

## **A STUDY ON THE INFLUENCE OF STEEL REINFORCEMENT IN FORCE PATHS IN RC STRUCTURES USING TOPOLOGY OPTIMIZATION**

**Danilo B. Cavalcanti**

**Sylvia R. M. Almeida**

*daniloborgescavalcanti@gmail.com*

*sylvia@ufg.br*

*School of Civil and Environmental Engineering, Federal University of Goiás*

*Av. Universitária, 1488, Qd 86, Lt Area. St. Universitário, Goiânia, GO, Brazil, 74605-220*

**Abstract.** Strut-and tie models are mechanism-based models used to describe the complex behavior of reinforced concrete structures that do not satisfy the Bernoulli hypothesis. The continuum structure is replaced by truss representing the force paths inside the cracked continuum. This paper uses topology optimization techniques to generate the force paths automatically in reinforced concrete structures. The traditional density approach is adopted to represent the behavior of the concrete continuum and, in addition, truss elements are used to represent the steel reinforcement. Bi-linear models are associated to each material in order to separate the tensile and compressive paths. A numerical example shows the influence of the reinforcement in the final force path.

**Keywords:** Topology optimization. Strut-and-tie models. Reinforced density method.

## 1 Introdução

Em estruturas de concreto armado que não satisfazem as hipóteses de Bernoulli, um caminho alternativo comumente adotado é a utilização de Modelos de Escoras e Tirantes (MET), uma evolução da analogia da treliça de Morsch e Ritter. Tais modelos baseiam-se na utilização de uma treliça idealizada que corresponda ao caminho percorrido pelas forças nessa região. Há vários métodos para indicar o caminho de forças em estruturas de concreto armado, cada qual conduzindo a uma treliça diferente. Todas as possibilidades de traçado de caminhos de força estaticamente admissíveis representam, pelos teoremas limites da plasticidade, um limite inferior da carga de colapso da estrutura contínua de concreto armado e por isso podem ser usados no projeto dessas estruturas. Com os avanços computacionais, toma corpo a busca por processos que automatizem a obtenção do caminho de forças e a utilização de algoritmos de otimização passa a ser um desdobramento natural.

A otimização de topologia (OT) é um campo da otimização de estruturas aplicável para a obtenção de leiautes estruturais que consiste na obtenção de uma distribuição ótima de material em uma região do espaço pré-definida, denominada domínio estendido. O desenvolvimento do trabalho seminal de Bendsøe e Kikuchi [1] resultou nos atuais métodos de densidade, uma das abordagens mais utilizadas nesse campo. O problema a ser resolvido é a distribuição de material, representado pela densidade relativa, em um domínio estendido geralmente discretizado em elementos finitos.

Contudo, haja vista que, em estruturas de concreto armado, tem-se a necessidade da colocação de barras de aço em posições específicas devido a aspectos construtivos, este trabalho tem como objetivo verificar a influência do reforço em barras de aço nos caminhos de força no interior do elemento de concreto. Para tanto, é realizada uma alteração no tradicional método da densidade, através da incorporação de elementos discretos de treliça em regiões específicas do domínio estendido, a ser discretizado pelos elementos de estado plano do método da densidade.

## 2 Método da Densidade

O problema a ser solucionado utilizando o método da densidade consiste na distribuição ótima de material em uma determinada região do espaço, denominada domínio estendido, mantendo-se constante o volume total de material. A densidade relativa de material,  $\rho$ , representa a relação entre o volume de material presente em cada região do domínio estendido e o volume dessa região. Assim, a densidade  $\rho$  pode assumir os valores de 0 (vazio) a 1 (material sólido). A função objetivo do problema é a flexibilidade média da estrutura e o problema de otimização é descrito na Eq. (1).

$$\begin{aligned} \text{Obter:} & \quad \boldsymbol{\rho} \\ \text{Que minimiza:} & \quad c(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{U}^T(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{Tal que:} & \quad \sum_{\rho \in \Omega} \rho_e V_e = V_{mat} \\ & \quad 0 < \rho_e^{min} \leq \rho_e \leq \rho_e^{max}, e = 1, \dots, ne \\ \text{Com:} & \quad \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{F} \end{aligned} \quad (1)$$

Onde:  $\boldsymbol{\rho}$  é o vetor com densidades relacionadas a cada elemento finito;  $c$  é a flexibilidade média da estrutura;  $\mathbf{U}$  é o vetor de deslocamentos nodais da estrutura;  $\rho_e$  é a densidade relativa ao elemento finito  $e$ ;  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez da estrutura;  $V_e$  é o volume do elemento finito  $e$ ;  $V_{mat}$  é o volume de material previsto pelo projetista;  $\rho_e^{min}$  limite inferior da restrição dos valores de densidade admissíveis; e  $\rho_e^{max}$  limite superior da restrição dos valores de densidade admissíveis.

A fim de evitar a presença de elementos com densidades intermediárias na solução topológica final, pode-se aplicar modelos de penalização. Neste trabalho foi adotado o modelo SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization* [2,3], como apresentado na Eq. (2).

$$E_e(\rho_e) = \rho_e^p E_{se} \quad (2)$$

Onde:  $E_e$  é o módulo de elasticidade do elemento com densidade  $\rho_e$ ;  $E_{se}$  é o módulo de elasticidade do elemento  $e$  para material sólido.

A função objetivo do problema pode então ser reescrita a em função da matriz de rigidez dos elementos, como na Eq. (3) e, assim, a sensibilidade da função objetivo, é dada pela Eq. (4).

$$c(\boldsymbol{\rho}) = \sum_e^N \rho_e^p \mathbf{U}_e(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{Ks}_e \mathbf{U}_e(\boldsymbol{\rho}) \quad (3)$$

$$\frac{\partial c(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_{el}} = -p \rho_e^{p-1} \mathbf{U}_e(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{Ks}_e \mathbf{U}_e(\boldsymbol{\rho}) \quad (4)$$

Onde:  $\mathbf{U}_e$  é o vetor de deslocamentos nodais relativo ao elemento  $e$ ; e  $\mathbf{Ks}_e$  é a matriz de rigidez do elemento  $e$  com material sólido.

A fim de evitar problemas de instabilidades numéricas, os quais o problema de otimização descrito pela Eq (1) está submetido, como dependência de malha, soluções em tabuleiro de xadrez e soluções em ilha, Bensøe e Sigmund [4] destacam o uso do filtro de sensibilidade. O método proposto consiste em uma relação heurística que modifica a sensibilidade de cada elemento através da média ponderada das sensibilidades dos elementos vizinhos dentro de um determinado raio fixo. A Eq. (5) apresenta a modificação no cálculo da sensibilidade da função objetivo.

$$\frac{\partial \widehat{c(\boldsymbol{\rho})}}{\partial \rho_i} = \frac{1}{\rho_i \sum_{j=1}^N H_j} \cdot \sum_{j=1}^N H_j \rho_j \frac{\partial c(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_j} \quad (5)$$

Onde,  $i$  é o índice da sensibilidade alterada,  $j$  é o índice do elemento vizinho contido no raio de ação do filtro e  $H_j$  é o fator de convolução, o qual é calculado pela Eq. (6).

$$H_j = \frac{r_{min} - r_{ij}}{r_{ij}} \quad (6)$$

Sendo  $r_{min}$  o raio de atuação do filtro e  $r_{ij}$  a distância do centro do elemento  $i$  ao centro do elemento  $j$ .

### 3 Metodologia proposta

O Método da Densidade Reforçado (MDR) utiliza uma combinação de elementos contínuos e discretos, onde os elementos discretos não fazem parte do processo de otimização. Foi utilizado por Stromberg *et al.* [5] para a concepção de sistemas de contraventamento em edifícios. Neste trabalho, tem-se o objetivo de avaliar a influência da presença de barras de aço com área e posições pré-determinadas na formação dos caminhos de força no interior do concreto. Deste modo, os elementos finitos de estado plano utilizados no Método da Densidade representam o concreto e os elementos de treliça representam o reforço em aço. Assim, define-se um modelo de material bi-linear para o concreto e linear para o aço. Para este, é definido um módulo de elasticidade à tração e compressão de 210 GPa. Para o concreto, é definido um módulo de elasticidade à compressão de 24 GPa e um módulo de elasticidade à tração reduzido de 2,40 GPa. A rigidez não nula à compressão do concreto é considerada a fim de evitar problemas de instabilidade numérica, tal como singularidades na matriz de rigidez global da estrutura. Os modelos do concreto e do aço estão apresentados na Fig. 1.

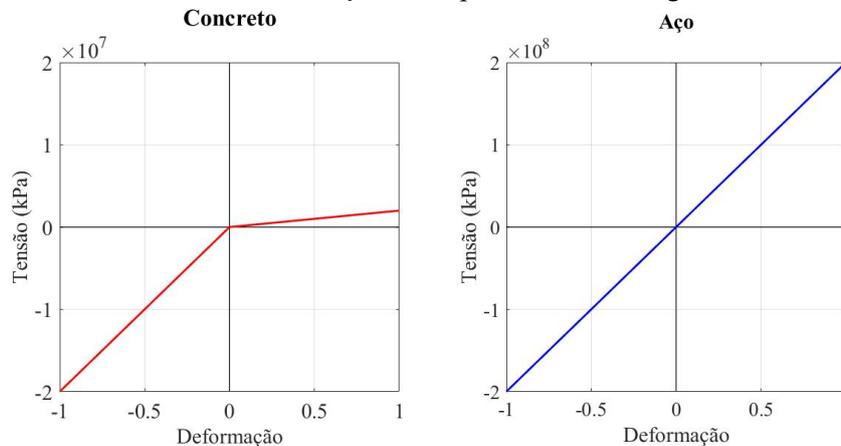


Figura 1. Diagramas tensão-deformação para o concreto e para o aço

Para a consideração do modelo de material bilinear para o concreto, a realização a análise estrutural é realizada em dois momentos. Primeiro, a análise estrutural é feita para identificar os elementos de densidade em estado de tensão de tração, a fim de atualizar os módulos de elasticidade. Segundo, é realizada a análise novamente para que o cálculo da função objetivo seja feito com os módulos de elasticidade atualizados. Essas modificações são apresentadas na Fig. 2.

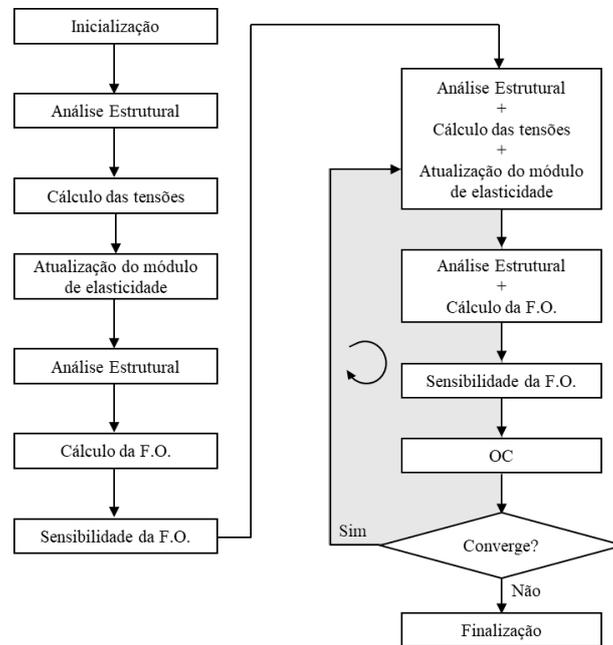


Figura 2. Algoritmo de otimização para MDR.

A fim de incorporar a contribuição da rigidez do reforço proveniente das barras, a montagem da matriz de rigidez da estrutura passa a incluir os termos das matrizes de rigidez das barras presentes, conforme a Eq. (7). Vale destacar que o somatório indicado diz respeito à operação de montagem da matriz de rigidez da estrutura.

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{ne\Omega} \mathbf{K}_e(\rho_e, \sigma_e) + \sum_{b=1}^{nb} \mathbf{K}_b(A_b) \quad (7)$$

Onde,  $\mathbf{K}_e$  é a matriz de rigidez do elemento de estado plano do tipo Q-4;  $\sigma_e$  é a tensão do elemento de estado plano  $e$ ;  $\mathbf{K}_b$  é a matriz de rigidez do elemento de barra  $b$  e  $A_b$  é a área do elemento de barra  $b$ .

É válido destacar que as sensibilidades da função objetivo são calculadas pelas mesmas equações do método da densidade tradicional, conforme apresentado pela Eq. (4).

## 4 Resultados

A fim de representar a influência da presença do reforço em aço na determinação dos caminhos de força no interior do concreto, com a utilização da metodologia proposta, é apresentado um exemplo de uma viga engastada em uma das extremidades e livre na outra com uma carga pontual aplicada no meio da extremidade livre. Definiu-se uma malha de 64 x 32 elementos, com fator de penalização 3 e um volume máximo igual a 40% do volume inicial presente no domínio. A Figura 3 apresenta o domínio estendido, a malha de elementos com as posições das barras de reforço e as soluções topológicas obtidas. Neste exemplo,  $f$  indica a fração de volume de material em relação ao volume total do domínio estendido ( $V_{mat} = fV_{\Omega}$ ).

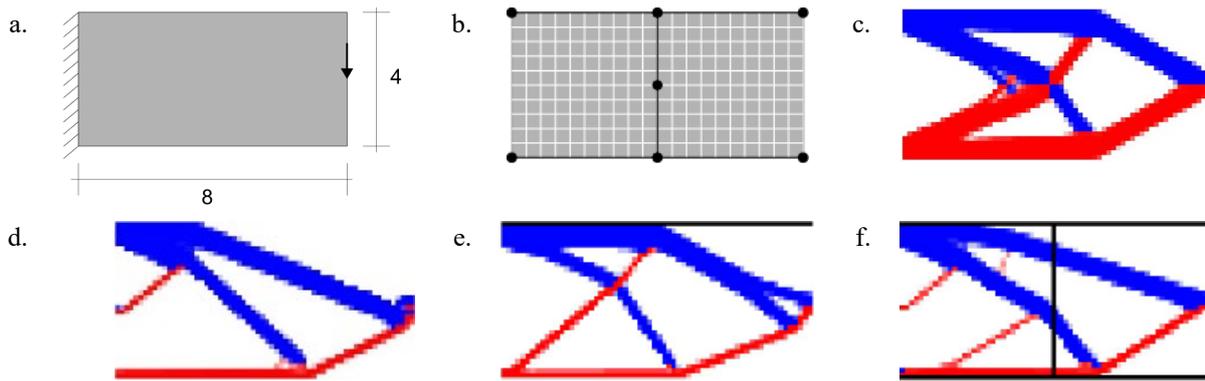


Figura 3. Exemplo 01 MDR. (a) Domínio estendido. (b) Posições das barras que compõe o reforço. (c) Solução MD tradicional. (d) Solução pelo MDR com  $f=30\%$  sem presença de reforço. (e) Solução pelo MDR com  $f=30\%$  com as duas barras na região superior como reforço. (f) Solução pelo MDR com  $f=30\%$  com todas as barras apresentadas como reforço.

A Figura 3 indica que a presença de barras incorporadas na malha de elementos de densidade altera a solução topológica obtida. Logo, a presença das mesmas no interior de um domínio de concreto influencia na determinação dos caminhos de força de tração e compressão, haja vista que nas regiões onde se têm a presença de barras de aço há maior concentração de tensão e, por consequência, de material.

## 5 Conclusões

O exemplo numérico apresentado no item anterior permite verificar que a, conforme esperado, presença de barras de aço influenciam na determinação dos caminhos de força no interior do concreto. Assim, o trabalho abre campo para continuação da pesquisa com a inclusão dos elementos de barra no processo de otimização.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa de Estado de Goiás (FAPEG) e ao CNPq pelo apoio financeiro por meio da chamada pública 07/2016 – Programa de Apoio a Núcleos Emergentes – PRONEM/FAPEG/CNPq.

## Referências

- [1] M. P. Bendsøe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural desing using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 71, n. 2, pp. 197–224, 1988.
- [2] M. P. Bendsøe. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, vol. 34, n. 2, pp. 1–20, 2007.
- [3] M. Zhou and G. I. N. Rozvany. The COC algorithm, part II: topological, geometrical and generalized shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 89, n. 1-3, pp. 309–336, 1991.
- [4] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. O. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. 2nd. ed. New York: Springer, 2004.
- [5] L. L. Stromberg, A. Beghini, W. F. Baker and G. H. Paulino, Topology optimization for braced frames: combining continuum and beam/column elements. *Engineering Structures*, vol. 37, pp. 106–124, 2011.