

THREE-DIMENSIONAL COHESIVE CRACK GROWTH MODELLING USING THE BEM

Matheus Rocha

rocha.matheus@usp.br

M.Sc. Student

Dept. of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 13566-590, São Paulo, Brazil

Edson D. Leonel

edleonel@sc.usp.br

Associate Professor

Dept. of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, 13566-590, São Paulo, Brazil

Abstract. The mechanical collapse of several materials is consistently modelled through the fracture mechanics theories. The Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM) is properly utilized when the fracture process zone ahead the crack tip is small in comparison with other structural dimensions. Nevertheless, such zone is not small enough in various material types. Among them, it is worth citing the composites, concrete and ceramics, which are generally classified as quasi-brittle materials. In this case, the fracture process zone may be mechanically represented by the cohesive fracture approach, which leads to the Nonlinear Fracture Mechanics. In the present study, the three-dimensional Boundary Element Formulation (BEM) is coupled to the cohesive crack approach for modelling the nonlinear fracture process of quasi-brittle materials. Moreover, three cohesive crack laws are utilized to represent the residual material resistance at the fracture process zone. The nonlinear problem is solved by either constant or tangent operators. The accuracy of the proposed BEM approach is demonstrated through two applications. The results of the proposed numerical scheme are compared with numerical and experimental responses available in the literature.

Keywords: Boundary Element Method, Cohesive crack approach, Three-dimensional modelling.

1 Introdução

A descrição do comportamento mecânico de estruturas fissuradas requer a utilização de teorias que contemplem adequadamente a presença das descontinuidades materiais, as quais são correntemente denominadas fissuras. Neste contexto, deve-se mencionar a Mecânica da Fratura. A Mecânica da Fratura Elástico Linear (MFEL) é adequadamente aplicada em materiais que possuem zona de processos inelásticos (ZPI) de pequena dimensão, como observado nos materiais frágeis. Entretanto, materiais como concreto e cerâmicas possuem ZPI de dimensão não desprezável. Tais materiais são classificados como quase-frágeis e são adequadamente representados pela mecânica da fratura não linear. O processo de fratura de materiais quase-frágeis pode ser representado pelo modelo coesivo. Este modelo foi proposto por Barenblatt [1] e Dugdale [2], para materiais ducteis. Posteriormente, Hillerborg et al [3] o estenderam para a representação do colapso de materiais quase-frágeis.

Devido à complexidade envolvida na aplicação desta abordagem em estruturas com complexa geometria e condições de contorno, métodos numéricos são imperativos neste domínio. Dentre os métodos numéricos, deve-se mencionar o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). No MEF, a análise numérica tridimensional de sólidos fissurados tem o estudo de Tracey [4] como um dos pioneiros, simulando sólidos com fissuras submetidas a modo I e II pela MFEL. Contudo, o MEF possui algumas limitações para análises mecânicas de sólidos fissurados, tais como a necessidade de uma malha de domínio.

Por outro lado, o MEC é um método alternativo e mais eficiente na solução de problemas da mecânica da fratura. Por não requerer uma malha de domínio, o custo computacional com geração de malha e remalhamento é reduzido. Além disso, os campos mecânicos próximos à ponta da fissura são adequadamente descritos. Destaca-se como um dos primeiros trabalhos com MEC tridimensional para sólidos fraturado o estudo de Cruse e Vanburen [5]. Outra contribuição importante foi a extensão da abordagem dual do MEC para análises tridimensionais, com Mi e Aliabadi [6]. Com isso, foi possível modelar adequadamente a propagação de fissuras aleatórias.

No tocante a estudos com o MEC associado ao modelo coesivo, Saleh e Aliabadi [7] apresentam uma formulação bidimensional para propagação da fissura considerando os efeitos não-lineares. Além disso, Leonel e Venturini [8] propuseram o uso do operador tangente para resolução de problemas da fratura coesiva 2D considerando a propagação da fissura.

Diante desse cenário, este estudo apresenta uma formulação 3D do MEC para a análise do processo de fratura não linear de materiais quase-frágeis. Os operadores constante e tangente são. Destaca-se o aspecto inovador deste trabalho, devido à aplicação das leis coesivas presentes na literatura com uso do MEC em problemas tridimensionais. Assim, o campo de aplicação do MEC 3D para problemas da Mecânica da Fratura é expandido. O caminho de propagação da fissura é previamente discretizado por meio da Técnica de Sub-Regiões. Serão apresentados dois exemplos, em que os resultados obtidos são comparados com respostas analíticas ou experimentais disponíveis na literatura.

2 Aspectos da Mecânica da Fratura

A MFEL contempla um conjunto de teorias que permite a descrição precisa do comportamento mecânico de sólidos fissurados. Tal teoria pressupõe que a ZPI à frente da extremidade da fissura seja pequena em comparação com as demais dimensões da fissura. Com isso, os efeitos não-lineares podem ser desprezados.

Contudo, o processo de fratura de materiais quase-frágeis, como concreto e cerâmicas, e dúcteis, como o aço, não são adequadamente descritos pela MFEL. Isso ocorre porque a ZPI é grande o suficiente de modo que os efeitos não-lineares observados nesta zona não podem ser desprezados são fundamentais para a análise dos campos mecânicos desses materiais. Nesse contexto, o modelo de fissura coesiva é adequado para captar tais aspectos. Esse modelo consiste em considerar os fenômenos de dissipação de energia ocorrendo na fissura fictícia, à frente da fissura real. Desse modo, a dimensão da ZPI é reduzida em uma dimensão, se tornando uma superfície em análises tridimensionais.

O modelo de fissura coesiva adequado para materiais quase-frágeis foi proposto por Hillerborg et al. [3]. Nesse modelo, considera-se a dissipação de energia na ZPI por meio de uma lei de amolecimento

(softening) na fissura fictícia. Desse modo, a resistência residual p_n existente na região degradada se correlaciona com o comprimento de abertura da fissura fictícia Δu , por meio de uma relação denominada lei coesiva. Diversas leis são propostas na literatura para a modelagem numérica do modelo de fissura coesiva. Dentre elas, as leis coesivas linear, bilinear e exponencial são utilizadas na representação desse modelo, levando a resultados satisfatórios. Graficamente, tais leis podem ser ilustradas pela Fig. 1.

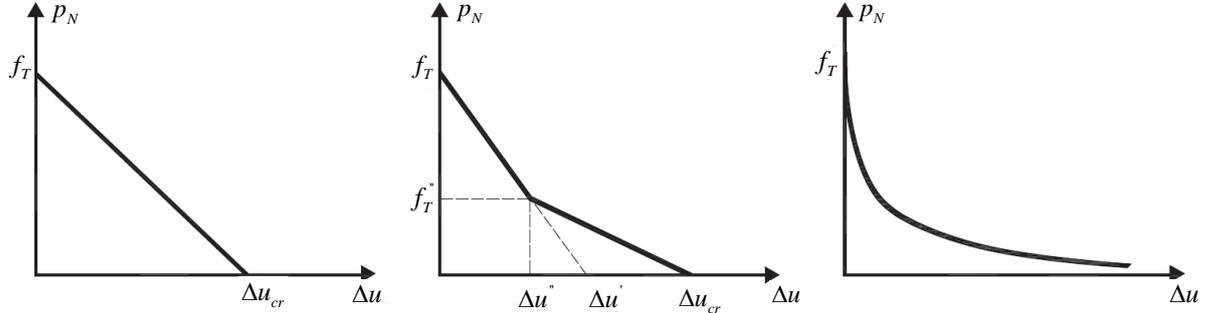


Figura 1. Modelos coesivos linear, bilinear e exponencial

A lei coesiva linear relaciona a tensão residual na ZPI com o correspondente Δu a partir de uma relação linear, conforme Eq. (1).

$$\begin{aligned}
 p_N &= E\varepsilon, \text{ se } \varepsilon \leq \varepsilon_c \\
 p_N(\Delta u) &= f_T \left(1 - \frac{\Delta u}{\Delta u_{cr}} \right), \text{ se } 0 \leq \Delta u \leq \Delta u_{cr} . \\
 p_N(\Delta u) &= 0, \text{ se } \Delta u \geq \Delta u_{cr}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Em que E é o módulo de elasticidade, ε_c é a deformação limite à tração, f_T é tensão limite à tração e Δu_{cr} é a abertura de fissura crítica. Essa abertura é definida como a transição entre fissura fictícia e fissura real.

O modelo coesivo bilinear é definido por uma relação bilinear entre a resistência residual e abertura da fissura coesiva por meio de uma lei com dois trechos lineares decrescentes. Sua expressão é apresentada na Eq. (2).

$$\begin{aligned}
 p_N &= E\varepsilon, \text{ se } \varepsilon \leq \varepsilon_c \\
 p_N(\Delta u) &= f_T - \left(\frac{f_T - f_T''}{\Delta u''} \right) \Delta u, \text{ se } 0 \leq \Delta u \leq \Delta u'' \\
 p_N(\Delta u) &= \frac{f_T'' \Delta u}{\Delta u'' - \Delta u_{cr}} + f_T'' \left(1 - \frac{\Delta u''}{\Delta u'' - \Delta u_{cr}} \right), \text{ se } \Delta u'' \leq \Delta u \leq \Delta u_{cr} . \\
 p_N(\Delta u) &= 0, \text{ se } \Delta u \geq \Delta u_{cr}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Na Eq. (2), $\Delta u''$, f_T'' e Δu_{cr} se relacionam com a energia de fratura G_f de acordo com o estudado por Petersson [9], conforme Eq. (3).

$$\begin{aligned}
 \Delta u'' &= 0,8 \frac{G_f}{f_T} \\
 \Delta u_{cr} &= 3,6 \frac{G_f}{f_T} . \\
 f_T'' &= \frac{f_T}{3}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Por fim, o modelo coesivo exponencial relaciona a resistência residual com a abertura de fissura conforme a Eq. (4).

$$p_N = E\varepsilon, \text{ se } \varepsilon \leq \varepsilon_c$$

$$p_N(\Delta u) = f_T e^{\frac{-f_T \Delta u}{G_f}} \quad (4)$$

3 Método dos Elementos de Contorno

3.1 Solução Fundamental e Equação Integral

Uma das maneiras de se deduzir o MEC é apresentada em Brebbia [10]. Tal proposta faz uso do Método dos Resíduos Ponderados, aplicado sobre o problema de valor de contorno da elasticidade linear, de acordo com a Eq. (5).

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + b_i) w d\Omega = 0. \quad (5)$$

Na Eq. (5), $\sigma_{ji,j}$ representa o gradiente do tensor de tensões, b_i é o vetor de forças de volume e Ω é o domínio do corpo. É escolhida então uma função ponderadora w de modo a minimizar o resíduo. Para o MEC, tal função é a Solução Fundamental de Kelvin [11], em que se considera um meio infinito, tridimensional e isotrópico submetido a um carregamento pontual representado pela função Delta de Dirac. Desse modo, as soluções para deslocamentos U_{ki} e forças de superfície P_{ki} no problema fundamental são representadas pelas Eq. (6) e (7), respectivamente.

$$U_{ki}(\mathbf{x}^f, \mathbf{x}^s) = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,k}r_{,i}]. \quad (6)$$

$$P_{ki}(\mathbf{x}^f, \mathbf{x}^s) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{r_{,j}\eta_j [(1-2\nu)\delta_{ki} + 3r_{,k}r_{,i}] - (1-2\nu)(\eta_i r_{,k} - \eta_k r_{,i})\}. \quad (7)$$

Em que \mathbf{x}^f é o ponto campo, no qual se deseja conhecer os efeitos mecânicos causados pela carga atuante no ponto fonte \mathbf{x}^s . Além disso, r representa a distância entre os pontos fonte e campo, e $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3\}^T$ é o versor normal ao plano do ponto campo. O termo $\boldsymbol{\delta}$ representa o tensor Delta de Kronecker, e G e ν são, respectivamente, Módulo de Elasticidade Transversal e Coeficiente de Poisson.

Assim, a Equação Integral em Deslocamentos (EID), Eq. (8), também conhecida como Identidade Somigliana [12], pode ser obtida a partir de manipulações algébricas sobre as Eqs. (5), (6) e (7). Nesse desenvolvimento, é considerada a relação constitutiva linear isotrópica de Hooke.

$$u_k(\mathbf{x}^s) = \int_{\Gamma} U_{ki}^* p_i(\mathbf{x}^f) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ki}^* u_i(\mathbf{x}^f) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ki}^* b_i(\mathbf{x}^f) d\Omega. \quad (8)$$

Na Eq. (8), u_k é o deslocamento e p_i é a força de superfície. Já b_i é a força de volume atuante. Nos problemas deste estudo, as forças de volume são nulas. Com isso, despreza-se a integral de domínio.

Para determinação das incógnitas do problema elástico, é necessária uma equação em que todos os campos mecânicos são escritos em termos das grandezas do contorno. Assim, é necessário um processo limite em que se considera o contorno tendendo ao ponto fonte para obtenção da Eq. (9).

$$c_{ij}(\mathbf{x}^s) u_j(\mathbf{x}^s) + \int_{\Gamma} P_{ij}^* u_j(\mathbf{x}^f) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^* p_j(\mathbf{x}^f) d\Gamma. \quad (9)$$

Para contornos suaves, ou seja, em que os pontos fontes possuem versores normais definidos, c_{ij} assume valor 1/2. Tal condição, denominada condição de continuidade de Holder, é garantida ao se posicionar \mathbf{x}^s afastado das arestas.

Com o ponto fonte sobre o contorno, surgem singularidades nas integrais da Eq. (9), que necessitam de tratamento especial. O núcleo com a solução P_{ij}^* possui singularidade de ordem $1/r^2$, enquanto que a ordem de singularidade da segunda integral é $1/r$. Com isso, é utilizada uma parametrização em coordenadas polares para a integração numérica, o que elimina a singularidade de ordem $1/r$. Contudo,

a singularidade $1/r^2$ requer, além das coordenadas polares, o uso da integração pelo Valor Principal de Cauchy (VPC). Nesse contexto, as integrais singulares são resolvidas de modo semianalítico enquanto que as demais integrais são resolvidas com a integração numérica de Gauss. O conjunto de técnicas para remoção de singularidade é denominado Método da Subtração de Singularidade, proposto por Guiggiani et al [13].

3.2 Discretização em elementos de contorno

O MEC faz uso da discretização do contorno do sólido em nós e elementos. Com essa discretização, a EID, Eq. (9), pode ser resolvida. Com isso, as informações de geometria do contorno são calculadas de maneira aproximada, a partir dos polinômios de completos de Lagrange, conforme Eq. (10). Neste estudo, o elemento utilizado é o quadrilateral linear, apresentado na Fig. 2.

$$M_i(\xi_1, \xi_2) = c_1^i + c_2^i \xi_1 + c_3^i \xi_2 + c_4^i \xi_1 \xi_2. \tag{10}$$

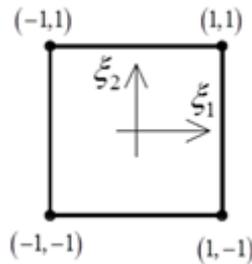


Figura 2. Elemento de contorno quadrilateral linear

Na Eq. (10), as coordenadas adimensionais do elemento de contorno no espaço paramétrico são representadas por ξ_1 e ξ_2 . Além disso, os coeficientes c_k^i são calculados com uso da propriedade de Delta de Kronecker, apresentada a Eq. (11).

$$M_i(\xi_1^j, \xi_2^j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \text{ para } i, j = 1, \dots, 4. \tag{11}$$

Nesse cenário, é possível calcular de maneira aproximada as coordenadas no interior do elemento, com uso da Eq. (12).

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = M_i(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}_i. \tag{12}$$

Em que $\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)$ é o vetor de coordenadas aproximadas no interior do elemento de contorno. Já \mathbf{x}_i é o vetor com as coordenadas dos nós que definem o elemento.

Com a descrição do contorno pelo espaço isoparamétrico, é possível aplicar quadraturas de integração numérica. Nesse panorama, há uma relação entre os diferenciais de superfície do espaço real e do espaço paramétrico, descrita pela Eq. (13).

$$d\Gamma_e = |\mathbf{J}(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2 = J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \tag{13}$$

Na Eq. (13), $|\mathbf{J}(\xi_1, \xi_2)|$ é a norma do vetor jacobiano, ou apenas $J(\xi_1, \xi_2)$. As componentes do vetor jacobiano são calculadas por meio da Eq. (14).

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \\ J_2 &= \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ J_3 &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \end{aligned} \tag{14}$$

Os deslocamentos e forças de superfície também devem ser aproximado. Assim, funções de forma $N_\alpha(\xi_1^j, \xi_2^j)$ análogas às expressas nas Eq. (11) e (12) devem ser utilizadas. Contudo, as funções aproximadoras dos campos mecânicos devem levar em conta o uso dos nós afastados das arestas, necessários para a garantia da condição de continuidade de Holder. Com isso, a Fig. 2 apresenta as

possibilidades associadas aos elementos descontínuos.

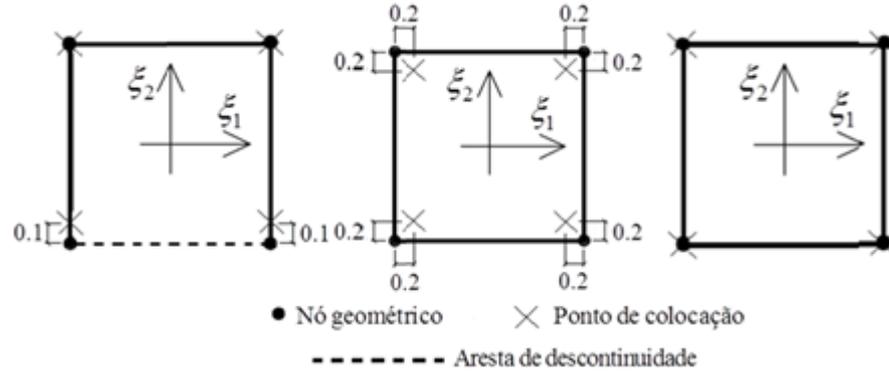


Figura 3. Elementos descontínuos de aresta, descontínuos e contínuos

Assim, as funções de forma associadas aos pontos de colocação $N_\alpha(\xi_1^j, \xi_2^j)$ são calculadas. Em seguida, os deslocamentos e forças de superfície no interior do elemento podem ser aproximados pela Eq. (15).

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi_1, \xi_2) &= N_\alpha(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}_\alpha \\ \mathbf{p}(\xi_1, \xi_2) &= N_\alpha(\xi_1, \xi_2) \mathbf{p}_\alpha \end{aligned} \quad (15)$$

Em que $\mathbf{u}_\alpha = \{u_1^\alpha \quad u_2^\alpha \quad u_3^\alpha\}^T$ e $\mathbf{p}_\alpha = \{p_1^\alpha \quad p_2^\alpha \quad p_3^\alpha\}^T$ são, respectivamente, deslocamentos e forças de superfície dos pontos de colocação.

3.3 Equações algébricas

Uma vez que o contorno do sólido está discretizado, é possível aplicar a EID, Eq. (9). Assim, os pontos fontes são posicionados sobre os pontos de colocação, e os campos mecânicos utilizados no sistema linear são os deslocamentos e forças de superfície destes pontos. Assim, as Eq. (13) e (15) são substituídas na Eq. (9), obtendo-se a Eq. (16).

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{ij}}{2} \mathbf{u}_j(\mathbf{x}^s) + \left[\sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} \mathbf{P}_{ij}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_\alpha^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] \mathbf{u}_j \\ = \left[\sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} \mathbf{U}_{ij}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_\alpha^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] \mathbf{p}_j \end{aligned} \quad (16)$$

Na Eq. (16), NE é o número de elementos de contorno presentes na discretização do sólido. As integrais são calculadas por meio de integração numérica no espaço paramétrico. As quadraturas utilizadas são cartesianas, para integrações não-singulares, e cartesianas, para integrais singulares. Ressalta-se que para a ordem de singularidade $1/r^2$ é utilizado o VPC.

A Eq. (16) é utilizada para cada ponto de colocação existente. Assim, o sistema algébrico do MEC é obtido, conforme a Eq. (17).

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \mathbf{p}_j \quad (17)$$

Na Eq. (17), \mathbf{u}_j e \mathbf{p}_j são os campos mecânicos do ponto de colocação j , com $\mathbf{u}^j = \{u_1^j \quad u_2^j \quad u_3^j\}^T$ e $\mathbf{p}^j = \{p_1^j \quad p_2^j \quad p_3^j\}^T$ sendo os deslocamentos e forças de superfície. N representa o número de pontos de colocação utilizados. A obtenção das matrizes de influência \mathbf{H}_{ij} e \mathbf{G}_{ij} é efetuada conforme as Eqs. (18) e (19), respectivamente.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ij} &= \sum_{j \in \Gamma_e} \int \mathbf{P}_i^* N_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \frac{\mathbf{I}}{2}, \text{ se } i = j \\ \mathbf{H}_{ij} &= \sum_{j \in \Gamma_e} \int \mathbf{P}_i^* N_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \text{ se } i \neq j \end{aligned} \quad (18)$$

$$\mathbf{G}_{ij} = \sum_{j \in e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N}_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) \mathbf{J}^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (19)$$

As matrizes \mathbf{U}_i^* e \mathbf{P}_i^* são associadas às soluções fundamentais para deslocamentos e forças de superfície, conforme Eq. (6) e (7), respectivamente, e são determinadas com as Eqs. (20) e (21).

$$\mathbf{U}_i^* = \begin{bmatrix} U_{11}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{12}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{13}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ U_{21}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{22}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{23}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ U_{31}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{32}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{33}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

$$\mathbf{P}_i^* = \begin{bmatrix} P_{11}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{12}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{13}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ P_{21}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{22}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{23}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ P_{31}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{32}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{33}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

O ponto campo utilizado nas Eqs. (20) e (21) é o ponto de integração, obtido a partir das quadraturas adotadas. O sistema obtido com a Eq. (17) deve ser rearranjado com base nas grandezas incógnitas e conhecidas, a partir da troca das colunas. Assim, é obtida a Eq. (22).

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (22)$$

Em que \mathbf{A} é a matriz com as colunas das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} associadas às grandezas incógnitas. O vetor \mathbf{b} é obtido com o produto das colunas de \mathbf{H} e \mathbf{G} pelas condições de contorno prescritas. A solução do sistema linear da Eq. (22) conduz aos campos mecânicos incógnitos.

3.4 Técnica de Sub-Regiões

É possível analisar domínios não-homogêneos conectados por interfaces pelo MEC, com uso da Técnica de Sub-Regiões. Nesta estratégia, as matrizes de influência de cada domínio são determinadas, e o acoplamento entre os subdomínios é efetuado pela imposição do equilíbrio de forças na interface e da continuidade dos deslocamentos.

Assim, são calculadas as matrizes de influência para cada sub-região de um sólido com N_{SR} sub-regiões, a partir da Eq. (17). Dessa forma, obtém-se a Eq. (23). Tais sub-regiões não se correlacionam inicialmente, o que, matematicamente, é explicitado pelas matrizes de zeros no sistema resultante.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{H}^{N_{SR}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{N_{SR}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}^{N_{SR}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^1 \\ \mathbf{p}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}^{N_{SR}} \end{Bmatrix}. \quad (23)$$

As condições de acoplamento entre os subdomínios requerem a organização dos campos mecânicos da Eq. (23) em dois grupos: grandezas do contorno externo e grandezas pertencentes à interface Γ^+ e Γ^- . Com isso, a Eq. (24) é obtida.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^C & \mathbf{H}^+ & \mathbf{H}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^C & \mathbf{G}^+ & \mathbf{G}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^c \\ \mathbf{p}^+ \\ \mathbf{p}^- \end{Bmatrix}. \quad (24)$$

Em que \mathbf{u}^c e \mathbf{p}^c são os deslocamentos e forças de superfície do contorno externo. \mathbf{u}^+ , \mathbf{u}^- , \mathbf{p}^+ e \mathbf{p}^- são os campos mecânicos das interfaces. Desse modo as condições de continuidade e equilíbrio de forças, apresentadas na Eq. (25), podem ser aplicadas, resultando na Eq. (26).

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^+ &= \mathbf{u}^- \\ \mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^- &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^C & (\mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^+ \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^C & (\mathbf{G}^+ - \mathbf{G}^-) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^c \\ \mathbf{p}^+ \end{Bmatrix}. \quad (26)$$

Por fim, para cálculo dos campos mecânicos incógnitos, é necessário aplicar a operação de troca de colunas sobre a Eq. (26), analogamente ao exposto no item 3.3.

4 Abordagem não-linear da fratura coesiva

4.1 Sistema algébrico

O modelo coesivo é aplicado neste estudo associado à Técnica de Sub-Regiões. Embora não sejam estudados materiais distintos acoplados, esta abordagem é utilizada de modo a prescrever o caminho de propagação da fissura sobre a interface. Além disso, as condições de degradação mecânica da ZPI são aplicadas ao acoplamento entre os dois subdomínios. Assim, é necessário conhecer o caminho de propagação da fissura para que seja possível a resolução do problema estudado.

Uma vez que o modelo coesivo relaciona as forças de superfície normais com a correspondente abertura de fissura, é necessário aplicar uma mudança de eixos coordenados dos campos mecânicos sobre a interface. Nesse contexto, considera-se o sistema local de coordenadas definido pela base de versores ortonormais η , t e l , para os lados direito e esquerdo da interface, conforme Fig. 4. Já os versores são determinados a partir da Eq. (27).

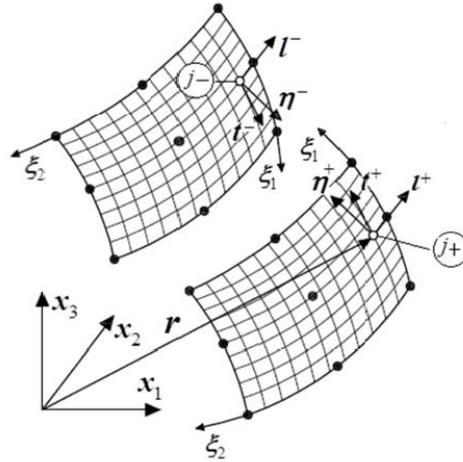


Figura 4. Sistema de coordenadas local para as faces da fissura

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|}, \text{ com } \bar{\eta} = \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \\ t &= \frac{\bar{t}}{\|\bar{t}\|}, \text{ com } \bar{t} = \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \\ l &= \frac{\bar{l}}{\|\bar{l}\|}, \text{ com } \bar{l} = \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \end{aligned} \quad (27)$$

Assim, os deslocamentos e forças de superfície são escritos em coordenadas locais conforme Eq. (28).

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_d^f &= \mathbf{R}_d \mathbf{u}^+ & \mathbf{p}_d^f &= \mathbf{R}_d \mathbf{p}^+ \\ \mathbf{u}_e^f &= \mathbf{R}_e \mathbf{u}^- & \mathbf{p}_e^f &= \mathbf{R}_e \mathbf{p}^- \end{aligned} \quad (28)$$

Em que \mathbf{R} é a matriz de rotação, definida na Eq. (29), escrita a partir dos versores ortonormais que definem o sistema local. \mathbf{u}_d^f , \mathbf{u}_d^f , \mathbf{u}_d^f e \mathbf{u}_d^f são os deslocamentos e forças de superfície escritos em relação ao eixo local, em que, por exemplo, $\mathbf{u}_d^f = \{u_{d\eta}^f \quad u_{dt}^f \quad u_{dl}^f\}^T$.

$$\mathbf{R}_{d/e} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix}^{d/e}. \quad (29)$$

Assim, a Eq. (24) é adaptada de modo a escrever as grandezas mecânicas em relação ao contorno externo (c) e às faces esquerda (e) e direita (d) do caminho de propagação da fissura, de acordo com a Eq. (30).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^c & \mathbf{H}_d^f & \mathbf{H}_e^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}_d^f \\ \mathbf{u}_e^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^c & \mathbf{G}_d^f & \mathbf{G}_e^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^c \\ \mathbf{p}_d^f \\ \mathbf{p}_e^f \end{Bmatrix}. \quad (30)$$

Em que as matrizes locais de influência são obtidas a partir do produto entre a matriz inversa de rotação e a matriz de influência no sistema local. O sistema pode também ser escrito estendendo as grandezas em relação aos eixos locais entre normal e tangenciais, conforme Eq. (31).

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}^c \mathbf{u}^c + \mathbf{H}_{d\eta}^f \mathbf{u}_{d\eta}^f + \mathbf{H}_{dt}^f \mathbf{u}_{dt}^f + \mathbf{H}_{dl}^f \mathbf{u}_{dl}^f + \mathbf{H}_{e\eta}^f \mathbf{u}_{e\eta}^f + \mathbf{H}_{et}^f \mathbf{u}_{et}^f + \mathbf{H}_{el}^f \mathbf{u}_{el}^f = \\ & \mathbf{G}^c \mathbf{p}^c + \mathbf{G}_{d\eta}^f \mathbf{p}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{dt}^f \mathbf{p}_{dt}^f + \mathbf{G}_{dl}^f \mathbf{p}_{dl}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f \mathbf{p}_{e\eta}^f + \mathbf{G}_{et}^f \mathbf{p}_{et}^f + \mathbf{G}_{el}^f \mathbf{p}_{el}^f \end{aligned} \quad (31)$$

Com isso, é possível prescrever a correlação entre as componentes de abertura de fissura normal *COD* (*crack opening displacement*), de deslizamento *CSD* (*crack sliding displacement*) e de rasgamento *CTD* (*crack tearing displacement*), apresentadas na Eq. (32).

$$\begin{aligned} COD &= -u_{e\eta}^f - u_{d\eta}^f \\ CSD &= u_{dl}^f - u_{el}^f \\ CTD &= u_{dt}^f + u_{et}^f \end{aligned} \quad (32)$$

Desse modo, quando *COD*, *CSD* e *CTD* são nulos, a fissura permanece fechada e não há propagação. Entretanto, se a força de superfície normal exceder a resistência a tração do material, o modelo coesivo deve ser considerado e a tensão atuante normal deve ser corrigida. Nesse contexto, a tensão normal se relaciona com a tensão excedente conforme a Eq. (33).

$$\begin{aligned} p_\eta &= p_\eta(COD) + \Delta p_\eta^{exc} \\ p_l &= 0 \\ p_t &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Assim, ao substituir as condições apresentadas nas Eqs. (32) e (33) na Eq. (31), obtém-se o sistema não-linear que considera o comportamento coesivo, conforme Eq. (34).

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}^c \mathbf{u}^c + (\mathbf{H}_{d\eta}^f - \mathbf{H}_{e\eta}^f) \mathbf{u}_{d\eta}^f + (\mathbf{H}_{dt}^f + \mathbf{H}_{et}^f) \mathbf{u}_{dt}^f + (\mathbf{H}_{dl}^f - \mathbf{H}_{el}^f) \mathbf{u}_{dl}^f \\ & - \mathbf{H}_{e\eta}^f COD - \mathbf{H}_{el}^f CSD + \mathbf{H}_{et}^f CTD = \\ & \mathbf{G}^c \mathbf{p}^c + \mathbf{G}_{d\eta}^f \mathbf{p}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{dl}^f \mathbf{p}_{dl}^f + \mathbf{G}_{et}^f \mathbf{p}_{et}^f + \mathbf{G}_{el}^f \mathbf{p}_{el}^f + (\mathbf{G}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f) (p_\eta(COD) + \Delta p_\eta^{exc}) \end{aligned} \quad (34)$$

Por fim, a lei coesiva é incluída no termo $p_\eta(COD)$. Com isso, há uma relação de dependência entre duas incógnitas do sistema, o que gera um sistema não-linear. Para resolvê-lo, este estudo utiliza duas técnicas: Operador Constante (OC) e Operador Tangente (OT).

4.2 Operador Constante

A solução da Eq. (34) pode ser obtida a partir da aplicação do excedente de tensão na interface, de modo iterativo, até que seja atingida a posição de equilíbrio conforme a lei coesiva, ou seja, $\Delta p_\eta^{exc} = 0$. Para tanto, o Operador Constante, como o próprio nome informa, não introduz alterações nas matrizes de influência do MEC. Assim, a reaplicação do excedente de força normal ocorre nas condições de contorno em forças de superfície. Nesse contexto, durante a reaplicação do excedente de tensão, todas as variações nos valores das condições de contorno externas tornam-se nulas. Desse modo, as forças aplicadas promovem a abertura da fissura. O procedimento é ilustrado pela Fig. 5.

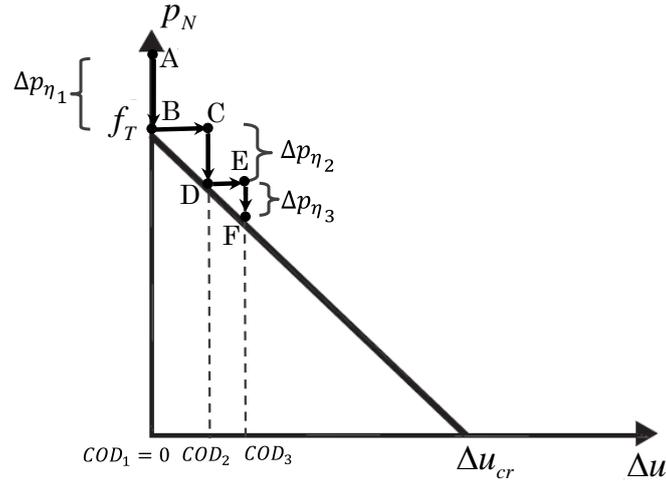


Figura 5. Interpretação do Operador Constante

Na Fig. 5, tem-se a interpretação do OC considerando a lei coesiva linear. Nesse cenário, assume-se uma etapa incremental tal que a força de superfície normal de tração supera a tensão elástica f_T em valor Δp_{η_1} (ponto A). Assim, esse excedente é reaplicado na estrutura, causando a abertura da fissura correspondente até o valor COD_2 (reta BC). Assim, avalia-se que ainda há um excedente de tensão, de valor Δp_{η_2} , que é reaplicado na estrutura de modo a abrir a fissura até o valor COD_3 (reta DE). Novamente, calcula-se o excedente de tensão e o procedimento é repetido, até que Δp_{η_k} seja inferior à tolerância estabelecida. Nesse ponto, é atingida a convergência do operador. Além disso, a resposta de equilíbrio da estrutura é dada pela soma dos campos mecânicos da etapa de previsão elástica e de todas as correções efetuadas.

Uma vez que o OC é aplicado simultaneamente a todos os nós da interface coesiva, é necessário estabelecer um critério de parada único. Assim, a convergência é atingida quando a norma do vetor de forças excedente atinge um valor inferior à tolerância adotada.

4.3 Operador Tangente

A resolução do problema não-linear via Operador Tangente (OT) consiste em escrever uma função resíduo para o problema. Assim, o resíduo $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ é escrito de acordo com a Eq. (35).

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{X}) = & \mathbf{H}^c \mathbf{u}^c + (\mathbf{H}_{d\eta}^f - \mathbf{H}_{e\eta}^f) \mathbf{u}_{d\eta}^f + (\mathbf{H}_{dl}^f + \mathbf{H}_{el}^f) \mathbf{u}_{dl}^f + (\mathbf{H}_{dt}^f - \mathbf{H}_{et}^f) \mathbf{u}_{dt}^f \\ & - \mathbf{H}_{e\eta}^f COD - \mathbf{H}_{el}^f CSD + \mathbf{H}_{et}^f CTD - \\ & \mathbf{G}^c \mathbf{p}^c - \mathbf{G}_{dt}^f \mathbf{p}_{dt}^f - \mathbf{G}_{dl}^f \mathbf{p}_{dl}^f - \mathbf{G}_{et}^f \mathbf{p}_{et}^f - \mathbf{G}_{el}^f \mathbf{p}_{dl}^f - (\mathbf{G}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f) (\mathbf{p}_\eta(COD) + \Delta \mathbf{p}_\eta^{exc}) \end{aligned} \quad (35)$$

Em que \mathbf{X} é o conjunto de variáveis que definem o erro. Para o estado de equilíbrio, tem-se $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ nulo quando $\Delta \mathbf{p}_\eta^{exc}$ é nulo. Assim, a partir da etapa de previsão elástica, surge $\Delta \mathbf{p}_\eta^{exc}$. Com isso, busca-se qual incremento $\Delta \mathbf{X}$ nos campos mecânicos deve ser aplicado de modo que $\mathbf{R}(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X})$ permaneça nulo diante da atuação de $\Delta \mathbf{p}_\eta^{exc}$. Desse modo, considerando a função resíduo contínua, é efetuada uma expansão em Série de Taylor em torno de \mathbf{X} , conforme Eq. (36).

$$\mathbf{R}(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}) \cong \mathbf{R}(\mathbf{X}) + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X} = 0. \quad (36)$$

Como $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ é nulo, a segunda parcela da expansão deve ser nula. Assim, é efetuada a derivação em relação a cada uma das variáveis do sistema, obtendo-se a Eq. (37).

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{H}^c \Delta \mathbf{u}^c + (\mathbf{H}_{d\eta}^f - \mathbf{H}_{e\eta}^f) \Delta \mathbf{u}_{d\eta}^f + (\mathbf{H}_{dl}^f + \mathbf{H}_{el}^f) \Delta \mathbf{u}_{dl}^f + (\mathbf{H}_{dt}^f - \mathbf{H}_{et}^f) \Delta \mathbf{u}_{dt}^f \\
 & - \left(\mathbf{H}_{e\eta}^f - (\mathbf{G}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f) \frac{\partial p_\eta}{\partial COD} \right) \Delta COD - \mathbf{H}_{el}^f \Delta CSD + \mathbf{H}_{et}^f \Delta CTD = \quad . \quad (37) \\
 & \mathbf{G}^c \Delta \mathbf{p}^c + \mathbf{G}_{dt}^f \Delta \mathbf{p}_{dt}^f + \mathbf{G}_{dl}^f \Delta \mathbf{p}_{dl}^f + \mathbf{G}_{et}^f \Delta \mathbf{p}_{et}^f + \mathbf{G}_{el}^f \Delta \mathbf{p}_{dl}^f + (\mathbf{G}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f) (\Delta \mathbf{p}_\eta^{exc})
 \end{aligned}$$

Destaca-se a presença do termo $\frac{\partial p_\eta}{\partial COD}$, que é a derivada da lei coesiva adotada. Desse modo, o OT incorpora as características de degradação da ZPI na busca pela posição de equilíbrio. A Eq. (37) é um sistema linear, cujo resultado é o campo de deslocamentos associado à posição de equilíbrio do corpo considerando a força excedente $\Delta \mathbf{p}_\eta^{exc}$ reaplicada. Com isso, é necessário aplicar o campo de deslocamentos obtidos pelo OT no sistema de equações utilizado pelo OC para determinar as forças de superfície da etapa de correção. Assim, os campos mecânicos resultantes, tal qual ocorre no OC, são o somatório entre as etapas de previsão e correção adotadas. O procedimento é ilustrado pela Fig. 6.

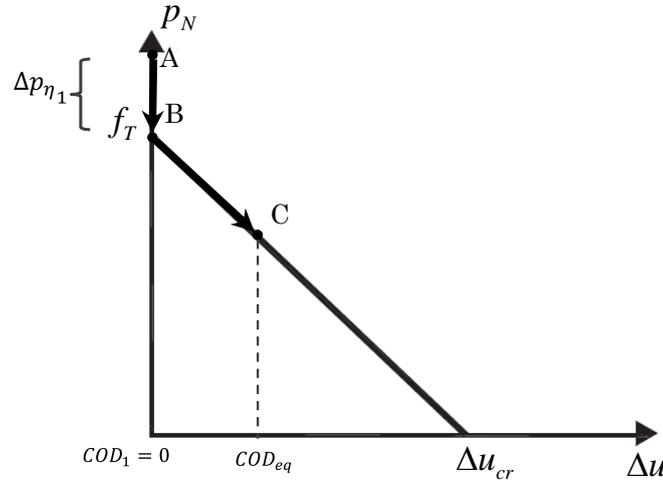


Figura 6. Interpretação do Operador Tangente

Na Fig. 6 é apresentada a interpretação geométrica do OT para a lei coesiva linear. Assume-se uma previsão elástica tal que o ponto A é atingido. Com isso, há o excedente de tensão Δp_{η_1} , que deve ser reaplicado. Tal excedente é aplicado na expressão do OT, em que se determina a abertura correspondente ao equilíbrio COD_{eq} (reta BC). Com a resposta do operador tangente, determina-se o campo de forças de superfície do problema, por meio da imposição dos deslocamentos calculados pelo OT no sistema algébrico do MEC.

Uma vez que o OT faz uso da tangente da lei coesiva na busca do equilíbrio, ele tende a ser numericamente mais eficiente, por requerer um número reduzido de iterações para cada incremento. O critério de parada utilizado é igual ao OC, medido a partir da norma do vetor de forças desequilibradas.

5 Exemplos Numéricos

A verificação da precisão da formulação apresentada é efetuada a partir de dois exemplos numéricos. O primeiro exemplo consiste num sólido submetido a tração pura. Assim, a solução obtida pelo MEC é confrontada com uma resposta analítica. Já o segundo exemplo representa o ensaio de flexão em três pontos em um corpo de prova de concreto simples. Seus resultados são confrontados com respostas obtidas pelo MEC Dual 2D, conforme Leonel e Venturini [8] e os dados experimentais de Saleh e Aliabadi [7].

5.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo trata da análise da fratura de um sólido submetido à tração uniforme na face da direita. A condição de contorno aplicada em deslocamento prescrito, de valor $2.10^{-2}m$, é aplicada em 100 passos. A geometria e condições de contorno deste exemplo são ilustradas na Fig. 7, assim como a interface coesiva, demarcada com hachura.

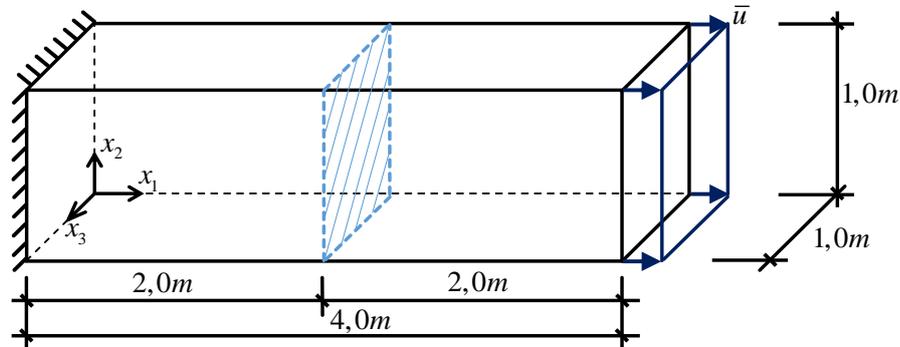


Figura 7. Geometria e condições de contorno do exemplo 1

Os parâmetros do material são: Módulo de Elasticidade Longitudinal $E = 30.10^6 kPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,0$, resistência à tração $f_T = 3000 kPa$ e energia de fratura $G_f = 15,0 kN/m$. A malha utilizada possui 108 pontos de colocação e 48 elementos de contorno quadrilaterais de aproximação linear, sendo ilustrada na Fig. 8. A malha utilizada leva a resultados precisos, uma vez que a variação dos campos mecânicos ao longo do comprimento da estrutura é linear. Por isso, não foi necessária uma análise de convergência.

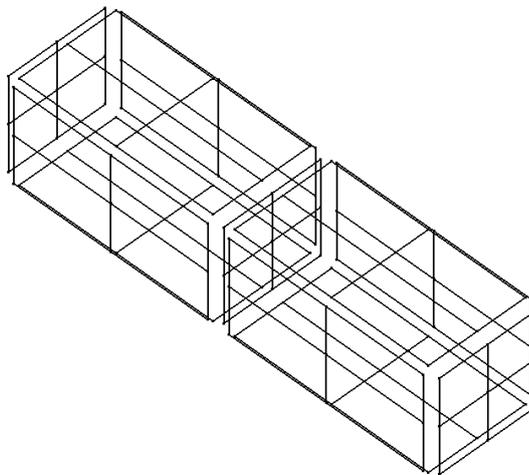


Figura 8. Malha utilizada para exemplo 1

O comportamento coesivo é modelado por meio de três leis coesivas: linear, bilinear e exponencial. As análises são efetuadas com os dois operadores, e a tolerância estabelecida para a norma do vetor de forças desequilibrado é de 1kPa. Com isso, a Fig. 9 apresenta o gráfico de força de superfície no ponto central da interface coesiva *versus* deslocamento aplicado.

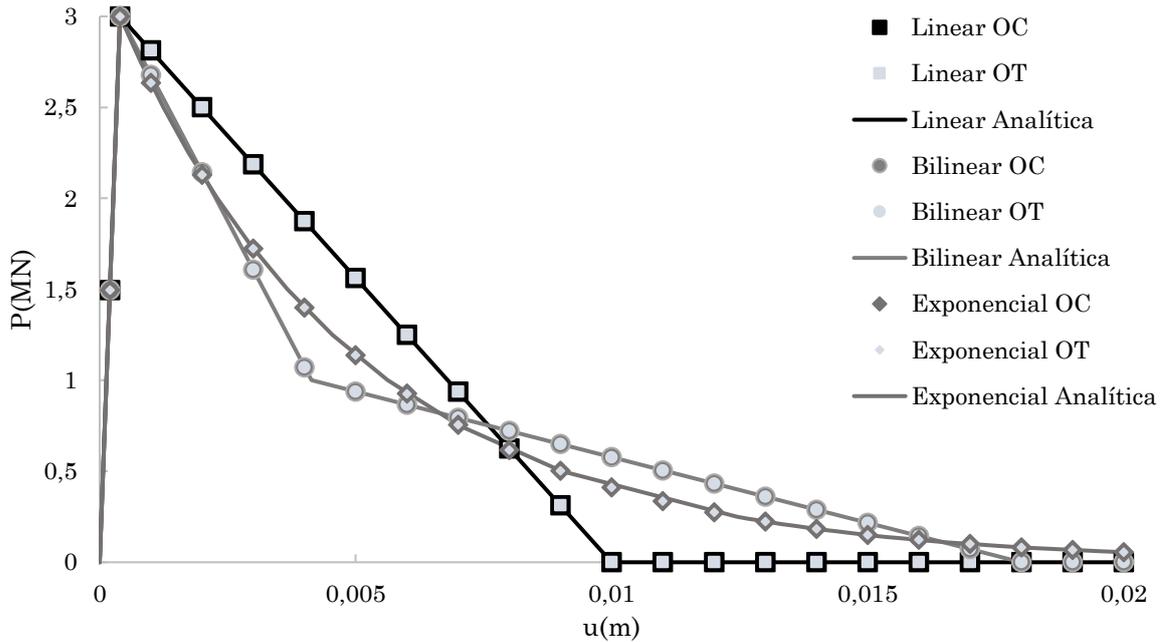


Figura 9. Resultados obtidos para exemplo 1

Os resultados apresentados na Fig. 9 comprovam a precisão das formulações implementadas para análise do comportamento coesivo. Destaca-se que os dois operadores obtiveram respostas muito próximas em cada passo, diferindo em no máximo 0,02%. Deve-se salientar que o comportamento de colapso é adequadamente representado pelo MEC. Quando as forças coesivas se tornam nulas na interface, um movimento de corpo rígido é observado. A formulação implementada foi capaz de representar adequadamente este fenômeno. De modo a ilustrá-lo, é apresentado na Fig. 10 o resultado da aplicação da totalidade do deslocamento prescrito considerando a lei coesiva linear.

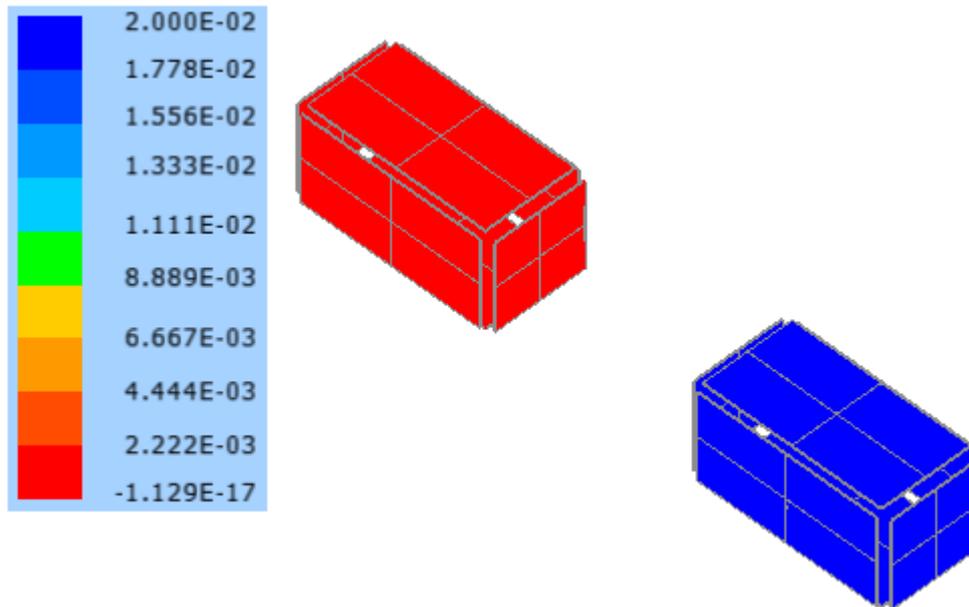


Figura 10. Deslocamentos orientados na direção x_1 , lei coesiva linear

A Fig. 11 ilustra a quantidade necessária de iterações necessárias por cada tipo de operador para atingir a convergência.

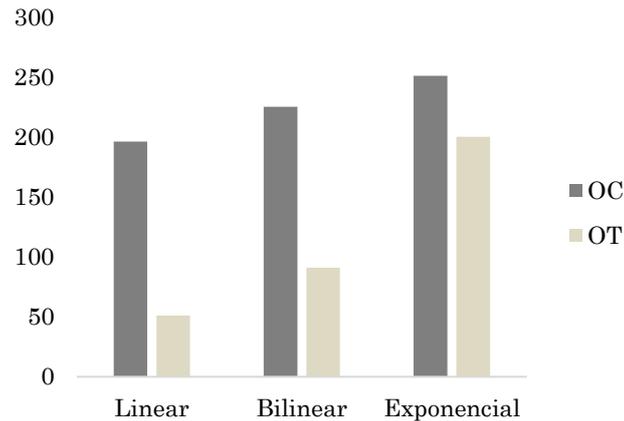


Figura 11. Comparação do número de iterações para cada operador

Com base nos resultados da Fig. 11, é possível constatar a maior diferença entre o número de iterações para a lei coesiva linear, sendo que o OT utiliza 26% do número de iterações do OC. Para a lei coesiva bilinear, o operador tangente utiliza 40% do número de iterações do OC. Por fim, para a lei coesiva exponencial, o OT utiliza 80% do total utilizado no OC. Portanto, em todas as leis coesivas utilizadas, o número de iterações do OT é menor que o do OC, o que indica a maior eficiência deste tipo de operador na busca pela configuração de equilíbrio.

5.2 Exemplo 2

O segundo exemplo deste estudo trata da análise da fratura de uma viga de concreto simples submetida ao ensaio de flexão em três pontos. A geometria e condições de contorno deste exemplo são apresentadas na Fig. 12. É importante destacar que as condições de contorno aplicadas são exclusivamente em deslocamentos, por meio de enriquecimentos concentrados. Desse modo, são aplicados os apoios ao longo das linhas indicadas, um em cada elemento que a linha passa. Os apoios fixos são aplicados a $5 \cdot 10^{-4} m$ das extremidades da viga. O deslocamento prescrito é aplicado em 24 passos de carga, com valor final de $2 \cdot 10^{-4} m$, à uma distância de $1 \cdot 10^{-4} m$ da interface coesiva, na face superior, nos dois subdomínios adotados para a análise.

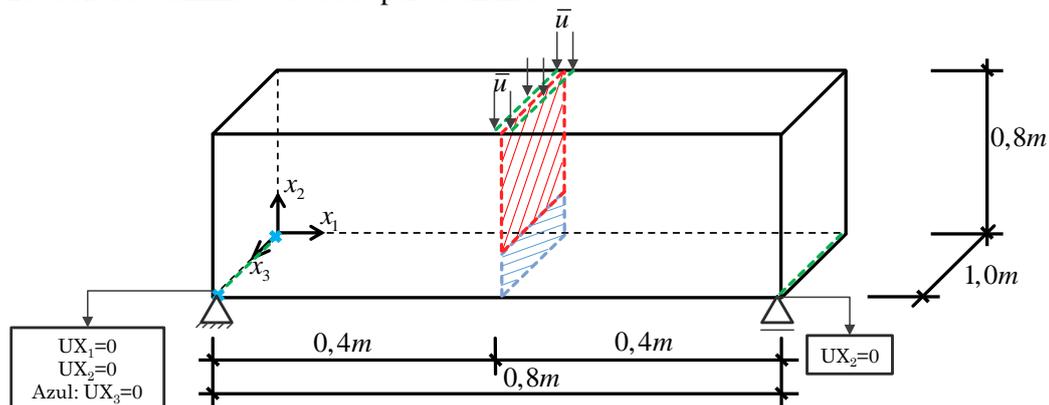


Figura 12. Geometria e condições de contorno do exemplo 2

A interface coesiva é indicada na Fig. 12 pela face hachurada em vermelho. A face hachurada em azul é o entalhe inicial, de comprimento $0,05m$ na direção x_2 . Os parâmetros de material utilizados são: Módulo de Elasticidade Longitudinal $E = 30 \cdot 10^6 kPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,15$, resistência à tração $f_T = 3000 kPa$ e energia de fratura $G_f = 75,0 N/m$. A malha adotada para a análise deste exemplo é mostrada na Fig. 13. São utilizados 8541 pontos de colocação e 7700 elementos de contorno quadriláteros de aproximação linear. Tal escolha foi efetuada após uma análise prévia de convergência dos resultados. Este exemplo foi analisado numericamente por Leonel e Venturini [8] a partir de modelos

bidimensionais, considerando análises planas de tensão.

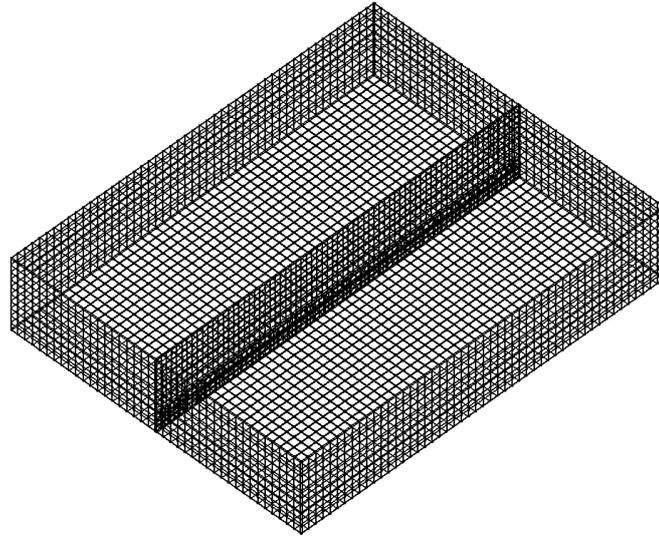


Figura 13. Malha adotada para exemplo 2

O comportamento coesivo do concreto é considerado a partir das leis coesivas linear, bilinear e exponencial, com o OC e OT. Para as duas estratégias de resolução do sistema não-linear, a tolerância estabelecida sobre a norma do vetor de forças desequilibrado é de 1kPa.

O campo de deslocamentos orientados na direção x_2 para o deslocamento prescrito de $2 \cdot 10^{-4} m$, considerando lei coesiva exponencial e OT, é apresentado na Fig. 14.

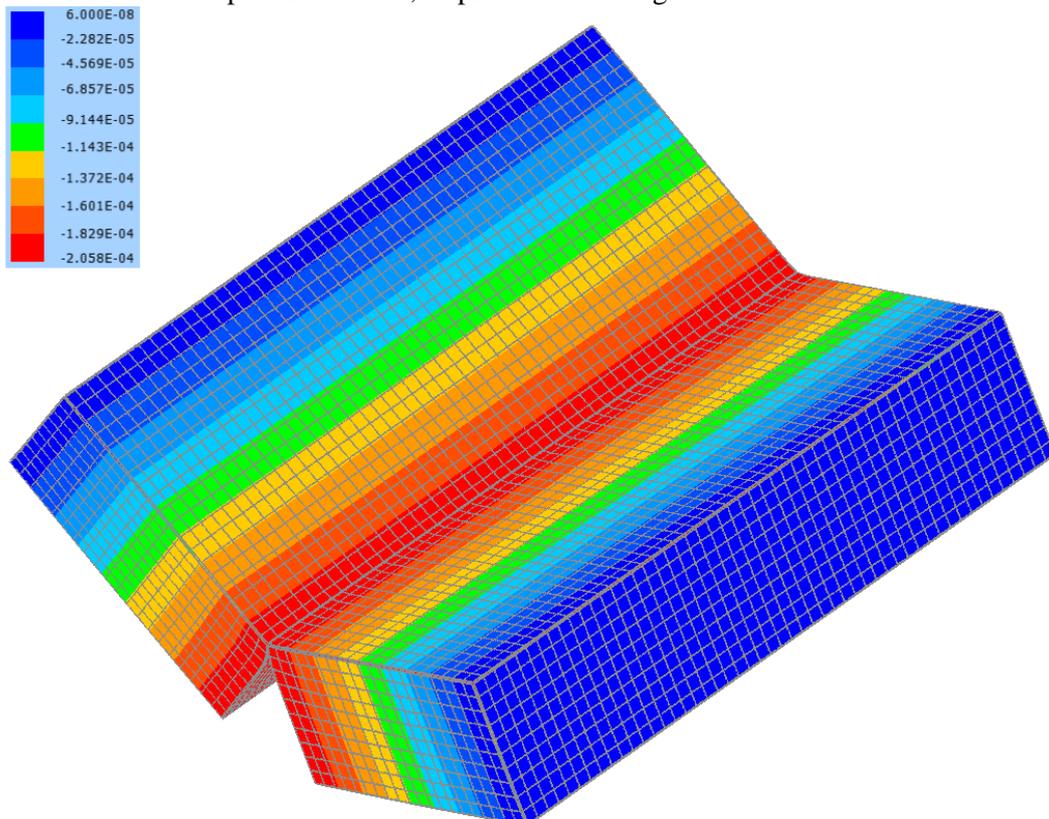


Figura 14. Deslocamentos orientados na direção x_2 do exemplo 2, lei coesiva exponencial e OT

Além disso, é efetuada a análise do deslocamento prescrito aplicado com o somatório das forças associadas. Os resultados apontados como “Dual” foram obtidos pelo MECD bidimensional por Leonel e Venturini [8], enquanto que as medições experimentais foram apresentadas em Saleh e Aliabadi [7].

Tal comparação é mostrada na Fig. 15.

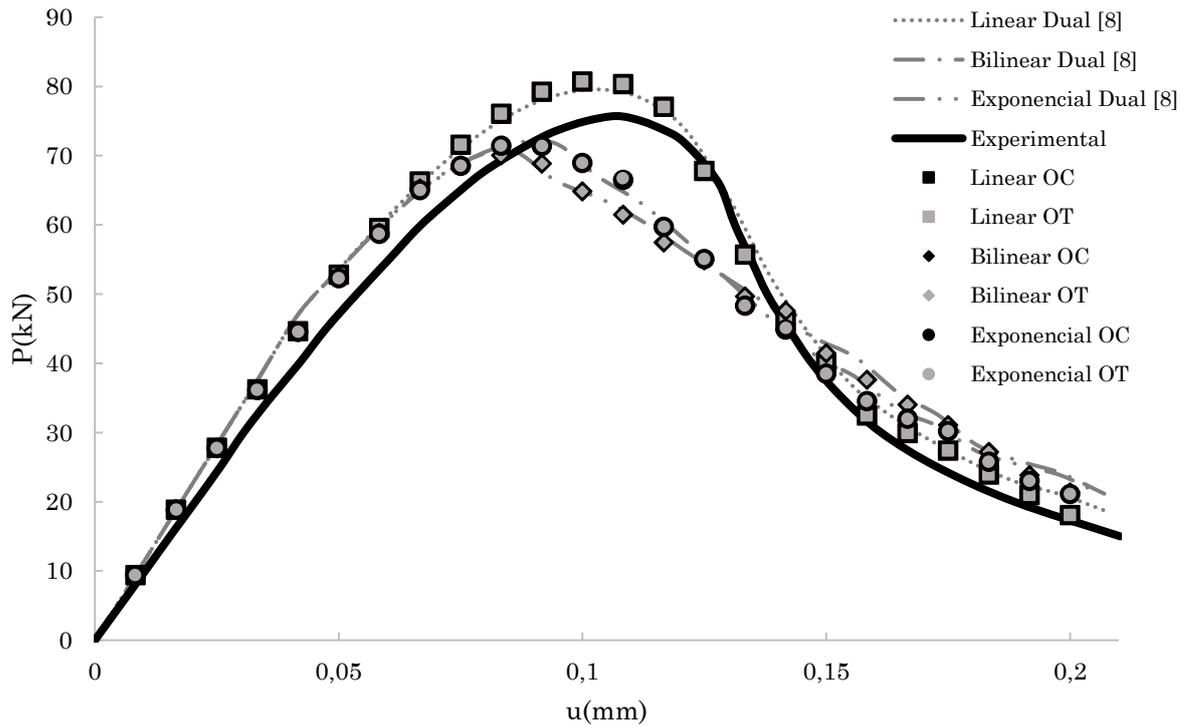


Figura 15. Resultados do exemplo 2: força *versus* deslocamento prescrito

Com base nos resultados apresentados na Fig. 15, os operadores OC e OT obtiveram o mesmo valor de força aplicada em todos os incrementos, para todas as leis coesivas. As maiores diferenças percentuais entre o OC e o OT foram observada para a lei coesiva exponencial, nos incrementos 13, 17 e 21, de, respectivamente, -0,34%, -0,52% e -0,07%. Já para os demais incrementos em todas as três leis adotadas, tal erro é inferior a 0,01%. Além disso, há uma excelente concordância dos resultados para o MEC 3D em comparação ao MEC 2D, o que atesta a precisão da implementação executada. Por fim, pode-se constatar que o código foi capaz de captar o comportamento de amolecimento observado experimentalmente.

Para este exemplo, o número de iterações necessárias para cada tipo de análise também é comparado. Nesse contexto, a Fig. 16 apresenta o número total de iterações para o OC e para o OT em cada uma das três leis coesivas.

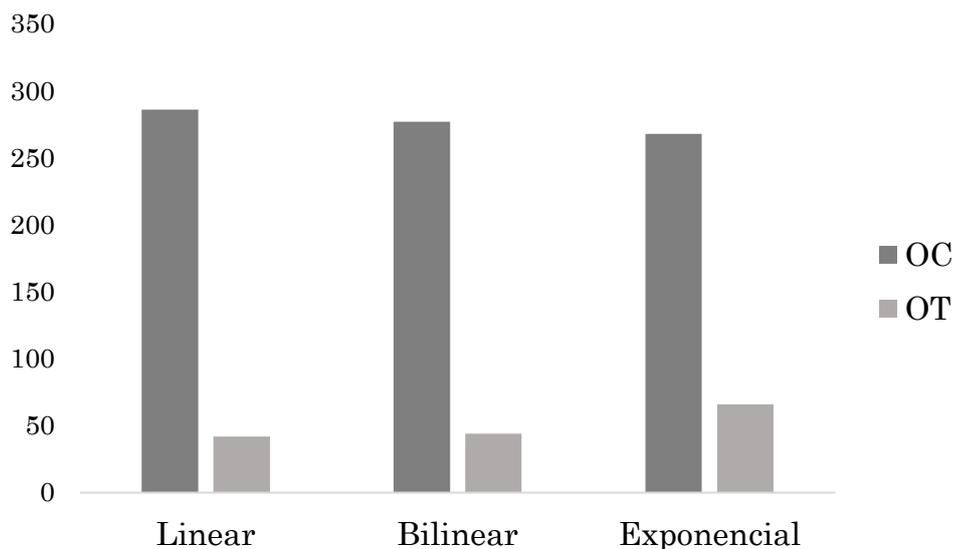


Figura 16. Comparação entre total de iterações para cada operador

A partir dos dados da Fig. 16, conclui-se que o OT requer apenas 15% do total de iterações do OC para o caso linear, 16% para a lei coesiva bilinear e 25% para a lei exponencial. Assim, é evidente a redução drástica do total de iterações entre os dois operadores. Além disso, tal qual o exemplo 1, a lei coesiva linear apresenta a maior redução percentual no número de iterações, seguido da lei coesiva bilinear e da lei exponencial.

A evolução da degradação mecânica do material ao longo da interface também pode ser analisada. Dessa forma, considera-se o percentual de degradação como a razão entre a tensão atuante e a resistência máxima à tração, quando há abertura de fissura, ou 100% em caso de COD nulo. Assim, é apresentada na Fig. 16 este resultado, calculado com a lei coesiva exponencial e OT.

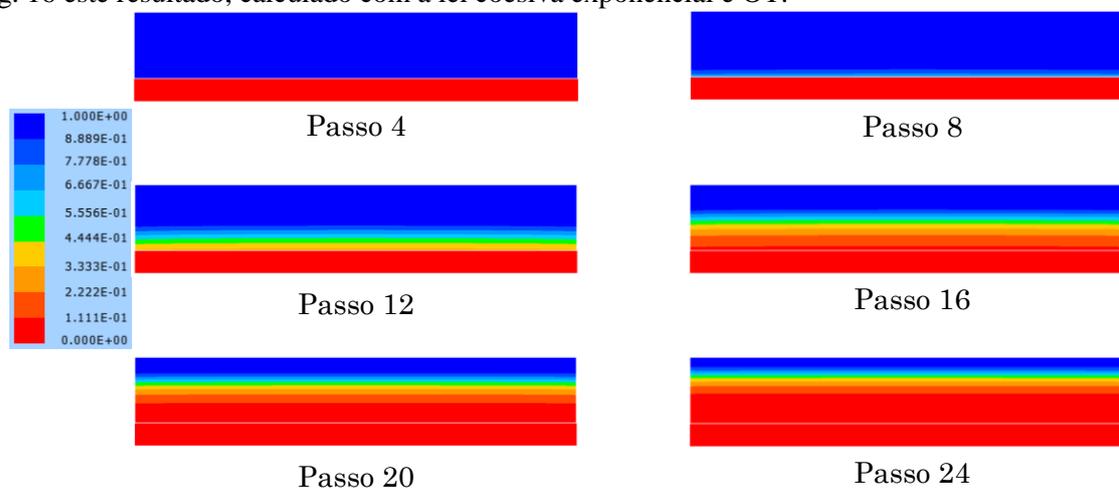


Figura 17. Evolução da degradação na interface coesiva

Sobre a Fig. 17, é importante mencionar a presença do entalhe inicial, evidente no passo 4, em que a degradação ainda não se iniciou. Além disso, nota-se que o processo de degradação ocorre de maneira uniforme à medida que o deslocamento prescrito aumenta.

6 Conclusões

O presente trabalho apresentou uma formulação não linear 3D baseada no MEC para a análise da fratura não linear de materiais quase frágeis. O problema não linear é resolvido por meio dos operadores constante e tangente. De modo a representar o comportamento coesivo presente no caminho de

propagação da fissura, foram utilizadas três leis coesivas: linear, bilinear e exponencial.

Diante dos resultados obtidos nos exemplos apresentados, constata-se que o algoritmo implementado para análise da fratura coesiva em materiais quase-frágeis é preciso. Enquanto que o primeiro exemplo é comparado com a solução analítica, a qual é obtida por meio de soluções da Teoria da Elasticidade, as respostas do segundo exemplo são confrontadas com dados extraídos da literatura. Além disso, é possível concluir que a implementação das duas estratégias, OC e OT, está correta, pois os resultados obtidos entre cada estratégia diferem menos que 0,5%.

Na comparação entre o número de iterações entre o OC e o OT, o operador tangente requer um número expressivamente menor de iterações para convergência de cada incremento. Isso decorre do uso da derivada da lei coesiva na solução do problema não-linear pelo OT. Nos dois exemplos, a lei coesiva linear apresentou maior redução no número de iterações, seguida da lei bilinear, enquanto que a lei exponencial é a que possui menor redução.

Para a consideração da propagação da fissura coesiva, este trabalho fez uso da Técnica de Sub-Regiões. Nesse cenário, a abordagem apresentada para os operadores constante e tangente também pode ser acoplada a rotinas computacionais do MEC com propagação da fissura pela adição de elementos.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os autores agradecem também ao CNPq pelo financiamento concedido.

Referências

- [1] G. I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, vol. 7, pp. 55-129, 1962.
- [2] D. S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, vol. 8, n. 6, pp. 100-104, 1960.
- [3] A. Hillerborg, M. Modeer e P.E. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, vol. 6, p. 773-782, 1976.
- [4] D. M. Tracey. Finite elements for three-dimensional elastic crack analysis. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 26, n. 2, pp. 282-290, 1974.
- [5] T. A. Cruse e W. Vanburen. Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. *International Journal of Fracture Mechanics*, vol. 7, n. 1, pp. 1-15, 1971.
- [6] Y. Mi e M.H. Aliabadi. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. *Engineering analysis with boundary elements*, vol. 10, n. 2, pp. 161-171, 1992.
- [7] A. L. Saleh e M. H. Aliabadi. Crack growth analysis in concrete using boundary element method. *Engineering fracture mechanics*, vol. 51, n. 4, pp. 533-545, 1995.
- [8] E. D. Leonel e W. S. Venturini. Non-linear boundary element formulation with tangent operator to analyse crack propagation in quasi-brittle materials. *Engineering analysis with boundary elements*, vol. 34, n. 2, pp. 122-129, 2010.
- [9] P. E. Petersson, *Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials*. 1981.
- [10] C.A. Brebbia. *The Boundary Element method for engineers*. Pentech Press, 1978.
- [11] W.T. Kelvin. Note on the integrations of the equations of equilibrium of an elastic solid. *Cambridge Dublin Math J*, vol. 3, pp. 87-89, 1848.
- [12] C. Somigliana, Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo. *Nuovo Cimento*, ser. v.3, pp. 17-20, 1885.
- [13] M. Guiggiani, G. Krishnasamy, T.J. Rudolph e F.J. Rizzo. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 59, pp. 604-614, 1992.