

ESTUDO SOBRE EFICIÊNCIA DE RESOLUÇÃO NUMÉRICA DO FENÔMENO MASSA-MOLA

João Marcos Alves de Oliveira
Rodrigo Toledo Teixeira Câmara

j.marcoospace@gmail.com

rodrigo.camara@ufersa.edu.br

Professor efetivo na Universidade Federal Rural do Semi-Árido

R. Gamaliel Martins Bezerra, 59515-000, Angicos - RN, Brasil

Abstract. The study of numerical methods is essential for the sciences, being that we often can't solve analytically the mathematical problems. However, these generate errors, in which they can often cause catastrophic disasters if proper precautions are not taken. In this article, we will make a case study for the mass-spring phenomenon. For purposes of comparison and demonstration of efficiency, we will solve the problem by the numerical methods based on Taylor series, Euler First Order, Runge-Kutta Second and Fourth Order, and by the classic analytic form. The theory about Taylor series allows us to only estimate the order of magnitude of the error. In this case study, the error generated by each method will be analyzed directly and compared by means of the relative error criterion, absolute and relative amplitude. As a measure of quality, we will propose an adapted variation of the six-sigma quality control system. We conclude that the method of Runge-Kutta Fourth Order is of excellent quality ("four sigma") under some conditions (step h of lengths 0.025).

Keywords: Error, Numerical methods, Differential equation, Mass-spring phenomenon

1 Introdução

Nas ciências, nos deparamos com diversos tipos de problemas matemáticos. Para alguns deles, temos estratégias para obtermos soluções exatas. No entanto, na maior parte dos casos, não há (ou ainda não sabemos) como encontrar esta solução. Para estes, utilizamos técnicas de Cálculo Numérico, que nos permitem obter uma solução aproximada.

Existe uma situação em particular que chama atenção, que é o caso das equações diferenciais. De acordo com Zill and Cullen [1], *equações diferenciais* são importantes para corpo em queda livre, circuitos em série e lei de esfriamento de Newton, dentre outras. No entanto, para a vasta maioria delas, não sabemos obter a solução explícita Guidorizzi [2]. Necessita-se, portanto, apelarmos para algoritmos numéricos para estudarmos estes fenômenos.

Para gerar dados que servirão como base de estudos e comparações, será usado como exemplo a modelagem do fenômeno do sistema massa-mola, proposto e estudado na monografia de Teixeira [3]. Este fenômeno, de forma geral, é utilizado para estudar as oscilações de uma partícula no espaço, e é base para modelar outros mais complexos, como estruturas de amortecimento de carros, resistências de vigas, confiabilidade de pontes para automóveis, etc.

Este trabalho justifica-se pois as equações diferenciais modelam diversos fenômenos da natureza. No entanto, como a maior parte dos casos são difíceis ou impossíveis de serem resolvidos de forma analítica, há a necessidade de se utilizar métodos numéricos.

Porém, estes métodos geram erros. Estes erros, originados do uso descuidado dos métodos numéricos, geram calamidades que podem causar prejuízos financeiros, como foguetes que se autodestroem segundos após serem lançados Baraniuk [4].

Portanto, esta pesquisa é importante pois tem como objetivo, verificar a eficiência dos métodos numéricos, por meio de comparações dos erros, que são os causadores dos desastres citados acima, chegando assim, a conclusão de como os métodos se comportaram com relação ao erro gerado.

2 Metodologia

2.1 Erro

Neste trabalho, nos limitaremos a considerar o *erro* como a discrepância entre a solução analítica e a solução numérica. Vamos utilizar para determinar esse erro, a seguinte definição:

[Erro relativo à amplitude]: O erro relativo à amplitude, denotado por E_{ra} , é definido como

$$E_{ra} = \frac{|u(t) - y(t)|}{|A|},$$

onde $u(t)$ representa o valor analítico da função no tempo t e $y(t)$ representa o valor numérico da função (aproximação) no tempo t e A é a amplitude máxima do sistema. Este erro será expresso em porcentagem, pois é adimensional.

Inspirado no controle de qualidade 6 sigmas, será utilizado a seguinte metodologia para este trabalho.

O modelo receberá uma das três avaliações:

- Ruim - Se alguma amostra discrepar em mais de $(100 - 68)\%$ da solução analítica;
- Bom - Se todas as amostras da solução numérica discreparem de no máximo $(100 - 68)\%$ da solução analítica, classificado como "qualidade dois sigma";
- Ótimo - Se todas as amostras da solução numérica discreparem de no máximo $(100 - 95)\%$ da solução analítica, classificado como "qualidade quatro sigma";
- Excelente - Se todas as amostras da solução numérica discreparem de no máximo $(100 - 99.7)\%$ da solução analítica, classificado como "qualidade seis sigma".

2.2 Séries de Taylor

Neste trabalho, utilizaremos *truncamentos* da série descrita no Teorema de Taylor — denominados *polinômios de Taylor*, $p(x)$ — para obtermos uma *aproximação* de $f(x)$. De acordo com Guidorizzi [2], o polinômio de Taylor pode ser descrito desta forma:

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \left[\left(\frac{f''(x_0)}{2!} \right) (x - x_0)^2 \right] + \dots + \left[\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right) (x - x_0)^n \right],$$

denomina-se polinômio de Taylor, de ordem n , de f em volta de x_0 .

2.3 equações diferenciais

Equações diferenciais são usadas para modelar fenômenos da natureza De acordo com [1]:

[Equação diferencial]: Uma equação que contém as diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de *equação diferencial*.

Por exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

As equações diferenciais podem ser classificadas de 3 formas: de acordo com o *tipo*, a *ordem* e a *linearidade* [1].

De acordo com o tipo, se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável dependente, ela é chamada de *equação diferencial ordinária*. Exemplo:

$$\frac{dy}{dt} - 5y = 1$$

De acordo com a ordem, se classifica pela ordem da derivada presente na equação, no qual a ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a *ordem da equação*. Exemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x$$

De acordo com a linearidade, uma equação diferencial é chamada de *linear* quando pode ser escrita da seguinte forma :

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} = g(x)$$

observe que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

- A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau: isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1;
- Cada coeficiente depende apenas da variável independente x .

3 Problema do Valor Inicial

De acordo com [1], podemos definir o *Problema de Valor Inicial* desta forma:

Digamos que estamos interessados em resolver uma equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sujeita à condição inicial $y(x_0) = y_0$ em que x_0 é um número no intervalo I e y_0 é um número real arbitrário.

O problema

$$\text{Resolva : } \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$\text{sujeito a : } y(x_0) = y_0$$

é chamado de *problema de valor inicial*. Em termos geométricos, estamos procurando uma solução para a equação diferencial, definida em algum intervalo I tal que o gráfico da solução passe por um ponto (x_0, y_0) determinado *a priori*.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Transformando uma ED de ordem superior em um sistema de ED

Os métodos numéricos que veremos mais a seguir foram desenvolvidos para solucionar EDOs de 1ª ordem. Para resolver de ordens superiores, uma técnica que podemos utilizar é transformá-la em um sistema de EDOs de 1ª ordem.

Conforme sugerido por [5], uma EDO de ordem m ,

$$u^{(m)} = g(t, u, u', u'', \dots, u^{(m-1)}),$$

pode ser reescrita como um sistema de m EDOs de ordem 1. Para isso, utiliza-se a seguinte mudança de variáveis:

$$a(t) = u(t), \quad b(t) = u'(t), \quad c(t) = u''(t), \quad \dots, y_m(t) = u^{(m-1)}$$

Desta forma, o sistema a se resolver será

$$\begin{cases} a' = b \\ b' = c \\ c' = d \\ \vdots \\ y'_m = g(t, a, b, c, \dots, y_m) \end{cases} .$$

Observe que todas as informações sobre a EDO original estão contidas apenas na última equação. Todas as demais são meramente auxiliares. Resolve-se então, simultaneamente, todas as EDOs com os métodos usuais (Método de Euler, Método de Runge-Kutta, etc)

3.1 Como resolver numericamente equações diferenciais

Resolver numericamente um PVI consiste em calcular aproximações para $y = y(x)$ em pontos discretos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ de um intervalo $[a, b]$. Para dividir o intervalo $[a, b]$ em N subintervalos de mesmo comprimento, $N \in \mathbb{N}$, definimos os pontos x_i como

$$x_n = x_0 + n \cdot h$$

com $n = 0, 1, 2, \dots, N$, $x_n = a$ e $x_N = b$; onde $h = \frac{(x_N - x_0)}{N}$. A literatura chama este h de *passo*.

Por exemplo: digamos que queremos dividir o domínio de y , o intervalo $[2, 14]$, em 6 subintervalos de mesmo comprimento.

Neste caso, o passo é dado por

$$h = \frac{(14 - 2)}{6},$$

ou seja, $h = 2$. Portanto o intervalo será discretizado como $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$. As aproximações de y que buscaremos serão as imagens dos pontos deste conjunto.

[6] ilustrou as diferenças entre a solução analítica e numérica no gráfico 1.

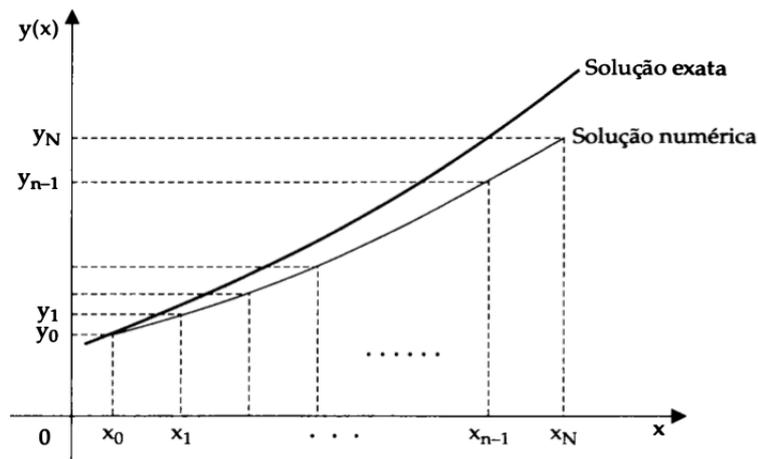


Figure 1. Representação gráfica comparativa entre as duas soluções

Os métodos numéricos que serão apresentados nesta seção foram desenvolvidas para resolver PVI de EDO de primeira ordem [6]. Apesar de inicialmente ilustrarmos o uso apenas com soluções-funções y escalares, estes métodos também podem ser utilizados para determinar soluções y vetoriais. Podemos ainda adaptar estes métodos para determinar soluções de PVI de EDO de ordens superiores.

3.2 Método Euler Ordem 1

Segundo Arenales and Salvador [6], o método de Euler é um método de Taylor de ordem 1. Detalhadamente, o método de Euler consiste em, no primeiro passo, calcular

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

que é a aproximação y_1 da solução exata $y(x_1)$, imagem de x_1 . No segundo passo, calculamos a aproximação de $y(x_2)$, denotada y_2 , como

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

Repetimos este processo quantas vezes forem necessárias. Cobrimos assim, discretamente, o domínio da solução y , o intervalo $[x_0, x_m]$.

3.3 Runge-Kutta Ordem 2

Segundo Arenales and Salvador [6], o método de Runge-Kutta de ordem 2 é dado por:

$$y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2)$$

com

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + ha_2, y_n + h(b_{21}k_1))$$

$$a_2 = b_{21}.$$

Um método bastante conhecido decorre da solução particular do sistema : $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ e $a_2 = 1$, o que fornece o seguinte método:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1), \end{aligned}$$

o qual também é conhecido na literatura como *método de Euler aperfeiçoado*.

3.4 Runge-Kutta Ordem 4

Segundo Arenales and Salvador [6], o método de Runge-Kutta ordem 4 é dado por:

$$y_{n+1} = y_n + h(c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4),$$

onde

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 1 \\ k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + ha_2, y_n + h(b_{21}k_1)) & a_2 &= b_{21} \\ k_3 &= f(x_n + ha_3, y_n + h(b_{31}k_1 + b_{32}k_2)) & a_3 &= b_{31} + b_{32} \\ k_4 &= f(x_n + ha_4, y_n + h(b_{41}k_1 + b_{42}k_2 + b_{43}k_3)) & a_4 &= b_{41} + b_{42} + b_{43}. \end{aligned}$$

Escolhemos uma solução particular, dentre muitas, ficando com a seguinte equação:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h\frac{1}{2}, y_n + h(\frac{1}{2}k_1)) \\ k_3 &= f(x_n + h\frac{1}{2}, y_n + h(0k_1 + \frac{1}{2}k_2)) \\ k_4 &= f(x_n + h1, y_n + h(0k_1 + 0k_2 + 1k_3)). \end{aligned}$$

Este método é conhecido como *método de Runge-Kutta Ordem 4*.

3.5 Representação vetorial do problema

Para utilizarmos os métodos numéricos, é necessário a utilização de uma versão vetorial do problema, que será a seguinte:

$$\begin{cases} a' = b \\ b' = -10b - 10^2a \end{cases},$$

sob as condições iniciais $a(0) = 2$ e $b(0) = 0$, onde a função \vec{f} usada nos métodos sera dada por $\vec{f}(x, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$.

Então: $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Com o vetor \vec{y}_0 definido, podemos prosseguir para o uso dos métodos numéricos e encontrar as soluções numéricas necessárias para criar uma comparação entre os resultados.

4 Modelagem

A modelagem do fenômeno massa-mola será proposta por [3], que demonstra corpo de massa $100g$ que estica uma mola $10cm$. O corpo está preso a um amortecedor viscoso. Considere a aceleração da gravidade como $10^3 cm/s^2$ e suponha que o amortecedor exerce uma força de 10^4 dinas $= 10^4 g \times cm/s^2$ quando a velocidade é $10cm/s$. Se o sistema é puxado para baixo $2cm$ e depois solto, determine a posição u em função do tempo t .

[7] modela a posição do corpo no instante t , $u(t)$, neste fenômeno com a equação diferencial linear de segunda ordem

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F(t), \quad (1)$$

onde m é massa do bloco; γ é a constante de amortecimento e k é constante elástica da mola.

A força de amortecimento aplicada é proporcional à velocidade do corpo, portanto

$$F_d(t) = -\gamma u'(t). \quad (2)$$

Por fim, quando o sistema está em equilíbrio, a força peso e a força restauradora elástica da mola se anulam. Matematicamente,

$$mg - kL = 0, \quad (3)$$

onde g é a aceleração da gravidade e L é a deformidade da mola causada pelo peso do bloco, em unidades de comprimento.

Usando os dados fornecidos no problema e as equações 2 e 3, podemos achar as duas constantes que faltam para obter a equação diferencial que modela nosso problema. A saber,

$$\begin{aligned} k &= \frac{mg}{L} = \frac{100 \times 10^3}{10} & k &= 10^4, \\ \gamma &= \frac{F_d}{u'(t)} = \frac{10^4}{10} & \gamma &= 10^3. \end{aligned}$$

Como não foi dada nenhuma força externa, podemos afirmar que $F(t) = 0$. Com estes valores, a equação diferencial que vai modelar o nosso sistema massa-mola será a seguinte:

$$10^2 u''(t) + 10^3 u'(t) + 10^4 u(t) = 0.$$

Dividindo ambos os termos por 10^2 , a equação pode ser resumida desta forma:

$$u''(t) + 10u'(t) + 10^2 u(t) = 0, \quad (4)$$

onde

- u é a posição do corpo preso à mola, em centímetros;
- t é o tempo, em segundos.

5 Resultados e discussões

5.1 Solução Analítica do PROBLEMA

Para analisar a eficácia da resolução numérica, precisamos primeiro ter em mãos os resultados analíticos da equação diferencial (4).

Equações diferenciais deste tipo podem ser resolvidas, ainda segundo [1], da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\lambda t}, \\ u'(t) &= \lambda e^{\lambda t} \end{aligned}$$

e

$$u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Substituindo na equação (4) e resolvendo, chegamos a solução geral da equação diferencial (4) que é dada por:

$$u(t) = C_1 e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t) + C_2 e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t) \quad (5)$$

O problema apresentado por [3], fornece o seguinte valor inicial para esta equação diferencial:

$$\begin{cases} u(0) = 2 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Com estes dados podemos achar as constantes C_1 e C_2 e, conseqüentemente, determinar a *solução particular*. Chegando a seguinte equação que descreve a função posição do problema:

$$u(t) = 2e^{-5t} \cos(5\sqrt{3}t) + \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-5t} \sin(5\sqrt{3}t). \quad (6)$$

Chegando assim, aos resultados demonstrados de acordo com a 1

Table 1. Resultado analítico do problema

t (s)	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y_{real} (cm)	2,0000	1,3194	0,3011	-0,2487	-0,3062	-0,1492	-0,0046	0,0420	0,0513
t (s)	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
y_{real} (cm)	0,0141	-0,0043	-0,0086	-0,0052	-0,0009	0,0012	0,0013	0,0006	0,0000

5.2 Método de Euler Ordem 1

Neste caso utilizaremos a forma vetorial. A equação será descrita como

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h\vec{f}(x_n, \vec{y}_n), \quad (7)$$

onde $u = y$ e \vec{f} foi descrita anteriormente. A saber,

$$\begin{cases} a' = b \\ b' = -10b - 10^2 a \end{cases},$$

onde $a(t) = u(t)$ e $b(t) = u'(t)$, sujeito à condição inicial $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dividiremos o domínio em subintervalos de iguais comprimento. Seja h este comprimento. Para todos os cálculos numéricos vamos usar o passo $h = 0,1$, ou seja, os pontos serão plotados com diferenças de 0,1 segundos entre eles. Para encontrar \vec{y}_1 , vamos utilizar a equação (7) e desta forma:

$$\vec{y}_1 = \vec{y}_0 + h\vec{f}(x_0, \vec{y}_0)$$

De maneira completamente análoga, podemos obter a posição do corpo nos demais tempos. Utilizamos o *software* gratuito e *open source LibreOffice Calc* para realizar os tediosos cálculos e obtemos a tabela 2.

Table 2. Resultado das iterações do método de Euler ordem 1

t (s)	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y_n (cm)	2,0000	2,0000	0,0000	-2,0000	-2,0000	0,0000	2,0000	2,0000	0,0000
t (s)	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
y_n (cm)	-2,0000	-2,0000	0,0000	2,0000	2,0000	0,0000	-2,0000	-2,0000	0,0000

$t(s)$ representa o tempo de deslocamento da partícula em segundos;

$y_n(cm)$ valor da posição da partícula em centímetros;

n representa o número de passos que foi realizado este método.

5.3 Método de Runge-Kutta ordem 2

Para calcular as aproximações deste método, vamos utilizar o modo vetorial de sua equação original, dada por

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \quad \text{onde } k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$$

Porém, temos que utilizar este método usando vetores para o nosso caso específico, então esta equação ficara da forma

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{h}{2}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \quad (8)$$

Agora podemos fazer os cálculos utilizando a equação (8) para encontrar o y_1 , desta forma, chegamos aos seguintes resultados mostrados na tabela 3:

Table 3. Resultado das iterações do método de Runge-Kutta Ordem 2

t (s)	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y_n (cm)	2,0000	1,0000	0,0000	-0,2500	-0,1250	0,0000	0,0312	0,0156	0,0000
t (s)	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
y_n (cm)	-0,0039	-0,0019	0,0000	0,0005	0,0002	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0000

$t(s)$ representa o tempo de deslocamento da partícula em segundos;

$y_n(cm)$ valor da posição da partícula em centímetros;

n representa o número de passos que foi realizado este método.

5.4 Método de Runge-Kutta ordem 4

Para utilizar este método, devemos fazer o mesmo procedimento que foi realizado com os demais métodos, utilizar em sua equação a notação em forma vetorial para algumas parcelas de sua equação.

Equação vetorizada:

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{h}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4), \quad (9)$$

onde

- $\vec{k}_1 = \vec{f}(x_n, \vec{y}_n)$
- $\vec{k}_2 = \vec{f}(x_n + h\frac{1}{2}, \vec{y}_n + h(\frac{1}{2}\vec{k}_1))$
- $\vec{k}_3 = \vec{f}(x_n + h\frac{1}{2}, \vec{y}_n + h(0\vec{k}_1 + \frac{1}{2}\vec{k}_2))$

- $\vec{k}_4 = \vec{f}(x_n + h, \vec{y}_n + h(0\vec{k}_1 + 0\vec{k}_2 + 1\vec{k}_3))$

Agora que temos a equação (9) formada pelos vetores necessários, podemos prosseguir e encontrar o vetor y_1 que vai nos informar a posição e aceleração no instante $t = 0,1s$ até o momento $t = 1,7s$, obtendo os dados listados na tabela 4.

Table 4. Resultado das iterações do método de Runge-Kutta Ordem 4

t (s)	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y_n (cm)	2,0000	1,3333	0,3264	-0,1163	-0,1756	-0,1002	-0,0276	0,0064	0,0123
t (s)	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
y_n (cm)	0,0075	0,0023	-0,0003	-0,0008	-0,0005	-0,0002	0,0000	0,0001	0,0000

$t(s)$ representa o tempo de deslocamento da partícula em segundos;

$y_n(cm)$ valor da posição da partícula em centímetros;

n representa o número de passos que foi realizado este método.

5.5 Comparação entre os resultados

Agora deve ser realizada as comparações entre os resultados obtidos pela solução analítica (a qual consideramos como a “exata”) e as soluções numéricas (as “aproximadas”) oriundas dos métodos de Euler e de Runge-Kutta de ordem 2 e 4.

Análise da solução numérica obtida pelo método de Euler

Observando a tabela 2, apresentada na página 9, que descreve os resultados obtidos pelo método de Euler ordem 1, com o passo $h = 0.1$, concluímos que esta solução descreve um movimento caracterizado como “perpétuo”, indicando que o corpo viaja entre as posições $2cm$ e $-2cm$ infinitamente. Este comportamento não condiz com o movimento amortecido estudado.

Análise da solução numérica obtida pelo método de Runge-Kutta ordem 2

Para melhorar os resultados, vamos variar os valores de h para chegar a valores ainda mais próximos, chegando aos seguintes resultados com as variações de h sendo iguais a 0.1, 0.05 e 0.025, poderia ter sido utilizada uma variação maior, mas para fins de estudo, foi utilizada somente essas 3.

Table 5. Resultados com relação ao erro relativo a amplitude do método de Runge-Kutta ordem 2

t (s)	$erro_{ra}$ (%)	t (s)	$erro_{ra}$ (%)	t (s)	$erro_{ra}$ (%)
0,0	0.00	0,0	0.00	0,0	0.00
0,1	15.97	0,1	3.47	0,1	0.78
0,2	15.06	0,2	2.58	0,2	0.48
0,3	0.06	0,3	0.71	0,3	0.29
0,4	9.06	0,4	2.53	0,4	0.65
0,5	7.46	0,5	1.99	0,5	0.46
0,6	1.79	0,6	0.49	0,6	0.07
0,7	1.78	0,7	0.55	0,7	0.17
0,8	2.10	0,8	0.70	0,8	0.18
0,9	0.90	0,9	0.36	0,9	0.08
1,0	0.12	1,0	0.01	1,0	0.01
1,1	0.43	1,1	0.16	1,1	0.05
1,2	0.28	1,2	0.13	1,2	0.03
1,3	0.06	1,3	0.04	1,3	0.01
1,4	0.06	1,4	0.02	1,4	0.01
1,5	0.07	1,5	0.03	1,5	0.01
1,6	0.03	1,6	0.02	1,6	0.01
1,7	0.00	1,7	0.00	1,7	0.00

$t(s)$ - representa o tempo de deslocamento da partícula em segundos;

$erro_{ra}(\%)$ - valor da posição da partícula em centímetros.

Onde a primeira tabela referente a tabela 5 representa os valores de $erro_{ra}$ para $h = 0, 1$, a segunda representa os valores de $erro_{ra}$ para $h = 0, 05$ e a terceira represente os valores de $erro_{ra}$ para $h = 0, 025$. A variável h represente o número de passos utilizados nos métodos numéricos de Runge-Kutta ordem 2 e 4.

Análise da solução numérica obtida pelo método de Runge-Kutta ordem 4

Para melhorar os resultados, vamos variar os valores de h para chegar a valores ainda mais próximos, da mesma forma que foi utilizada para o método de Runge-Kutta de ordem 2, chegando aos seguintes resultados com as variações de h sendo iguais a 0.1, 0.05 e 0.025, poderia ter sido utilizada uma variação maior, mas para fins de estudo, foi utilizada somente essas 3.

Table 6. Resultados com relação ao erro relativo a amplitude do método de Runge-Kutta ordem 4

t (s)	$erro_{ra}$ (%)	t (s)	$erro_{ra}$ (%)	t (s)	$erro_{ra}$ (%)
0,0	0.00	0,0	0.00	0,0	0.00
0,1	0.69	0,1	1.30	0,1	0.69
0,2	1.26	0,2	2.24	0,2	1.66
0,3	6.62	0,3	5.22	0,3	2.97
0,4	6.53	0,4	3.97	0,4	1.93
0,5	2.45	0,5	0.78	0,5	0.10
0,6	1.15	0,6	1.40	0,6	0.97
0,7	2.24	0,7	1.69	0,7	0.95
0,8	1.48	0,8	0.88	0,8	0.39
0,9	0.33	0,9	0.02	0,9	0.09
1,0	0.33	1,0	0.37	1,0	0.25
1,1	0.41	1,1	0.33	1,1	0.18
1,2	0.21	1,2	0.13	1,2	0.05
1,3	0.02	1,3	0.03	1,3	0.04
1,4	0.07	1,4	0.07	1,4	0.05
1,5	0.06	1,5	0.05	1,5	0.03
1,6	0.02	1,6	0.01	1,6	0.00
1,7	0.00	1,7	0.01	1,7	0.01

$t(s)$ - representa o tempo de deslocamento da partícula em segundos;

$erro_{ra}(\%)$ - valor da posição da partícula em centímetros.

Onde a primeira tabela referente a tabela 6 representa os valores de $erro_{ra}$ para $h = 0, 1$, a segunda representa os valores de $erro_{ra}$ para $h = 0, 05$ e a terceira represente os valores de $erro_{ra}$ para $h = 0, 025$. A variável h represente o número de passos utilizados nos métodos numéricos de Runge-Kutta ordem 2 e 4.

6 Conclusão

Diante dos resultados obtidos neste trabalho, chegamos a conclusão de que, usando o parâmetro de erro relativo a amplitude, o método de Runge-Kutta ordem 2 é considerado “bom” (qualidade dois sigma) quando o passo é $h = 0.1$ e “ótimo” (quatro sigma) para os passos $h = 0.05$ e $h = 0.025$.

Já o método de Runge-Kutta ordem 4 é considerado “bom” (qualidade dois sigma) para o passo $h = 0.1$ e $h = 0.05$, e “ótimo” (quatro sigma) para o passo $h = 0.025$.

O método de Euler com passo $h = 0.1$ sequer foi submetido ao teste de qualidade, uma vez que foi observado que os resultados demonstraram um movimento perpétuo, incompatível com o esperado de um sistema amortecido.

O método de Runge-Kutta admite, para o mesmo h , erros muito menores que os gerados pelo método de Euler ordem 1. Poderíamos, sim, diminuir o tamanho do passo h de Euler para obter erros menores e talvez passar em algum teste de qualidade. No entanto, computadores não se comportam bem operando números pequenos, podendo gerar erros de arredondamento ou até mesmo erro de *underflow*.

Portanto é preferível utilizar o método de Runge-Kutta em detrimento do método de Euler.

References

- [1] Zill, D. G. & Cullen, M. R., 2001. Equações diferenciais, vol. 1. São Paulo, Makron.
- [2] Guidorizzi, H. L., 2001. *Cálculo, Um Curso*, volume 1. LTC, Rio de Janeiro, 5 edition.
- [3] Teixeira, F. L., 2012. Modelos descritos por equações diferenciais ordinárias.
- [4] Baraniuk, C., 2015. As falhas numéricas que podem causar desastres. http://www.bbc.com/portuguese/noticias/2015/05/150513_vert_fut_bug_digital_ml. BBC Future. Acessado em 24.03.2018.
- [5] Valle, C. E., 2015. Métodos numéricos para sistemas de equações diferenciais e equações de ordem superior. Notas de Aula, Aula 14, curso MS211 - Cálculo Numérico, Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas. Acessado em 04.10.2017.
- [6] Arenales, S. H. d. V. & Salvador, J. A., 2008. *Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software*. Cengage Learning, São Paulo.
- [7] Nóbrega, D. D., 2016. Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações. B.S. thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.