

ANÁLISE AUTOMÁTICA DE ESTRUTURAS RETICULADAS PLANAS E ESPACIAIS

Kaio G. de Medeiros Dantas

Fernanda Rodrigues Mittelbach

kaiogeovanne@gmail.com

fernanda_mittelbach@ufrnet.br

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Av. Senador Salgado Filho, 3000, 59064-741, Rio Grande do Norte, Brasil

Adryano J. Mafaldo de Souza

adryanomafaldo@hotmail.com

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Av. Senador Salgado Filho, 3000, 59064-741, Rio Grande do Norte, Brasil

Abstract. The structural analysis allows the determination of fundamental quantities to evaluate the behavior of the structures due of the requesting actions, as well as to carry out their correct design. In the case of framed structures, the objective of the structural analysis is the determination of nodal displacements, support reactions and nodal internal forces. To achieve this goal it is necessary to create an analytical structural model by which the real structure is represented mathematically, thus making an idealization of its behavior. Most commercial programs are limited to the analysis of plane structures, restricting the number of elements of structures, as well as not allowing multiple support configurations. Therefore, this work has proposed the development of a computational code, using Fortran, to solve plane frames and space frames structures, with formulation based on the Direct Stiffness Method. Subroutines were developed to solve plane trusses, space trusses, plane frames, space frames and grids, with the objective of determining their support reactions, nodal displacements and nodal internal forces. In plane frame, sub-routines were developed to consider the insertion of hinges (rotation liberation). In order to validate the obtained results, they were compared with those obtained in commercial programs already validated (Ftool and Salt), considering acceptable divergences of up to 2.0% between the values provided by the code and those provided by the cited programs. Considering the results, it was possible to verify that the parameters evaluated were congruent with those obtained in commercial programs and their values did not exceed the divergence criterion.

Keywords: Framed structures, Plane structures, Space structures, Computational mechanics.

1 Introdução

A análise estrutural permite a determinação de algumas grandezas fundamentais para avaliar o comportamento das estruturas frente às ações solicitantes, bem como realizar seu correto dimensionamento. De acordo com Moreira (1977) [1], essas grandezas são de quatro tipos: as ações mecânicas externas (solicitações e reações de apoio), as ações mecânicas internas (esforços seccionais e tensões), os deslocamentos dos pontos da estrutura e as deformações.

De forma geral, o objetivo da análise de estruturas reticuladas é a determinação dos deslocamentos nodais, das reações de apoio e dos esforços internos solicitantes. Para se chegar a esse objetivo é necessário criar um modelo estrutural através da modelagem geométrica da estrutura, das ações externas e internas, bem como da adoção de hipóteses simplificadoras.

Com o desenvolvimento da tecnologia e, conseqüentemente, a evolução dos computadores e das técnicas computacionais, a análise de estruturas por métodos numéricos tornou-se cada vez mais utilizada. Isso permitiu que estruturas mais complexas, cuja resolução analítica seria muito dispendiosa, pudessem ser resolvidas de maneira automática. Para que a implementação computacional das estruturas seja possível, é necessário fazer a discretização das mesmas. Dentre os métodos computacionais destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), no qual a discretização é obtida pela subdivisão do domínio da estrutura em uma malha de elementos finitos com a consideração de um número finito de variáveis (graus de liberdade) nos seus pontos nodais. Em se tratando de estruturas reticuladas, o domínio já se encontra naturalmente discretizado, visto que essas estruturas são resolvidas através do conhecimento dos deslocamentos e esforços nodais, tratando cada uma das barras como um elemento finito (MARTHA, 2010; MITTELBAACH, 2011) [2][3].

Diversos programas para análise de estruturas reticuladas foram desenvolvidos concomitantemente ao avanço da tecnologia, entretanto, a maioria dos programas comerciais limita-se à análise de estruturas planas, restringindo o número de elementos (barras) das estruturas que se deseja analisar, além de não permitir diversas configurações de vínculos. Diante disso, este trabalho teve como objetivo o desenvolvimento de um código computacional em linguagem de programação Fortran para análise e resolução de estruturas reticuladas planas (pórticos e treliças) e espaciais (pórticos, treliças e grelhas), com sistema isostático ou hiperestático, a fim de se conhecer o comportamento estrutural das mesmas frente às diversas ações solicitantes a que podem estar submetidas.

A fim de validar os resultados obtidos, os mesmos foram comparados com aqueles obtidos em programas comerciais já validados (Ftool e Salt), considerando aceitáveis divergências de até 2,0% entre os valores fornecidos pelo código e aqueles fornecidos pelos programas citados.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Método da rigidez

A ideia básica do Método da Rigidez é encontrar, dentro de um conjunto de soluções que satisfazem às condições de compatibilidade de deformações, aquela que também satisfaça às equações de equilíbrio estático. A solução por esse método pode ser vista como uma superposição de configurações deformadas conhecidas, resultando na configuração deformada total da estrutura.

Dessa forma, definem-se as deslocabilidades de uma estrutura como sendo as componentes de deslocamentos e rotações nodais necessárias para se conhecer sua configuração deformada. Essas deslocabilidades podem ser classificadas como internas (rotações dos nós não rotulados) ou externas (deslocamentos lineares independentes dos nós). A aplicação do Método da Rigidez consiste em impedir todas as deslocabilidades da estrutura através da inserção de vínculos fictícios.

2.2 Análise matricial de estruturas

Para que se possa realizar a implementação computacional de uma estrutura é necessário tratá-la de forma generalizada. De acordo com Mittelbach (2011) [3], no caso de estruturas reticuladas, isso é feito impedindo todos os deslocamentos nodais da estrutura para calcular os coeficientes e aplicar as

condições de contorno geométricas na resolução do sistema de equilíbrio. Cadamuro Jr e Michelin (2003) [4] falam que, além de permitir a generalização desejada, a análise matricial tem a vantagem de se adaptar bem ao emprego em computadores.

Para se realizar a implementação computacional é necessário considerar algumas definições quanto aos parâmetros utilizados nos cálculos. Para uma estrutura reticulada com n deslocabilidades, o sistema de equilíbrio assume a forma mostrada na Eq. (1) (MITTELBAACH, 2011) [3]:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Onde:

k_{ij} → Coeficientes de rigidez. Cada coeficiente representa a reação na direção do grau de liberdade i causada por um deslocamento ou rotação unitária na direção do grau de liberdade j . Pelo teorema dos trabalhos recíprocos $k_{ij} = k_{ji}$;

d_i → Deslocamento na direção do grau de liberdade i .

f_i → Elemento do vetor de forças relativo à deslocabilidade i . O vetor de forças é formado pelo somatório entre as cargas nodais equivalentes e as cargas nodais concentradas;

R_i → Reação de apoio na direção do grau de liberdade i . O conjunto de reações forma o vetor de reações de apoio da estrutura, computado separadamente do vetor de cargas nodais.

De maneira geral, o sistema de equilíbrio da Eq. (1) tem a forma mostrada na Eq. (2)

$$K * d = f + R \quad (2)$$

Onde K é a matriz de rigidez global da estrutura, d é o vetor global de deslocamentos nodais, f é o vetor global das forças nodais e R é o vetor de reações de apoio da estrutura.

2.3 Sistema de referência global e local das estruturas

Com a finalidade de identificar e ordenar as ações mecânicas e os deslocamentos existentes na estrutura, é fixado, inicialmente, um sistema de referência para a mesma (MOREIRA, 1977) [1]. Esse sistema pode ser de dois tipos: global ou local.

O sistema de referência global trata a estrutura como um todo. De acordo com Soriano (2005, apud Kummer, 2014) [5] a esse sistema de referência ficam vinculadas as grandezas relativas aos nós da estrutura, como coordenadas, deslocamentos, reações e cargas concentradas. Para analisar matricialmente uma estrutura é necessário inicialmente numerar seus nós para que seja possível numerar e identificar as deslocabilidades associadas a cada um deles. Essa numeração dos nós, bem como a dos elementos, é feita inicialmente de acordo com o sistema de referência global XYZ .

De acordo com Soriano (2005) [6], é prático trabalhar com um referencial local xyz para cada barra, e em uma barra reta os eixos y e z são posicionados paralelamente aos eixos principais de inércia das seções transversais, com o eixo z paralelo e de mesmo sentido que o eixo global Z no caso de estrutura plana. É no sistema local que são vinculados os esforços nodais das barras da estrutura e também os deslocamentos nodais.

Em um elemento, a depender do tipo de estrutura a qual ele pertence, estão vinculados um determinado número de deslocamentos e esforços nodais. O caso mais geral de estruturas reticuladas é o pórtico espacial. A cada ponto nodal das barras desse tipo de elemento estrutural estão associados seis deslocamentos e seis esforços nodais, totalizando doze deslocamentos e doze esforços nodais por barra. Os deslocamentos correspondem a três componentes de translação e três componentes de rotação. Já os esforços correspondem a esforço normal N , esforço cortante Q_y (y local), esforço cortante Q_z (z local), momento fletor M_y (em torno do eixo y local), momento fletor M_z (em torno do eixo z local) e momento de torção T em torno do eixo local x (MARTHA, 2010) [2]. A numeração dos deslocamentos e esforços nodais para o pórtico espacial está ilustrada na Fig. 1.

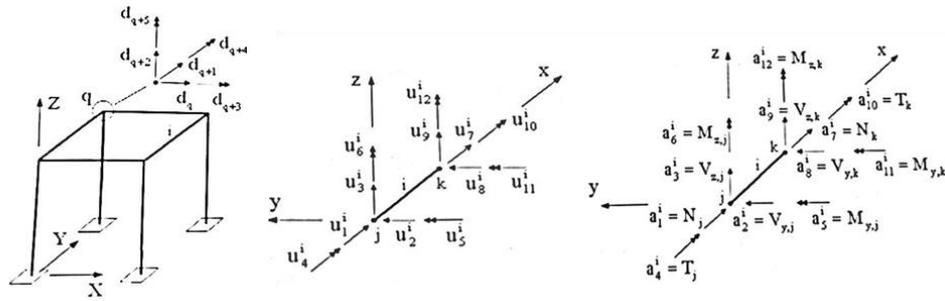


Figura 1. Numeração local dos elementos e esforços nodais em barra de pórtico espacial.

2.4 Matriz de rotação dos elementos

De acordo com Venâncio Filho (1975, apud Kummer, 2014) [5], para avaliar a interação entre as barras da estrutura é necessário estabelecer um sistema de referência único entre elas, sendo esse sistema o global. A transformação do referencial global para o local é feita através da matriz de rotação de vetores. Essa matriz pode ser deduzida no plano ou no espaço, de acordo com o tipo de estrutura que se deseja analisar.

Para se determinar a matriz de rotação no plano pode-se inicialmente considerar um vetor \vec{v} pertencente ao plano XY' ou ao plano xy . Esse vetor pode ser decomposto segundo os eixos XY do referencial global ou segundo os eixos xy do referencial local, conforme a Eq. (3).

$$\begin{aligned} v_x &= v_X \cos(\alpha) + v_Y \sin(\alpha) \\ v_y &= -v_X \sin(\alpha) + v_Y \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (3)$$

Onde v_x e v_y são as componentes do vetor \vec{v} no referencial local (plano xy) e v_X e v_Y são as componentes do vetor \vec{v} no referencial global (plano XY).

As equações mostradas em (3) podem ser reescritas matricialmente, assumindo a forma mostrada na Eq. (4):

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \end{bmatrix} \text{ ou } \vec{v}_{xy} = R_t \vec{v}_{XY} \quad (4)$$

Onde \vec{v}_{xy} corresponde ao vetor \vec{v} na base xy , \vec{v}_{XY} corresponde ao vetor \vec{v} na base XY e R_t corresponde à matriz de rotação no plano.

Soriano (2005) [6] explica que a matriz de rotação no espaço é definida de maneira semelhante ao que foi feito no plano. Essa matriz de rotação para elementos tridimensionais tem a forma mostrada na Eq. (5).

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_{xX} & \lambda_{xY} & \lambda_{xZ} \\ \lambda_{yX} & \lambda_{yY} & \lambda_{yZ} \\ \lambda_{zX} & \lambda_{zY} & \lambda_{zZ} \end{bmatrix} \quad (5)$$

A primeira linha dessa matriz define os cossenos diretores das direções X, Y e Z em relação ao eixo local x , a segunda linha define os cossenos diretores das direções X, Y e Z em relação ao eixo local y e a terceira linha define os cossenos diretores das direções X, Y e Z em relação ao eixo local z . Ainda de acordo com Soriano (2005) [6], como o eixo local x passa pelos nós inicial e final da barra, cujas coordenadas globais são, respectivamente, (X_j, Y_j, Z_j) e (X_k, Y_k, Z_k) , os cossenos diretores em relação a esse eixo podem ser determinados conforme as Eq. (6), Eq. (7) e Eq. (8):

$$\lambda_{xX} = \frac{X_k - X_j}{l} \quad (6)$$

$$\lambda_{xY} = \frac{Y_k - Y_j}{l} \quad (7)$$

$$\lambda_{xZ} = \frac{Z_k - Z_j}{l} \quad (8)$$

Onde l corresponde ao comprimento da barra tridimensional, definido conforme a Eq. (9):

$$l = \sqrt{(X_k - X_j)^2 + (Y_k - Y_j)^2 + (Z_k - Z_j)^2} \quad (9)$$

Os cossenos diretores em relação ao eixo y podem ser determinados de acordo com a Fig. 2, que mostra a rotação dos eixos no espaço.

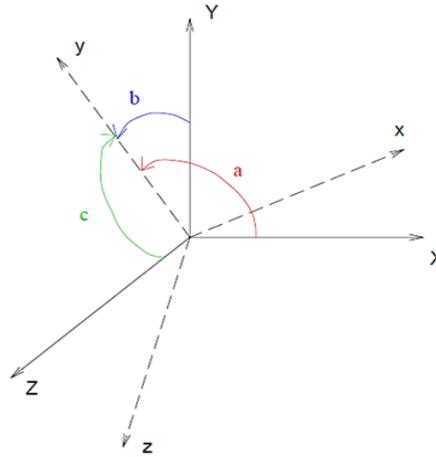


Figura 2. Rotação dos eixos no espaço tridimensional

Definindo-se assim os parâmetros mostrados nas Eq. (10), Eq. (11) e Eq. (12).

$$\lambda_{yX} = \cos a \quad (10)$$

$$\lambda_{yY} = \cos b \quad (11)$$

$$\lambda_{yZ} = \cos c \quad (12)$$

A definição dos cossenos diretores em relação ao eixo local z pode ser feita através de algumas metodologias encontradas na literatura. A escolhida neste trabalho foi através da definição de um ponto auxiliar para cada elemento, cujas coordenadas ajudam a definir os cossenos diretores.

Uma vez determinadas as matrizes de rotação, podem-se relacionar os vetores de deslocamentos ($\vec{u}^{(i)}$) e esforços nodais ($\vec{a}^{(i)}$) dos elementos da estrutura no referencial local e global através das Eq. (13) e Eq. (14):

$$\vec{u}^{(i)} = R_t^{(i)} \vec{u}_G^{(i)} \quad (13)$$

$$\vec{a}^{(i)} = R_t^{(i)} \vec{a}_G^{(i)} \quad (14)$$

2.5 Matriz de rigidez dos elementos

No Método da Rigidez o comportamento de uma estrutura pode ser obtido pela superposição de configurações deformadas elementares conhecidas. Cada configuração deformada elementar é composta de configurações deformadas elementares das barras que a compõem, denominadas de soluções fundamentais. As soluções fundamentais podem ser de dois tipos: coeficientes de rigidez locais e reações de engastamento perfeito (MARTHA, 2010) [2]. A matriz de rigidez dos elementos isolados, também chamada de matriz de rigidez local, é composta pelos coeficientes de rigidez locais.

Os parâmetros fundamentais pelos quais se obtém os coeficientes de rigidez locais são o coeficiente de rigidez axial, o coeficiente de rigidez à rotação e o coeficiente de rigidez à torção. Tais parâmetros são obtidos em função de propriedades dos materiais (como módulo de elasticidade E e módulo de

cisalhamento G) e propriedades geométricas (como área da seção A , momento de inércia à flexão I , momento de inércia à torção J_t e comprimento da barra l) (MARTHA, 2010) [2].

Obtidas as matrizes de rigidez locais das barras, é necessário realizar a transformação do referencial local para global, a fim de montar posteriormente a matriz de rigidez global da estrutura. De acordo com Mittelbach (2011) [3] o equilíbrio do elemento no referencial local pode ser escrito conforme a Eq. (15):

$$k^{(i)}\vec{u}^{(i)} = \vec{c}^{(i)} + \vec{a}^{(i)} \quad (15)$$

Onde $k^{(i)}$ é a matriz de rigidez local do elemento e $\vec{c}^{(i)}$ é o vetor de cargas nodais equivalentes do elemento no referencial local. O sistema de equilíbrio mostrado na equação (15) pode ser escrito no referencial global, conforme a Eq. (16):

$$k^{(i)}_G\vec{u}^{(i)} = \vec{c}^{(i)}_G + \vec{a}^{(i)}_G \quad (16)$$

Onde $k^{(i)}_G$ e $\vec{c}^{(i)}_G$ são, respectivamente, a matriz de rigidez do elemento no referencial global e o vetor de cargas nodais equivalentes do elemento no referencial global. Utilizando a transformação vetorial descrita na Eq. (13), pode-se escrever a Eq. (17).

$$\vec{u}^{(i)} = R_t^{(i)}\vec{u}^{(i)}_G \rightarrow \vec{u}^{(i)}_G = [R_t^{(i)}]^{-1}\vec{u}^{(i)} \quad (17)$$

Como a matriz de rotação é ortogonal, pode-se escrevê-la conforme a Eq. (18):

$$[R_t^{(i)}]^{-1} = [R_t^{(i)}]^T \quad (18)$$

Onde $[R_t^{(i)}]^T$ é a matriz de rotação transposta. Dessa forma, a rotação da matriz de rigidez pode ser escrita como mostra a Eq. (19).

$$k^{(i)}_G = [R_t^{(i)}]^T k^{(i)} R_t^{(i)} \quad (19)$$

2.6 Vetor de cargas nodais equivalentes dos elementos

O segundo tipo de solução fundamental são as reações de engastamento perfeito das barras, que correspondem às reações que surgem numa barra isolada devido à aplicação de solicitações externas. Tais solicitações podem ser forças concentradas e distribuídas, momentos concentrados e variação de temperatura. As reações de engastamento perfeito podem ser provocadas por carregamentos axiais e/ou transversais (MARTHA, 2010) [2].

As cargas nodais equivalentes são opostas às reações de engastamento perfeito, correspondendo a aplicar apenas nos nós as solicitações externas que atuam nos elementos. Geralmente essas cargas são encontradas tabeladas na literatura de acordo com os vários tipos de solicitação externa. O vetor de cargas nodais equivalentes do elemento $\vec{c}^{(i)}$, analogamente à matriz de rigidez dos elementos, pode ser escrito nos referenciais local e global. A transformação do referencial local para o global pode ser escrita da forma mostrada na Eq. (20).

$$\vec{c}^{(i)}_G = [R_t^{(i)}]^T \vec{c}^{(i)} \quad (20)$$

2.7 Aplicação de condições de contorno

Determinada a matriz de rigidez e o vetor de forças da estrutura, é necessário aplicar as condições de contorno geométricas da mesma, de modo a torna-la positiva definida, permitindo a resolução do sistema de equações. Para a aplicação das condições de contorno em procedimento automático é mais eficiente numerar os deslocamentos na mesma ordem da numeração dos pontos nodais. Os procedimentos mais utilizados são a técnica dos zeros e uns e a técnica do número grande (SORIANO, 2005) [6].

Determinadas a matriz de rigidez modificada K' e o vetor de forças modificado f' da estrutura, os deslocamentos são facilmente determinados através da Eq. (21).

$$K'd = f' \rightarrow d = (K')^{-1}f' \quad (21)$$

De posse dos deslocamentos, o vetor de reações R da estrutura pode ser determinado conforme a Eq. (22).

$$R = Kd - f \quad (22)$$

3 Metodologia

3.1 Considerações gerais sobre o programa

A aplicação da análise automática das estruturas reticuladas foi realizada através de um código computacional em linguagem Fortran, no formato “*free form*”. O código é composto de um programa principal ao qual estão associadas sub-rotinas que realizam a montagem das matrizes de rigidez e dos vetores de cargas nodais equivalentes e de forças, montagem das matrizes de rotação, aplicação das condições de contorno, resolução do sistema de equilíbrio e determinação dos vetores de deslocamentos, reações e esforços nodais.

O código foi desenvolvido para resolver cinco tipos de estruturas reticuladas, sejam elas isostáticas ou hiperestáticas: treliças planas e espaciais, pórticos planos e espaciais, e grelhas. No caso dos pórticos planos, existe a possibilidade de considerar a existência de articulações (rótulas) em seus elementos. Como é necessária uma quantidade considerável de dados iniciais de entrada das estruturas a serem calculadas, optou-se pelo uso de um arquivo de entrada em formato “txt” no qual são inseridos os dados requeridos para cada tipo de estrutura:

- a. Número de nós da estrutura e suas coordenadas globais;
- b. Número de nós prescritos e suas características. O prefixo “1” indica a existência de deslocamento prescrito na direção considerada, seguido do valor do deslocamento prescrito. Já o prefixo “0” indica a inexistência de deslocamento prescrito na direção considerada (deslocamento livre);
- c. Número de elementos da estrutura, suas incidências (nós iniciais e finais) e características relativas a material e propriedades geométricas.
- d. Número de elementos rotulados, no caso de pórticos planos, e a localização da rótula no elemento (nó inicial e/ou final). O prefixo “1” indica a existência de rótula no nó considerado, enquanto o prefixo “0” indica a sua inexistência;
- e. Número de materiais diferentes existentes na estrutura e suas respectivas propriedades, como módulo de elasticidade (E), coeficiente de Poisson (ν) e coeficiente de dilatação térmica linear (α).
- f. Número de seções diferentes existentes na estrutura e suas respectivas propriedades, como área, dimensões das seções transversais, momentos de inércia à flexão em torno dos eixos y e z locais e momento de inércia à torção;
- g. Número de elementos com carga e seus respectivos valores;
- h. Número de nós com carga e seus respectivos valores;
- i. Número de nós com apoios elásticos e suas propriedades (rigidez do apoio elástico). O prefixo “1” indica a existência de apoio elástico para a deslocabilidades e o prefixo “0” indica a sua inexistência.

A Figura 3 ilustra um exemplo de arquivo de entrada para um pórtico plano.

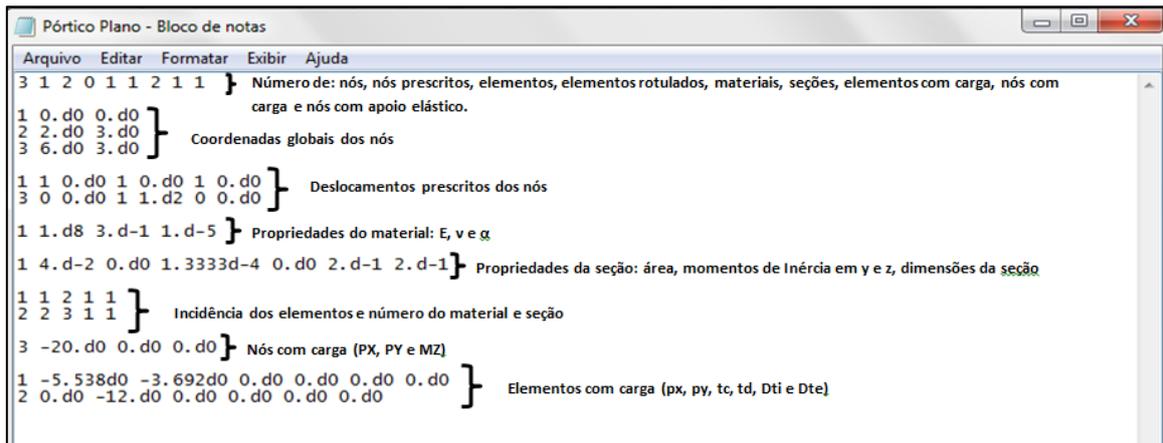


Figura 3. Arquivo de entrada de dados para um exemplo de pórtico plano.

Após sua execução o programa retorna três arquivos de saída: o primeiro, um arquivo apresentando todos os dados de entrada da estrutura (para uma possível conferência); o segundo, apresentando as matrizes de rotação, matrizes de rigidez e vetores de cargas nodais equivalentes (locais e globais) dos elementos, e a matriz de rigidez e vetor de forças da estrutura (originais e modificados pelas condições de contorno); o terceiro, composto pelos resultados calculados pelo programa, tais como deslocamentos nodais, reações de apoio e esforços solicitantes nos elementos.

3.2 Montagem das matrizes de rigidez locais

Definidos os dados de entrada, foram desenvolvidas duas sub-rotinas para a montagem da matriz de rigidez local de cada elemento da estrutura, as quais são compostas pelos coeficientes de rigidez k_{ij} , conforme a Eq. (1). Barras de tipos diferentes de estruturas possuem matrizes de rigidez locais diferentes, de acordo com as deslocabilidades que atuam nos seus pontos nodais.

A primeira sub-rotina monta as matrizes de rigidez locais das barras das estruturas planas e espaciais, com exceção das barras de pórtico plano com articulações em seus nós. A segunda sub-rotina é responsável pela montagem das matrizes de rigidez locais dos elementos de pórticos planos que possuem rótulas em seus nós iniciais e/ou finais.

Para os casos de barras com articulação no nó inicial estão associados cinco deslocamentos às mesmas. Entretanto, o deslocamento rotacional no nó inicial é livre e, portanto, as linhas e colunas correspondentes às rotações e reações de momento dessa extremidade na matriz de rigidez local são nulas (MARTHA, 2010) [2]. Analogamente ao caso de barras com articulação no nó inicial, foi montada a matriz de rigidez local para barras com articulação no nó final. Entretanto, neste caso o deslocamento rotacional livre ocorre na extremidade final da barra e, portanto, a 6ª linha e a 6ª coluna dessa matriz passam a ser nulas.

3.3 Montagem das matrizes de rotação dos elementos

A montagem das matrizes de rotação dos elementos foi realizada através de uma sub-rotina para todos os tipos de estruturas, sejam elas planas ou espaciais. Analogamente às matrizes de rigidez locais, elementos de tipos de estruturas diferentes possuem matrizes de rotação diferentes, de acordo com a definição dos eixos global e local de cada uma. As matrizes de rotação dos elementos de treliça plana, pórtico plano e grelha são formadas pelos cossenos diretores dos eixos globais X e Y , em relação aos eixos locais x e y , visto que nessas estruturas o eixo Z global coincide com o eixo z local. Já as matrizes dos elementos de treliça espacial e pórtico espacial são compostas pelos cossenos diretores dos eixos globais X, Y e Z em relação aos eixos locais x, y e z .

Para as barras de treliça espacial, Soriano (2005) [6] relata que o posicionamento dos eixos locais y e z são irrelevantes. Por esse motivo, basta calcular a primeira linha da matriz de rotação,

composta pelos cossenos diretores dos eixos globais X, Y e Z em relação ao eixo x local. Para as barras de pórtico espacial, além dos cossenos diretores dos eixos globais X, Y e Z em relação ao eixo local x , também foi necessário calcular os cossenos diretores dos eixos globais X, Y e Z em relação aos eixos locais y e z para formar a matriz de rotação. A determinação desses cossenos foi realizada a partir da definição de um ponto auxiliar contido em um dos planos principais do elemento, como está ilustrado na Fig. 4.

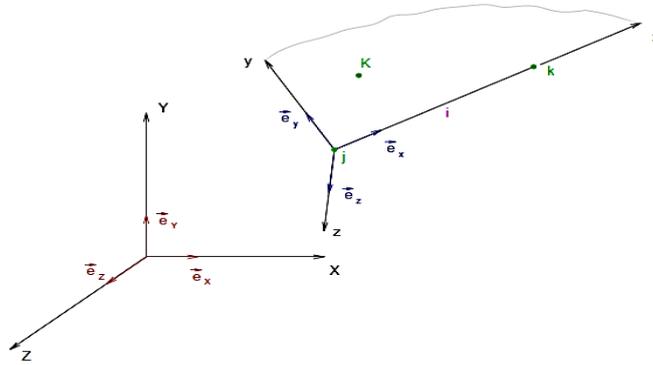


Figura 4. Ponto auxiliar nos referenciais global e local com os respectivos vetores unitários.

Na figura, K é o ponto auxiliar de coordenadas (X_K, Y_K, Z_K) , cuja função é estabelecer o eixo y local da barra. Para isso, tal ponto deve estar posicionado no primeiro quadrante do plano, definido pelos eixos locais x e y . O eixo local y deve ser escolhido paralelo a um dos eixos principais de inércia da seção transversal do elemento, e a partir dele fica determinado o eixo z (SORIANO, 2005) [6]. \vec{e}_X, \vec{e}_Y e \vec{e}_Z são vetores unitários nas direções dos eixos globais X, Y e Z , e \vec{e}_x, \vec{e}_y e \vec{e}_z são vetores unitários nas direções dos eixos locais x, y e z .

Considerando um vetor unitário \vec{n} na direção do nó inicial j da barra para a o ponto auxiliar K , escrito conforme a Eq. (23).

$$\vec{n} = \alpha \vec{e}_X + \beta \vec{e}_Y + \gamma \vec{e}_Z \quad (23)$$

Onde α, β e γ são os cossenos diretores do vetor unitário \vec{n} em relação aos eixos globais X, Y e Z , determinados através das Eq. (24), Eq. (25) e Eq. (26).

$$\alpha = \frac{X_K - X_j}{\sqrt{(X_K - X_j)^2 + (Y_K - Y_j)^2 + (Z_K - Z_j)^2}} \quad (24)$$

$$\beta = \frac{Y_K - Y_j}{\sqrt{(X_K - X_j)^2 + (Y_K - Y_j)^2 + (Z_K - Z_j)^2}} \quad (25)$$

$$\gamma = \frac{Z_K - Z_j}{\sqrt{(X_K - X_j)^2 + (Y_K - Y_j)^2 + (Z_K - Z_j)^2}} \quad (26)$$

Onde X_K, Y_K e Z_K são as coordenadas do ponto auxiliar. Fazendo-se o produto vetorial dos vetores unitários \vec{e}_x e \vec{n} obtém-se um vetor $c\vec{e}_z$ cujo módulo pode ser determinado através da Eq. (27).

$$c = \sqrt{(\lambda_{xY} \gamma - \lambda_{xZ} \beta)^2 + (\lambda_{xZ} \alpha - \lambda_{xX} \gamma)^2 + (\lambda_{xX} \beta - \lambda_{xY} \alpha)^2} \quad (27)$$

Dessa forma, é possível determinar o vetor unitário \vec{e}_z e conseqüentemente seus cossenos diretores, através das Eq. (28), Eq. (29) e Eq. (30).

$$\lambda_{zX} = \frac{\lambda_{xY} \gamma - \lambda_{xZ} \beta}{c} \quad (28)$$

$$\lambda_{zY} = \frac{\lambda_{xZ} \alpha - \lambda_{xX} \gamma}{c} \quad (29)$$

$$\lambda_{zZ} = \frac{\lambda_{xX} \beta - \lambda_{xY} \alpha}{c} \quad (30)$$

Através do produto vetorial dos vetores unitários \vec{e}_z e \vec{e}_x , define-se o vetor unitário \vec{e}_y , perpendicular aos outros dois, e consequentemente seus cossenos diretores, conforme as Eq. (31), Eq. (32) e Eq. (33).

$$\lambda_{yX} = \lambda_{xZ} \lambda_{zY} - \lambda_{xY} \lambda_{zZ} \quad (31)$$

$$\lambda_{yY} = \lambda_{xX} \lambda_{zZ} - \lambda_{xZ} \lambda_{zX} \quad (32)$$

$$\lambda_{yZ} = \lambda_{xY} \lambda_{zX} - \lambda_{xX} \lambda_{zY} \quad (33)$$

Dessa forma, determinou-se a matriz de rotação para os elementos de pórtico espacial, ficando a mesma conforme a Eq. (34).

$$R_t^{(i)} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad (34)$$

Onde R é a matriz apresentada anteriormente na Eq. (5).

3.4 Montagem do vetor de cargas nodais equivalentes

Para a montagem do vetor de cargas nodais dos elementos foram desenvolvidas duas sub-rotinas. A primeira sub-rotina foi desenvolvida para as estruturas planas e espaciais cujas barras não possuem articulações, ou seja, são consideradas bi-engastadas quando da aplicação do Método da Rigidez. A segunda sub-rotina foi desenvolvida para os elementos de pórtico plano que possuem articulações em um ou nos dois pontos nodais. As cargas nodais equivalentes podem ser encontradas tabeladas na literatura, geralmente para barras bi-engastadas. Para a determinação das cargas nodais equivalentes das barras de pórtico plano com articulações foram determinadas as reações de engastamento perfeito das barras manualmente, visto que as cargas nodais são opostas à essas reações.

Para cada tipo de estrutura reticulada foram consideradas hipóteses de cargas nos elementos, todas fornecidas no referencial local da barra. Para os elementos de treliça plana foram consideradas cargas de variação de temperatura (Dti e Dte) na direção do eixo local y (ao longo da dimensão h_y da barra), onde Dti e Dte são, respectivamente, a variação de temperatura na face inferior e superior do elemento. No caso de treliça espacial, além da variação de temperatura na direção do eixo local y também foram consideradas cargas de variação de temperatura na direção do eixo local z (ao longo da dimensão h_z da barra). Nos elementos de pórtico plano foram consideradas cargas uniformemente distribuídas nas direções dos eixos locais x e y (p_x e p_y), cargas triangulares crescentes (tc), decrescentes (td) e cargas de variação de temperatura na direção do eixo local y . Para os elementos de pórtico espacial, além das cargas citadas nos elementos de pórtico plano foram consideradas cargas uniformemente distribuídas (p_z), cargas triangulares crescentes e decrescentes na direção do eixo local z , cargas momento uniformemente distribuídas na direção do eixo local x (mt) e cargas de variação de temperatura na direção do eixo local z . Por fim, nos elementos de grelha foram consideradas cargas uniformemente distribuídas, triangulares crescentes e decrescentes na direção do eixo local z , cargas momento distribuídas na direção do eixo local x e cargas de variação de temperatura na direção do eixo local z . As cargas trapezoidais, no caso dos pórticos e da grelha, foram consideradas como uma combinação das cargas uniformemente distribuídas e das cargas triangulares crescentes ou decrescentes.

3.5 Montagem da matriz de rigidez global e do vetor de forças global da estrutura

Determinadas as matrizes de rigidez e os vetores de cargas nodais dos elementos no referencial local, e após a rotação para o referencial global, foram desenvolvidas sub-rotinas responsáveis pela montagem da matriz de rigidez global e do vetor de forças das estruturas.

A matriz de rigidez global K é formada pela superposição das contribuições das matrizes de rigidez locais das barras (assemble). Para isso foi necessário que todas as matrizes estivessem no mesmo sistema de eixos, o que explica a rotação das matrizes de rigidez locais dos elementos para o referencial global. De forma geral, a um dado nó está associado um determinado número de deslocabilidades, de acordo com o tipo de estrutura a qual esse nó pertence.

De maneira análoga ao que foi realizado para a montagem da matriz de rigidez global, o vetor de forças foi composto pela soma das contribuições dos vetores de cargas nodais equivalentes dos elementos combinados com as cargas concentradas aplicadas diretamente nos nós da estrutura. O armazenamento das cargas concentradas no vetor de forças é feito logo após a leitura dos dados iniciais, de forma que o assemble é realizado apenas com os vetores de cargas nodais equivalentes.

A Figura 5 ilustra a soma das contribuições das matrizes de rigidez e dos vetores de cargas nodais equivalentes locais formando a matriz de rigidez global e o vetor de forças global da estrutura.

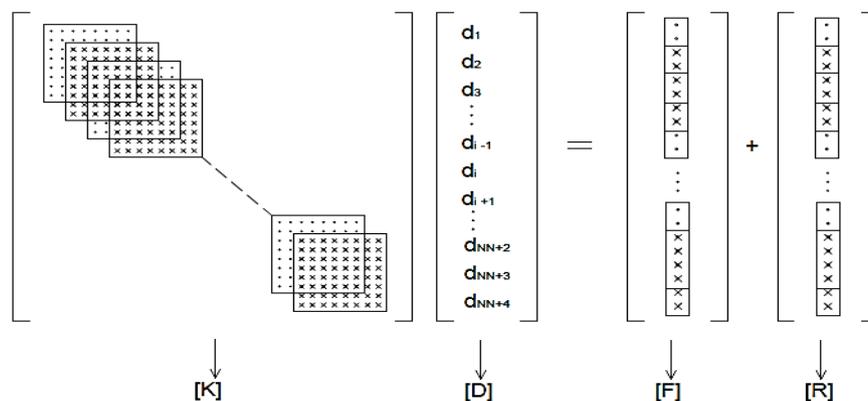


Figura 5. Montagem da matriz de rigidez e do vetor de forças da estrutura.

3.6 Resolução do sistema de equações

Para a resolução do sistema de equações foram desenvolvidas três sub-rotinas. A primeira sub-rotina é responsável pela aplicação das condições de contorno geométricas da estrutura. Para aplicar essas condições de contorno no sistema de equações de equilíbrio, especificamente na matriz de rigidez K e no vetor de forças f da estrutura, fez-se uso da técnica dos zeros e uns. De acordo com Soriano (2005) [6], a técnica dos zeros e uns é bastante eficiente no cálculo automático de estruturas e permite a resolução das mesmas com mais facilidade.

Quando se prescreve deslocamentos nulos, eliminam-se da matriz K de rigidez global da estrutura as colunas e linhas de mesma numeração que esses deslocamentos, reduzindo assim as equações de equilíbrio e facilitando a resolução da estrutura. Se um grau de liberdade d_i possui deslocamento ou rotação prescrita, a i -ésima linha da matriz assume valor "1" na diagonal principal e "0" nos outros termos. Para manter a simetria da matriz, os termos da i -ésima coluna também são anulados. A força nodal f_i é substituída no vetor de forças f pelo valor do deslocamento prescrito (MARTHA, 2010) [2]. Para os casos em que na direção de certa deslocabilidade d_i considerava-se um apoio elástico, a condição de contorno referente a essa deslocabilidade foi tratada somando a rigidez da mola k_{mola} ao coeficiente k_{ii} na matriz de rigidez da estrutura durante a aplicação da técnica dos zeros e uns.

Depois de aplicada a técnica dos zeros e uns, há a sub-rotina para a resolução do sistema de equações, a qual usa o método de eliminação de Gauss. De acordo com Soriano (2005) [6], esse método

é aplicável a qualquer sistema que possua matriz de rigidez quadrada não singular (determinante não nulo). Consiste em transformar o sistema original em um simplificado de mesma solução.

Seja o sistema de equações mostrado na Eq. (35):

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (35)$$

O método consiste em eliminar todos os coeficientes k_{ij} , quando $i > j$, de forma a obter um sistema equivalente na qual a matriz de rigidez seja triangular superior, conforme mostra a Eq. (36).

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & \cdots & k_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (36)$$

A sequência de operações para se chegar ao sistema da EQ. (38) consiste em: trocar duas equações, multiplicar uma equação por uma constante não nula e adicionar o múltiplo de uma equação a outra equação. Para que a resolução seja possível não se pode ter nenhum pivô (elemento k_{ii} da diagonal principal) nulo e nem muito próximo de zero, visto que levaria a resultados imprecisos (NUNES; FRANKLIN, CARDOSO, 2006) [7]. No final da sub-rotina determina-se o vetor de deslocamentos nodais da estrutura, utilizado, posteriormente, na determinação do vetor de reações.

A terceira sub-rotina desenvolvida é responsável pela determinação do vetor de reações de apoio, consistindo na aplicação direta da Eq. (22).

3.7 Determinação dos esforços nodais

Determinados os vetores de deslocamentos nodais e reações de apoio, a última etapa do código computacional desenvolvido é a sub-rotina para determinação dos esforços internos nas extremidades das barras. De acordo com Soriano (2005) [6], os esforços internos devem ser determinados no referencial local da barra, necessitando assim novamente da matriz de rotação para transformar os vetores de deslocamentos do referencial global para o referencial local.

4 Resultados

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos pela análise de quatro tipos de estruturas reticuladas: treliça plana, pórtico plano com rótula, treliça espacial e pórtico espacial. Estão apresentados também os resultados, para as mesmas estruturas, encontrados em programas de análise estrutural conhecidos, especificamente o FTOOL para as estruturas planas e o SALT para as estruturas espaciais.

4.1 Treliça plana

Para a treliça plana ilustrada na Fig. 6 foram determinadas as reações de apoio, os deslocamentos e os esforços nodais através do código computacional desenvolvido e do programa FTOOL para posterior comparação dos resultados. A discretização adotada na utilização do código computacional, bem como a numeração dos nós e elementos, estão apresentadas na Fig. 7.

Para esta estrutura foram consideradas as seguintes propriedades físicas e geométricas das seções transversais dos elementos: $E = 100 \text{ GPa} = 10^8 \text{ KN/m}^2$; $\nu = 0,2$; $\alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}$; dimensões das seções transversais $h_y = h_z = 5 \text{ cm}$, com área $A = 2,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$; variação de temperatura $\Delta_t = 10^\circ\text{C}$ e $\Delta_e = 20^\circ\text{C}$ nas barras horizontais; recalque $\rho = 0,5 \text{ cm}$ da esquerda para direita no apoio esquerdo.

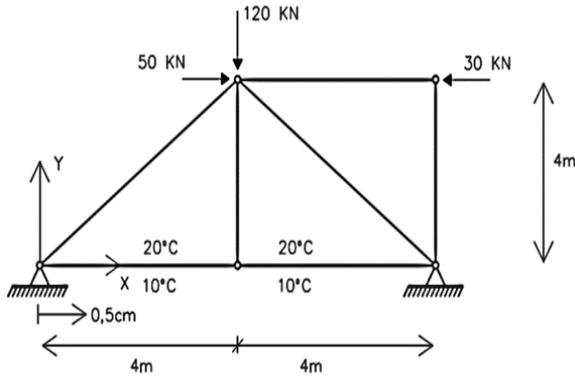


Figura 6. Exemplo 1 – Treliça plana.

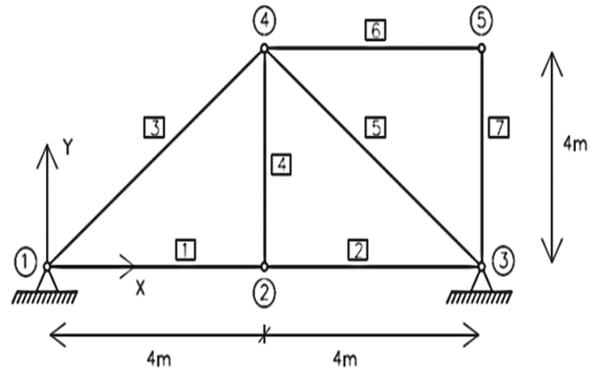


Figura 7. Discretização da treliça plana.

Os resultados dos deslocamentos nodais obtidos pelo código computacional e pelo FTOOL estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1. Deslocamentos nodais para a treliça plana

Nó	Código Computacional		FTOOL	
	Translação X (m)	Translação Y (m)	Translação X (m)	Translação Y (m)
1	$5,000 \times 10^{-3}$	0,000	$5,000 \times 10^{-3}$	0,000
2	$2,500 \times 10^{-3}$	0,000	$2,500 \times 10^{-3}$	$1,184 \times 10^{-18}$
3	0,000	0,000	0,000	0,000
4	$2,812 \times 10^{-3}$	0,000	$2,812 \times 10^{-3}$	$1,184 \times 10^{-18}$
5	$2,332 \times 10^{-3}$	0,000	$2,332 \times 10^{-3}$	$2,524 \times 10^{-38}$

Os resultados das reações de apoio e dos esforços nodais estão apresentados, respectivamente, nas Tabelas 2 e 3.

Tabela 2. Reações de apoio para a treliça plana

Nó	Código Computacional		FTOOL	
	FX (KN)	FY (KN)	FX (KN)	FY (KN)
1	263,75	52,50	263,75	52,50
3	-283,75	67,50	-283,75	67,50

Tabela 1. Esforços nodais para treliça plana

Elemento	Nó	Código Computacional	FTOOL
		Esforço Normal	Esforço Normal
1	1	193,750	193,750
	2	-193,750	-193,750
2	2	193,750	193,750
	3	-193,750	-193,750
3	1	87,500	87,500
	4	-87,500	-87,500
4	4	0,000	0,000

	2	0,000	0,000
5	4	112,500	112,500
	3	-112,500	-112,500
	4	30,000	30,000
6	5	-30,000	-30,000
	5	0,000	0,000
7	3	0,000	0,000

Para o exemplo de treliça plana não foram verificadas divergências entre os resultados obtidos pelo código computacional desenvolvido e pelo software FTOOL. A única observação a ser feita diz respeito aos resultados dos valores das translações dos nós 2, 4 e 5, ao longo do eixo Y . Enquanto o código computacional forneceu tais valores como sendo nulos, o FTOOL forneceu como sendo $1,1842 \times 10^{-18}$ para os dois primeiros e $2,5244 \times 10^{-38}$ para o último, o que pode ser considerado desprezível, validando assim o código desenvolvido.

4.2 Pórtico plano com rótula

Para o pórtico plano com rótula ilustrado na Fig. 8, foram determinadas as reações de apoio, os deslocamentos e os esforços nodais através do código computacional desenvolvido e do programa FTOOL. A discretização adotada na utilização do código computacional, bem como a numeração dos nós e elementos, estão apresentadas na Fig. 9.

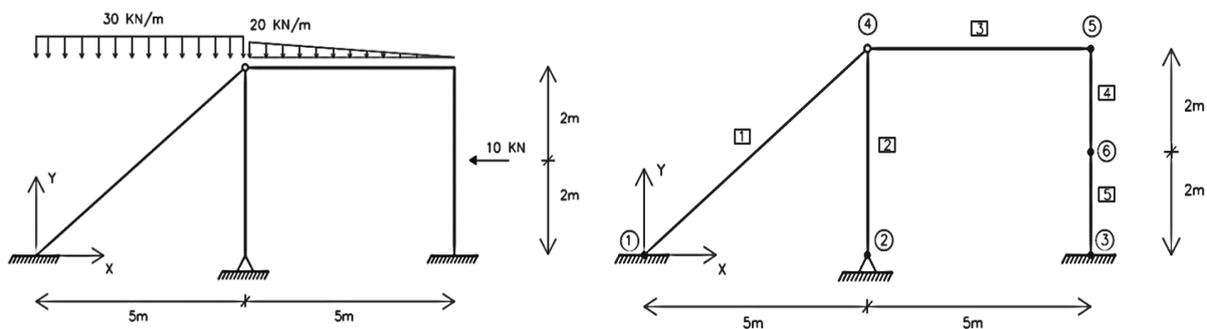


Figura 8. Exemplo 2 – Pórtico plano com rótula.

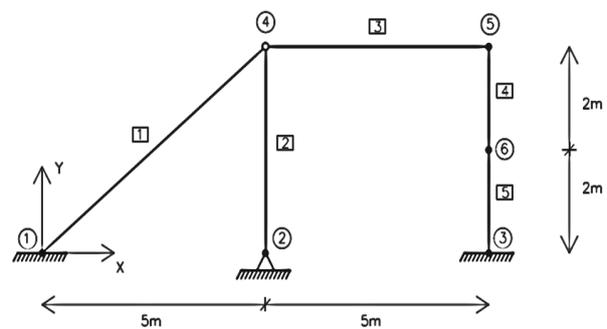


Figura 9. Discretização do pórtico plano com rótula.

Para esta estrutura foram consideradas as seguintes propriedades físicas e geométricas das seções transversais dos elementos: $E = 100 \text{ GPa} = 10^8 \text{ KN/m}^2$; $\nu = 0,2$; $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$; dimensões das seções transversais $h_y = 30 \text{ cm}$ e $h_z = 20 \text{ cm}$, com área $A = 6,0 \times 10^{-2} \text{ m}^2$ e momento de inércia à flexão $I_z = 4,50 \times 10^{-4} \text{ m}^4$.

Os resultados dos deslocamentos nodais obtidos pelo código computacional e pelo FTOOL estão apresentados na Tabela 4.

Tabela 4. Deslocamentos nodais para o pórtico plano com rótula

Nó	Código Computacional			FTOOL		
	Translação X (m)	Translação Y (m)	Rotação Z (rad)	Translação X (m)	Translação Y (m)	Rotação Z (rad)
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,000	0,000	$-1,571 \times 10^{-6}$	0,000	0,000	$-1,571 \times 10^{-6}$
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	$6,282 \times 10^{-6}$	$-5,130 \times 10^{-5}$	$-1,571 \times 10^{-6}$	$6,282 \times 10^{-6}$	$-5,130 \times 10^{-5}$	$-1,571 \times 10^{-6}$
5	$-2,634 \times 10^{-6}$	$-1,381 \times 10^{-5}$	$3,391 \times 10^{-4}$	$-2,634 \times 10^{-6}$	$-1,381 \times 10^{-5}$	$3,391 \times 10^{-4}$
6	$9,415 \times 10^{-5}$	$-6,903 \times 10^{-6}$	$-8,378 \times 10^{-5}$	$9,415 \times 10^{-5}$	$-6,903 \times 10^{-6}$	$-8,378 \times 10^{-5}$

Os resultados das reações estão apresentados na Tabela 5.

Tabela 5. Reações para o pórtico plano com rótula

Nó	Código Computacional			FTOOL		
	FX (KN)	FY (KN)	MZ (KN.m)	FX (KN)	FY (KN)	MZ (KN.m)
1	10,700	102,339	93,895	10,700	102,339	93,895
2	$1,806 \times 10^{-18}$	76,952	$4,530 \times 10^{-18}$	0,000	76,952	0,000
3	$-7,000 \times 10^{-1}$	20,709	2,585	$-7,00 \times 10^{-1}$	20,709	2,585

Os resultados dos esforços nodais estão apresentados na Tabela 6.

Tabela 6. Esforços nodais para o pórtico plano com rótula

Elemento	Nó	Código Computacional			FTOOL		
		Esforço Normal (KN)	Esforço Cortante (KN)	Momento Fletor (KN.m)	Esforço Normal (KN)	Esforço Cortante (KN)	Momento Fletor (KN.m)
1	1	72,285	73,229	93,895	72,285	73,229	93,895
	4	21,419	43,901	0,000	21,419	43,901	0,000
2	4	76,952	$-8,433 \times 10^{-18}$	$-2,281 \times 10^{-17}$	76,952	0,000	0,000
	2	-76,952	$8,433 \times 10^{-18}$	$-3,984 \times 10^{-18}$	-76,952	0,000	0,000
3	4	10,700	29,290	0,000	10,700	29,290	0,000
	5	-10,700	20,709	-20,214	-10,700	20,709	-20,214
4	5	20,709	10,700	20,214	20,709	10,700	20,214
	6	-20,709	-10,700	1,185	-20,709	-10,700	1,185
5	6	20,709	$7,000 \times 10^{-1}$	-1,185	20,709	0,700	-1,185
	3	-20,709	$-7,000 \times 10^{-1}$	2,585	-20,709	-0,700	2,585

Para o exemplo de pórtico plano com articulação, não foram verificadas divergências entre os resultados obtidos através do código computacional e os obtidos através do FTOOL, de forma que foi verificada a validação do código.

4.3 Treliça espacial

Para a treliça espacial ilustrada na Fig. 10, foram determinadas as reações de apoio, os deslocamentos e os esforços nodais através do código computacional e do programa SALT. A

discretização adotada na utilização do código computacional, bem como a numeração dos nós e elementos, estão apresentadas na Fig. 11.

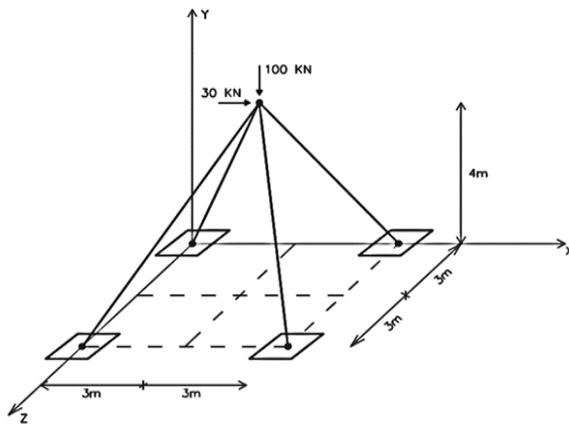


Figura 10. Exemplo 3 – Treliça espacial.

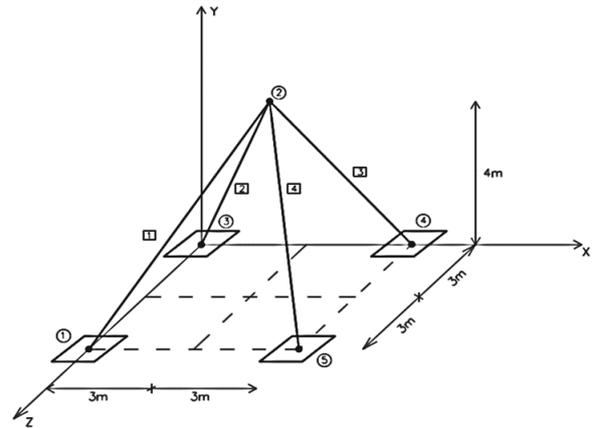


Figura 11. Discretização da treliça espacial.

Para esta estrutura foram consideradas as seguintes propriedades físicas e geométricas das seções transversais dos elementos: $E = 205 \text{ GPa} = 2,05 \times 10^8 \text{ KN/m}^2$; $\nu = 0,3$; $\alpha = 1,2 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$; dimensões das seções transversais $h_y = 6,0 \text{ cm}$ e $h_z = 4,0 \text{ cm}$, com área $A = 2,4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$; momentos de inércia à flexão $I_y = 3,20 \times 10^{-7} \text{ m}^4$ e $I_z = 7,20 \times 10^{-7} \text{ m}^4$; momento de inércia à torção $J_t = 7,512 \times 10^{-7} \text{ m}^4$; Variação de temperatura uniforme em todas as barras com $\Delta = 25^\circ\text{C}$. Todos os apoios restringem as três deslocabilidades translacionais.

Os resultados dos deslocamentos nodais obtidos através do código computacional e do SALT estão apresentados na Tabela 7.

Tabela 7. Deslocamentos nodais para a treliça espacial

Nó	Código Computacional			SALT		
	Translação X (m)	Translação Y (m)	Translação Z (m)	Translação X (m)	Translação Y (m)	Translação Z (m)
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	$3,358 \times 10^{-4}$	$1,192 \times 10^{-3}$	0,000	$3,360 \times 10^{-4}$	$1,192 \times 10^{-3}$	0,000
3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Os resultados das reações de apoio estão apresentados na Tabela 8.

Tabela 8. Reações para a treliça espacial

Nó	Código Computacional			SALT		
	FX (KN)	FY (KN)	FZ (KN)	FX (KN)	FY (KN)	FZ (KN)
1	11,250	15,000	-11,250	11,250	15,000	-11,250
3	11,250	15,000	11,250	11,250	15,000	11,250
4	-26,250	35,000	26,250	-26,250	35,000	26,250
5	-26,250	35,000	-26,250	-26,250	35,000	-26,250

Os resultados dos esforços nodais estão apresentados na Tabela 9.

Tabela 9. Esforços nodais para a treliça espacial

Elemento	Nó	Código Computacional	SALT
		Esforço Normal	Esforço Normal
1	1	21,866	21,870
	2	-21,866	-21,870
2	3	21,866	21,870
	2	-21,866	-21,870
3	4	51,021	51,020
	2	-51,021	-51,020
4	5	51,021	51,020
	2	-51,021	-51,020

Para o exemplo de treliça espacial as únicas diferenças encontradas entre os resultados fornecidos pelo código e o software SALT, tanto para os deslocamentos quanto para as reações e esforços, dizem respeito apenas ao arredondamento das casas decimais dos mesmos, de forma que a maior divergência encontrada corresponde a 0,059%, menor que os 2,0% estabelecidos no critério de validação.

4.4 Pórtico espacial

Para o pórtico espacial ilustrada na Fig. 12, foram determinadas as reações de apoio, os deslocamentos e os esforços nodais através do código computacional e do programa SALT. A discretização adotada na utilização do código computacional, bem como a numeração dos nós e elementos, estão apresentadas na Fig. 13.

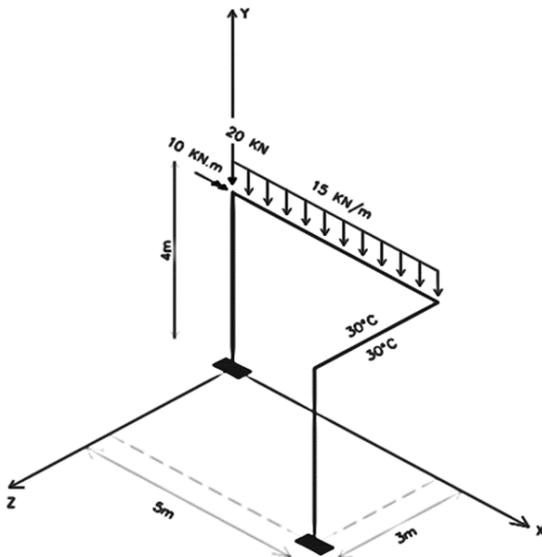


Figura 12. Exemplo 4 – Pórtico espacial.

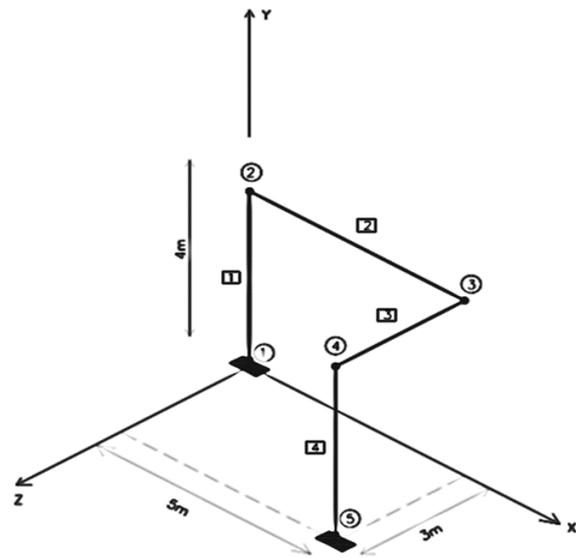


Figura 13. Discretização do pórtico espacial.

Para esta estrutura foram consideradas as seguintes propriedades físicas e geométricas das seções transversais dos elementos: $E = 100 \text{ GPa} = 10^8 \text{ KN/m}^2$; $\nu = 0,25$; $\alpha = 10^{-5}/^\circ\text{C}$; dimensões das seções transversais $h_y = 40 \text{ cm}$ e $h_z = 20 \text{ cm}$, com área $A = 8,0 \times 10^{-2} \text{ m}^2$; momentos de inércia à flexão $I_y = 2,666 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ e $I_z = 1,066 \times 10^{-3} \text{ m}^4$; momento de inércia à torção $J_t =$

$7,324 \times 10^{-4} m^4$; Variação de temperatura uniforme na barra 3 com $\Delta = 30^\circ C$. Todos os apoios restringem as seis deslocabilidades e todas as barras formam ângulos de 90° entre si.

Os resultados dos deslocamentos nodais obtidos através do código computacional e do SALT estão apresentados na Tabela 10.

Tabela 10. Deslocamentos nodais para o pórtico espacial

Nó	Código Computacional					
	Transl. X (m)	Transl. Y (m)	Transl. Z (m)	Rot. X (rad)	Rot. Y (rad)	Rot. Z (rad)
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	$4,578 \times 10^{-3}$	$-3,830 \times 10^{-5}$	$-5,396 \times 10^{-3}$	$-2,231 \times 10^{-3}$	$8,663 \times 10^{-4}$	$-2,478 \times 10^{-3}$
3	$4,574 \times 10^{-3}$	$-1,454 \times 10^{-2}$	$-9,056 \times 10^{-3}$	$-4,884 \times 10^{-3}$	$-1,311 \times 10^{-4}$	$-2,578 \times 10^{-3}$
4	$2,587 \times 10^{-3}$	$-9,197 \times 10^{-6}$	$-8,158 \times 10^{-3}$	$-4,546 \times 10^{-3}$	$-7,694 \times 10^{-4}$	$-1,105 \times 10^{-3}$
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Nó	SALT					
	Transl. X (m)	Transl. Y (m)	Transl. Z (m)	Rot. X (rad)	Rot. Y (rad)	Rot. Z (rad)
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	$4,573 \times 10^{-3}$	$-3,90 \times 10^{-5}$	$-5,399 \times 10^{-3}$	$-2,231 \times 10^{-3}$	$8,630 \times 10^{-4}$	$-2,479 \times 10^{-3}$
3	$4,568 \times 10^{-3}$	$-1,458 \times 10^{-2}$	$-9,065 \times 10^{-3}$	$-4,889 \times 10^{-3}$	$-1,260 \times 10^{-4}$	$-2,577 \times 10^{-3}$
4	$2,593 \times 10^{-3}$	$-9,00 \times 10^{-6}$	$-8,167 \times 10^{-3}$	$-4,552 \times 10^{-3}$	$-7,630 \times 10^{-4}$	$-1,103 \times 10^{-3}$
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Os resultados das reações de apoio estão apresentados na Tabela 11.

Tabela 11. Reações para o pórtico espacial

Nó	Código Computacional					
	Força X (KN)	Força Y (KN)	Força Z (KN)	Momento X (KN.m)	Momento Y (KN.m)	Momento Z (KN.m)
1	7,540	76,606	4,666	24,208	-6,345	50,991
5	-7,540	18,394	-4,666	20,973	5,635	44,541

Nó	SALT					
	Força X (KN)	Força Y (KN)	Força Z (KN)	Momento X (KN.m)	Momento Y (KN.m)	Momento Z (KN.m)
1	7,500	76,590	4,640	24,160	-6,330	51,080
5	-7,500	18,410	-4,640	21,060	5,590	44,390

Os resultados dos esforços nodais estão apresentados na Tabela 12.

Tabela 12. Esforços nodais para o pórtico espacial

Elemento	Nó	Código Computacional					
		N (KN)	Qy (KN)	Qz (KN)	Mx (KN.m)	My (KN.m)	Mz (KN.m)
1	1	76,606	-7,540	4,666	-6,345	-24,208	50,991
	2	-76,606	7,540	-4,666	6,345	5,545	-81,149
2	2	7,540	56,606	4,666	15,545	-6,345	81,149
	3	-7,540	18,394	-4,666	-15,545	-16,983	14,383
3	3	4,666	-18,394	-7,540	-14,383	16,983	-15,545
	4	-4,666	18,394	7,540	14,383	5,635	-39,636
4	4	18,394	7,540	4,666	5,635	-39,636	-14,383
	5	-18,394	-7,540	-4,666	-5,635	20,973	44,541

Elemento	Nó	SALT					
		N (KN)	Qy (KN)	Qz (KN)	Mx (KN.m)	MFy (KN.m)	MFz (KN.m)
1	1	76,59	-7,500	4,640	-6,330	-24,160	51,080
	2	-76,59	7,500	-4,640	6,330	5,580	-81,070
2	2	7,500	56,590	4,640	15,580	-6,330	81,070
	3	-7,500	18,410	-4,640	-15,580	-16,900	14,400
3	3	4,640	-18,410	-7,500	-14,400	16,900	-15,580
	4	-4,640	18,410	7,500	14,400	5,590	-39,650
4	4	18,410	7,500	4,640	5,590	-39,650	-14,400
	5	-18,410	-7,500	-4,640	-5,590	21,060	44,390

Já para o exemplo de pórtico espacial os resultados divergiram em proporções um pouco maiores que nos demais casos, mas ainda assim irrelevantes, podendo tais divergências estarem relacionadas ao fato do SALT fornecer resultados com um número menor de casas decimais em relação ao código computacional desenvolvido, à ordem dos cálculos desenvolvidos, ao fato de que o software utiliza a técnica do número grande para a inserção de condições de contorno, e uma possível consideração da deformabilidade por esforço cortante, prevista no SALT e não no código computacional desenvolvido. A maior divergência encontrada se deu nos esforços de momento em torno do eixo local x , relativos ao elemento 4, representando uma diferença de apenas 0,80%, menor que os 2,0% estabelecidos no critério de validação.

4.5 Limitações

As limitações encontradas no código computacional para análise de estruturas reticuladas planas e espaciais são assim elencadas:

- O código, diferentemente de outros programas de análise estrutural, não fornece os esforços internos ao longo do comprimento da barra, mas apenas nos seus pontos nodais. Dessa forma, nem sempre é possível, por exemplo, obter os esforços máximos que atuam nos elementos;
- A articulação é considerada apenas em pórticos planos;
- O código não considera a existência de ligação excêntrica entre barras, o que, Segundo Soriano (2005), usualmente ocorre em estruturas desse tipo;
- As articulações tratadas no código são apenas de momento fletor (rótula), o que libera apenas a rotação nas seções em que estão inseridas. Não são consideradas articulações que anulam esforço normal, esforço cortante ou momento torçor.
- Ao informar as condições dos apoios das estruturas, não existe a possibilidade de inserir apoios inclinados.

5 Conclusões

A ferramenta computacional desenvolvida se mostrou bastante eficaz quanto aos seus objetivos de fornecer os deslocamentos nodais, reações e esforços nodais das estruturas planas e espaciais as quais se propôs resolver. Os resultados encontrados, em sua grande maioria foram coincidentes com os resultados encontrados na literatura e em outros programas de análise estrutural. Os poucos resultados divergentes consistiram em pequenas diferenças, todas menores que o estabelecido no critério de validação, comprovando assim a eficiência da metodologia utilizada e das considerações feitas na modelagem do programa.

A linguagem de programação Fortran se mostrou bastante adequada para formulação matemática dos problemas. O fato de se utilizar um arquivo de entrada para os dados necessários à resolução das estruturas foi vantajoso, visto que caso ocorra algum erro de entrada, não é necessário informar todos os dados novamente, apenas modificá-los no referido arquivo. A criação do arquivo de saída com as matrizes e vetores montados também constitui uma vantagem, já que através deles é possível analisar mais a fundo o comportamento das estruturas. O código ainda é passível de melhorias, mas já consiste

numa ferramenta capaz de auxiliar estudantes de graduação e pós-graduação, principalmente no que diz respeito às estruturas espaciais.

Referências

- [1] MOREIRA, Domício Falcão. **Análise matricial de estruturas**. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos; São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 1977.
- [2] MARTHA, Luiz Fernando. **Análise de estruturas: conceitos e métodos básicos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.
- [3] MITTELBACH, Fernanda Rodrigues. **Notas de Aulas da Disciplina Análise Estrutural II**. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.
- [4] MICHELIM, M.L.; CADAMURO JR, I.W. Resolução de pórticos planos através da análise matricial de estruturas. In: ENCONTRO TECNOLÓGICO DA ENGENHARIA CIVIL E ARQUITETURA, 4., 2003, Maringá. **Anais eletrônicos...** Maringá: UEM, 2003. Disponível em: <www.dec.uem.br/eventos/enteca_2003/Temas/tema7/064.PDF>. Acesso em: 10 mar. 2017.
- [5] KUMMER, Fabricio Deives. **Análise de pórticos espaciais pelo método da rigidez: consideração dos efeitos por deformação por corte**. 2014. 105 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.
- [6] SORIANO, Humberto Lima. **Análise de Estruturas: formulação matricial e implementação computacional**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2005.
- [7] NUNES, F.; FRANKLIN, Y.; CARDOSO, L. aplicação do método de eliminação de Gauss em Matlab. In: SIMPÓSIO DE EXCELÊNCIA EM GESTÃO E TECNOLOGIA, 3., 2006, Resende. **Anais eletrônicos...** Resende: Associação Educacional Dom Bosco, 2006. Disponível em: <[www.aedb.br/seget/arquivos/artigos08/465_Eliminacao_de_Gauss\[1\].pdf](http://www.aedb.br/seget/arquivos/artigos08/465_Eliminacao_de_Gauss[1].pdf)>. Acesso em: 12 mar. 2017.