Analise%20dinamica_Souza%20Timoshenko.pdf>. Acesso em 05 de nov. 2018.

- [8] FISH, J.; BELYTSCHKO, T. Um Primeiro Curso em Elementos Finitos. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2009.
- [9] NEVES, Rodrigo de Azevedo. Cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas de pisos de edifícios, considerando-se a influência das tensões cisalhantes. 2000. Dissertação (Mestrado em Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000. doi:10.11606/D.18.2000.tde-03032005-151806. Acesso em 14 de maio de 2019.
- [10] CAMPOS, João Victor de. Formulação do Método dos elementos finitos para análise elástica linear de viga Timoshenko. 2015. 74 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2015
- [11] FLEISCHFRESSER, Sérgio A. Uma formulação do Método dos Elementos de contorno para a análise de vigas de Timoshenko. Tese de doutorado. Pós-Graduação em Métodos Numéricos do Setor de Tecnologia/Setor de Ciências Exatas. Universidade Federal do Paraná, Curitiba 2012. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/29366/R%20-%20T%20-%20SERGIO%20AUGUSTO%20FLEISCHFRESSER.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
>. Acesso em 13 maio 2019.