

OBTAINING STRUT-AND-TIE MODELS USING TRUSS STRUCTURAL OPTIMIZATION

Camilla Pereira

Sylvia R. M. Almeida.

camillapereira1@hotmail.com

sylvia@ufg.br

School of Civil and Environmental Engineering, Federal University of Goiás

Av. Universitária, 1488, Qd 86, Lt Area. St. Universitário, Goiânia, GO, Brazil, 74605-220

Abstract. Strut-and-tie models are mechanism-based truss models applied in the design of reinforced concrete structures. This paper applies the plastic formulation of the ground structure method to obtain the force paths used in such models. The educational code GRAND is adapted to include the reactions in the constraint nodes in the design variables in addition to the cross-sectional areas and the axial forces of the bars. The optimization problem is written as a linear programming by introducing slack variables related to the areas, axial forces and reactions. The maximum filter is applied to extract a topology in equilibrium at the end of the optimization process. The original filter is adapted in order to apply the filter to the maximum areas of the tensile and compression bars. This procedure prevents inadvertent cut of thin bars of the resistant material. Numerical examples are presented to demonstrate the applicability of the proposal.

Keywords: Strut-and-tie models. Topology optimization. Ground Structure Method. Maximum filter.

1 Introdução

Modelos de Bielas e Tirantes (MBT) são modelos auxiliares usados no dimensionamento de estruturas de concreto armado em que há zonas que não satisfazem as hipóteses de Bernoulli. Tais zonas surgem tipicamente próximas a descontinuidades na geometria ou na estática. Os MBT podem ser usados para determinação do caminho das forças nessas estruturas, orientando o posicionamento de furos e cargas, podendo também serem aplicados ao dimensionamento.

O uso de técnicas de otimização para determinação desses modelos é uma possibilidade que tem sido explorada ([1], [2]) e este trabalho propõe o uso da formulação plástica do Método da Estrutura Base (MEB) [3] para esse fim. O MEB baseia-se na otimização de dimensões de treliças com barras em excesso, permitindo alterações na topologia pela eliminação das barras em posições que contribuam pouco para o desempenho mecânico da estrutura. A partir de uma grade de nós fixa, define-se uma treliça altamente conectada sujeita a restrições de tensão em um problema de minimização de volume. A partir de análise do equilíbrio de forças nodais, o processo de otimização remove os elementos desnecessários ou mecanicamente pouco eficientes do domínio de projeto definido. O produto da otimização pode ainda apresentar diversas barras finas que tornam a solução pouco atraente para aplicações práticas. Assim, ao final do processo as barras mais finas são removidas, resultando na topologia a ser aplicada em projeto.

2 Formulação Plástica do MEB

Neste trabalho, tem-se por objetivo a minimização do volume da estrutura, tendo as áreas das barras da estrutura base como variáveis de projeto, conforme descrito na Eq. (1). As restrições de igualdade impõem o equilíbrio de forças nos nós e as restrições de desigualdade referem-se aos limites de tensões.

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} && V(\mathbf{a}) = \mathbf{I}^T \mathbf{a} \\ & \text{Tal que} && \mathbf{B}^T \mathbf{n} = \mathbf{f} \\ & && -\sigma_c A_i \leq n_i \leq \sigma_t A_i \quad i = 1 \dots N_b \end{aligned} \quad (1)$$

Onde: \mathbf{a} representa o vetor das áreas das seções transversais das barras da estrutura base; \mathbf{I} é o vetor dos comprimentos das barras; \mathbf{B}^T é a transposta da matriz de equilíbrio nodal, construída a partir dos cossenos diretores das barras; \mathbf{n} representa o vetor de forças axiais nas barras; \mathbf{f} é o vetor de forças aplicadas nos nós; σ_t e σ_c são, respectivamente, os limites de tensões de tração e compressão.

O problema apresentado na Eq. (1) não se encaixa em um problema de programação linear porque as variáveis n_i , que representam as forças nas barras, não assumem apenas valores positivos. A partir da incorporação de variáveis de folga s_i^- e s_i^+ nas restrições de tensão [4], é possível converter as desigualdades em igualdades e assim escrever a área das barras e o vetor de forças normais em função das variáveis de folga, conforme expresso na Eq (2) e na Eq.(3), transformando o problema como mostrado na Eq. (4).

$$a_i = \frac{s_i^+}{\sigma_t} + \frac{s_i^-}{\sigma_c} \quad (2)$$

$$n_i = s_i^+ - s_i^- \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \text{Obter} && \mathbf{T} = \{ \mathbf{s}^{+T} \quad \mathbf{s}^{-T} \} \\ & \text{Que minimiza} && V(\mathbf{s}) = \sigma_t \left[\mathbf{I}^T - \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \mathbf{I}^T \right] \mathbf{s} \\ & \text{Tal que} && [\mathbf{B}^T - \mathbf{B}^T] \mathbf{s} = \mathbf{f} \\ & && s_i^+, s_i^- \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

3 Incorporação das reações de apoio como variáveis de projeto

Um dos pontos negativos percebidos do processo apresentado por Zegard e Paulino (2014) é a eliminação das equações relativas ao equilíbrio de forças na direção dos graus de liberdade impedidos devido o desconhecimento do valor das reações de apoio. Para solucionar este problema, foram realizadas alterações na formulação apresentada na Eq. (1) a fim de tornar as reações de apoio variáveis de projeto. Assim, o problema apresentado na Eq. (4) com a incorporação das variáveis de folga t_i^+, t_i^- , conforme definido na Eq. (5), além das já mencionadas variáveis de folga s_i^+, s_i^- , resultando no problema de programação apresentado na Eq. (7).

$$r_i = t_i^+ - t_i^- \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{Obter} \quad & \mathbf{x}^T = \{ \mathbf{s}^{+T} \quad \mathbf{s}^{-T} \quad \mathbf{r}^{+T} \quad \mathbf{r}^{-T} \} \\ \text{Que minimiza} \quad & V(\mathbf{x}) = \sigma_t \left[\mathbf{1}^T \quad -\frac{\sigma_t}{\sigma_c} \mathbf{1}^T \quad 0 \quad 0 \right] \mathbf{x} \\ \text{Tal que} \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & -\mathbf{B}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{B}\mathbf{r}^T & -\mathbf{B}\mathbf{r}^T & -\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{s}^+ \\ \mathbf{s}^- \\ \mathbf{t}^+ \\ \mathbf{t}^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{g} \end{Bmatrix} \\ & s_i^+, s_i^-, t_i^+, t_i^- \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Onde: \mathbf{B}^T é a transposta da matriz de equilíbrio nodal, formada pelos cossenos diretores das barras envolvidas em cada relação de equilíbrio dos graus de liberdade livres; $\mathbf{B}\mathbf{r}^T$ é a transposta da matriz de equilíbrio nodal, formada pelos cossenos diretores das barras envolvidas em cada relação de equilíbrio graus de liberdade restritos; \mathbf{E} é a matriz que das contribuições das reações de apoio às equações de equilíbrio global da estrutura, equilíbrio de forças na horizontal, equilíbrio de forças verticais, e momentos na origem; \mathbf{r} é vetor das reações de apoio; $\mathbf{f}\mathbf{r}$ ao vetor de forças aplicadas nas direções dos graus de liberdade restritos; \mathbf{g} é a o vetor que reflete a contribuição das forças aplicadas nos nós às equações de equilíbrio de forças na horizontal, vertical e a somatória dos momentos.

4 Filtro máximo

Após o processo de otimização, não há garantias de que a aplicação de um corte simples resulte em uma topologia estável pois, a rigor, a extração de barras altera o equilíbrio de forças nos nós. Sanders, Ramos Jr e Paulino [5] propuseram um processo de filtragem, neste trabalho adaptado à obtenção de MBTs apresentado na Eq (7), com $A_{n_{\max}}$ igual à máxima área dos elementos tracionados se $N_i \geq 0$ e igual à máxima área dos elementos comprimidos se $N_i < 0$.

$$\text{Se } N_i > 0 \Rightarrow A_i = \text{Filtro}(\alpha_f, A_i, N_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{A_i}{A_{n_{\max}}} < \alpha_f \\ A_i & \text{se } \frac{A_i}{A_n} \geq \alpha_f \end{cases} \quad (7)$$

O filtro máximo consiste na aplicação do método da bisseção para determinar o maior valor percentual (α_f). Nesta abordagem as forças axiais nas barras não são recalculadas após a extração da topologia. Admite-se que, se as forças nas barras eliminadas forem suficientemente pequenas, haverá apenas uma perturbação no sistema com readequação das forças nas barras e considera-se que o equilíbrio está mantido se atende à Eq. (8).

$$NR = \frac{\| \mathbf{B}_{Top}^T \mathbf{n}_{top} - \mathbf{f}_{top} \|}{\| \mathbf{f}_{top} \|} \leq Tol \quad (8)$$

Onde: NR equivale a norma residual da relação de equilíbrio; \mathbf{B}_{Top}^T representa a matriz de equilíbrio nodal da topologia extraída; \mathbf{n}_{Top} é o vetor de forças axiais nas barras; \mathbf{f}_{Top} corresponde ao vetor de forças aplicadas nos nós da topologia extraída; e Tol é o fator de tolerância, neste trabalho adotado 10^{-4} .

5 Resultados

A formulação proposta é aplicada a uma viga-parede simples, Figura 1 (a), e a uma viga-parede com furo, Figura 1 (b). Ambas com 7,0 x 5,0 metros e carga total de 5000 kN. Os dois casos são avaliados para limites de tensão de tração e compressão iguais a $\sigma_C = \sigma_T = 20$ MPa e com distinção entre as resistências, respectivamente iguais a $\sigma_C = 20$ MPa e $\sigma_T = 435$ MPa.

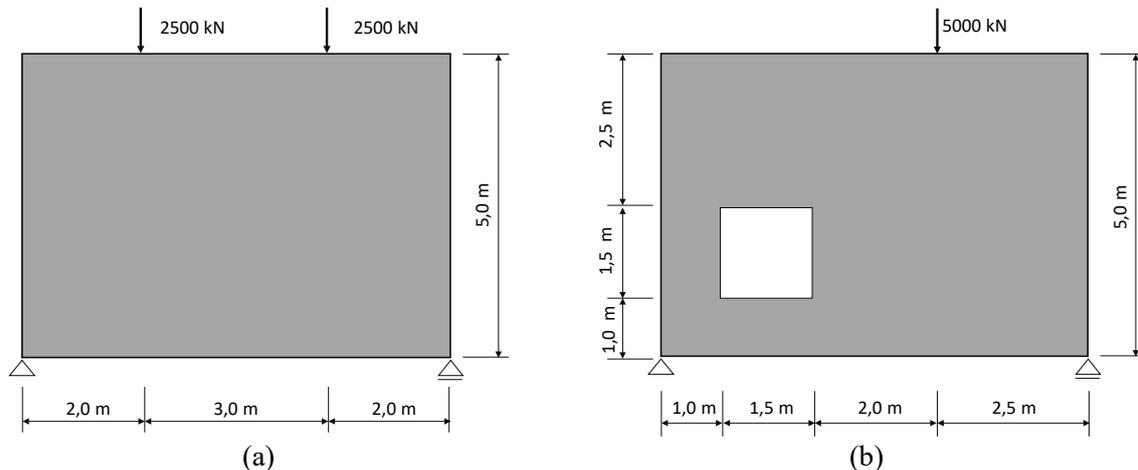


Figura 1. Domínios de projeto: (a) viga-parede simples; (b) viga-parede com furo

5.1 Viga-Parede simples

Para a viga-parede simples, domínio ilustrado na Figura 1 (a), com a carga total de 5000 kN dividida em duas cargas iguais a dois metros de cada apoio, a Figura 2 apresenta a estrutura base utilizada, de 15 x 11 nós, e as topologias extraídas para as duas condições de resistência. Conforme esperado, a alteração dos limites de resistência altera as áreas da solução final, com redução da área das barras tracionadas, com maior resistência. Assim, o exemplo valida a formulação implementada.

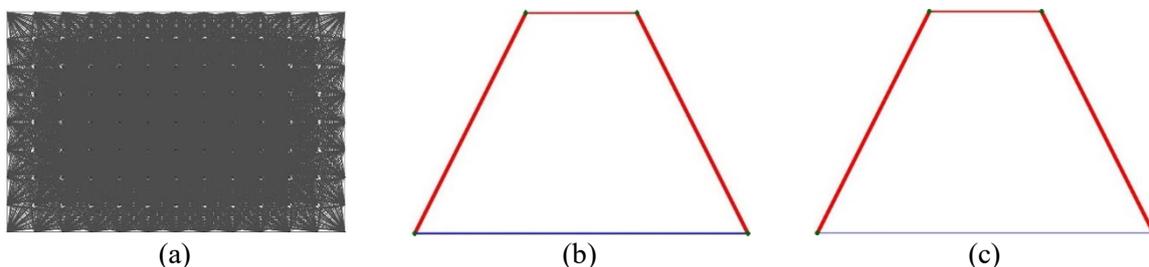


Figura 2. Estrutura base e topologias extraídas para viga-parede simples: (a) estrutura base com nível de conectividade 4; (b) topologia extraída para $\sigma_t = \sigma_c = 20$ MPa; (c) topologia extraída para $\sigma_t = 435$ MPa e $\sigma_c = 20$ MPa

5.2 Viga-parede com furo

A Figura 4 apresenta, para a viga-parede com furo, domínio ilustrado na Figura 1 (b), a estrutura base utilizada, de 15 x 11 nós, e as topologias extraídas para as duas condições de resistência. Conforme esperado, a alteração dos limites de resistência altera as áreas da solução final, com redução da área das barras tracionadas, com maior resistência.

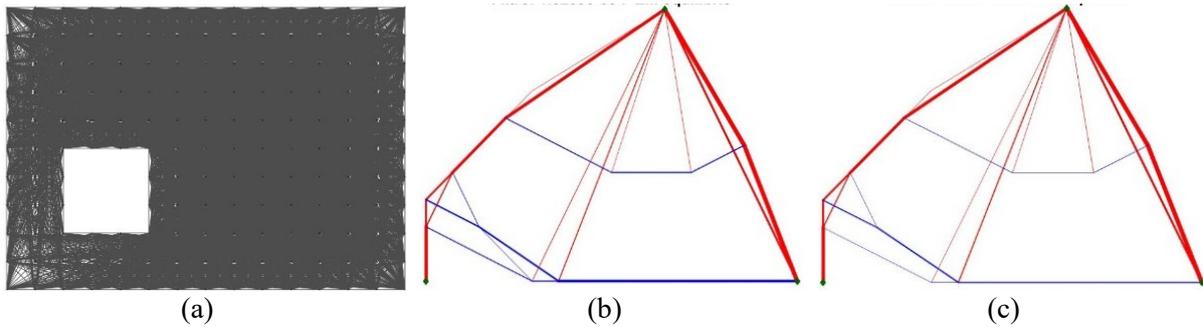


Figura 4. Topologias extraídas para viga-parede com furo: a) topologia extraída para $\sigma_t = \sigma_c = 20$ MPa; (c) topologia extraída para $\sigma_t = 435$ MPa e $\sigma_c = 20$ MPa

Da mesma forma que nos casos anteriores, verifica-se a formação de um tirante partindo do segundo apoio, além da redução da área das barras tracionadas e a manutenção das áreas das barras comprimidas, devido ao acréscimo na resistência do material tracionado.

6 Conclusões e sugestões

Os resultados apresentados mostram que é possível obter Modelos de Bielas e Tirantes utilizando a adaptação da formulação plástica do método da estrutura base. As modificações na formulação apresentada no código educacional GRAND [3] para a consideração das reações de apoio da estrutura no problema de otimização evitam a eliminação das equações relativas ao equilíbrio nos graus de liberdade restritos e que as topologias extraídas apresentem um falso equilíbrio nodal, principalmente em casos em que apoios podem ser eliminados no processo de otimização.

As alterações realizadas no filtro máximo [5] para distinguir as propriedades dos materiais que simulam as bielas dos que simulam os tirantes possibilitou a manutenção da relação entre as peças extraídas e a área máxima correspondente a cada materia.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa de Estado de Goiás (FAPEG) e ao CNPq pelo apoio financeiro por meio da chamada pública 07/2016 – Programa de Apoio a Núcleos Emergentes – PRONEM/FAPEG/CNPq.

Referências

- [1] M. Bruggi. Generating strut-and-tie patterns for reinforced concrete structures using topology optimization. *Computers and structures*, vol. 87, pp. 1483-1495, 2009.
- [2] M. Victoria, O. M. Querin and P. Mart. Generation of strut-and-tie models by topology design using different material properties in tension and compression. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 44, n. 2, pp. 247-258, 2011.
- [3] T. Zegard and G. H. Paulino. GRAND – Ground structure based topology optimization on arbitrary 2D domains using MATLAB. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 50, n. 5, pp. 861-882, 2014.
- [4] W. Aichtziger. On simultaneous optimization of truss geometry and topology. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 33, n. 4-5, pp. 285-304, 2007.
- [5] E. D. Sanders, A.S Ramos Jr, and G.H Paulino. A maximum filter for the ground structures method: An optimization tool to harness multiple structural designs. *Engineering Structures*, vol. 151, pp. 235-252, 2017.