

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM INTERPOLAÇÃO DIRETA APLICADO A MEIOS SUAVEMENTE HETEROGÊNEOS UTILIZANDO A TÉCNICA DE SUPERPOSIÇÃO DE DOMÍNIOS

Hercules de Melo Barcelos

engercules@gmail.com

Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia, INMETRO,

Av. Nossa Sra. Das Graças 50, 25250-020, Rio de Janeiro/Duque de Caxias, Brasil

Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Espírito Santo – PPGEM/UFES – Centro Tecnológico – Av. Fernando Ferrari, 540 – Bairro Goiabeiras – 29.075 – 910, Vitoria, ES – Brasil

Carlos Friedrich Loeffler

Luciano de Oliveira Castro Lara

carlosloeffler@bol.com.br

castrolara@hotmail.com

Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Espírito Santo – PPGEM/UFES – Centro Tecnológico – Av. Fernando Ferrari, 540 – Bairro Goiabeiras – 29.075 – 910, Vitoria, ES – Brasil

Abstract. This work presents a formulation of the Boundary Element Method (BEM) applied to problems governed by the piecewise inhomogeneous Laplace's Equation. Thus, the constitutive property is isotropic but varies according to a known function along with the complete domain or then within of distinct sectors inside it. For solving accurately this complex case, the domain integral generated by the non-homogeneity of the medium is transformed into a boundary integral using the Direct Interpolation Boundary Element Method (DIBEM). Another important operational advantage of the proposed model is given by the application of the Domain Superposition Technique (DST) to compute the sectorial heterogeneities. Reference results for evaluation of the accuracy are given through simulations using the Finite Element Method with finer meshes.

Keywords: Boundary Element Method, Non homogeneous Laplace's problems, Domain Superposition Technique, Direct Interpolation Boundary Element Method, Radial Basis Function.

1 Introdução

Grandes desafios vêm surgindo com os avanços da engenharia moderna e, com isto, a busca por soluções de engenharia para modelos matemáticos cada vez mais elaborados torna-se necessária. Nesse contexto, as formulações relacionadas a métodos numéricos têm evoluído significativamente.

Muitos problemas têm sua complexidade ampliada caso a propriedade constitutiva do meio envolvido seja considerada suavemente heterogênea, como ocorre na análise de fluxo de lubrificantes em mancais hidrodinâmicos ou na transferência de calor em materiais funcionais [1]. Este enredamento ainda pode ser maior considerando os casos nos quais o domínio $\Omega(\mathbf{X})$ apresente regiões internas com propriedades de variação distinta do meio circundante. Pode-se afirmar que essa importante classe de problemas é preferentemente tratada por métodos de discretização de domínio como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método das Diferenças Finitas (MDF). Com certa razão, problemas assim não se mostram adequados para a modelagem com o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Matematicamente, os problemas em apreço resultam em modelos nos quais aparecem integrais de domínio referentes à variação da propriedade constitutiva no domínio. Contudo, no que diz respeito ao MEC, este vem evoluindo bastante no tratamento dessas integrais devido à sua associação com procedimentos fundamentados na interpolação com funções de base radial (FBR) [2]. Tal associação propiciou a criação de duas formulações adicionais ao MEC: a formulação com Dupla Reciprocidade (MECDR) [3] e o Método de Elementos de Contorno de Interpolação Direta (MECID) [4,5].

Historicamente, um tratamento pioneiro na solução de problemas heterogêneos foi apresentado por Rizzo e Shippy [6], aplicando integrais de linha em problemas relacionados à teoria da elasticidade em meios não homogêneos, seccionando o interior de um domínio constante em regiões suavemente heterogêneas. Telles [7] e Cavalcanti e Telles [8] trataram domínios heterogêneos em problemas elásticos, onde essa abordagem utilizou integrais de domínio adicionais para representar o efeito da pressão nos poros. Mais adiante, Kassab e Divo [9] apresentaram uma equação integral de contorno generalizada, aplicando-a no problema de condução de calor em meios isotrópicos com variação da condutividade térmica. Os modelos anteriores não trataram a solução fundamental pela forma tradicional do MEC conforme fazem Brebbia et al. [10]; adaptaram-na para cada problema específico. O último modelo, por exemplo, utilizou o sistema de coordenadas polares para a obtenção da solução fundamental.

Observam-se, a partir das citações anteriores, vários casos nos quais as integrais de domínio estão presentes e o quão é importante o desenvolvimento de novas técnicas que possam auxiliar a conversão dessas integrais de domínio em integrais de contorno. A utilização das FBR tem atraído a atenção de pesquisadores como Sarra [11], tornando-se a principal opção para trabalhar com o Teorema da Divergência junto às integrais de domínio.

O já mencionado Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade (MECDR), desenvolvido por Nardini e Brebbia [3] apresentou uma grande contribuição para a aplicação das FBR no MEC. Isto porque viabilizou soluções acessíveis para muitos problemas importantes, como os casos de vibração livre e problemas transientes. Partridge et al. [12] apresenta de forma direta os procedimentos do MECDR que tratam as integrais de domínio por meio do procedimento de interpolação por FBR.

Os problemas em que o meio é heterogêneo têm como uma das principais características matemáticas sua representação em termos de operadores não-adjuntos, o que pode implicar em soluções fundamentais complicadas e custosas. Diante disso, pesquisadores têm procurado utilizar o MECDR mantendo a solução fundamental original do problema de Laplace em meios homogêneos, aplicando o método em problemas de resposta dinâmica ou de forças de corpo. Dessa maneira, utiliza-se a função primitiva da FBR, que tem como característica ser autoadjunta, o que facilita o desenvolvimento do processo de interpolação do núcleo das integrais de domínio, colaborando com a conversão do domínio para o contorno. Ressalta-se que o processo de aproximação por FBR presente no MECDR requer um número significativo de pontos de interpolação no domínio, para não

apresentar perda de precisão.

Uma das aplicações do MECDR em meios heterogêneos foi desenvolvida por Harrouni et al. [13], transformando o termo referente ao Laplaciano em um tipo de equação de força de corpo e, desta forma a parte do núcleo da integral de domínio que contém o potencial e propriedade heterogênea são interpolados. Outros problemas similares foram resolvidos por Ramachadran [14]. Considerando o exemplo de variações ortotrópicas da propriedade constitutiva, Perez e Wrobel [15] solucionaram este problema aplicando coordenadas polares, após transformar o problema de Laplace com ortotropia em outro similar a Poisson com o operador diferencial autoadjunto.

O fato do processo de interpolação não ser aplicado em todo o núcleo da integral de domínio traz certas imprecisões ao MECDR, devido à perda de precisão por problemas relacionados ao condicionamento matricial. Observa-se que a aplicação do MECDR gera duas novas matrizes de interpolação, que são aplicadas às matrizes tradicionais H e G do MEC, e podem reduzir a convergência do método.

Considerando a similaridade entre os problemas com meios suavemente heterogêneos e os problemas difusivo-advectivos em regime permanente, Loeffler e Pereira [16] aplicaram a mesma idéia proposta para a solução destes últimos casos propondo uma formulação com funções de base radial denominada de Quase Dupla Reciprocidade [17].

Prosseguindo com o objetivo de levar para o contorno as integrais de domínio, Wen et al. [18] e Wen e Aliabadi [19] apresentaram o Método Direto de Integral (em inglês DIM), o qual aplica diretamente sobre a integral de domínio uma transformação de coordenadas para gerar a integral de contorno, o que não requer solução particular como o MECDR, contudo por não apresentar solução do problema de singularidade, este método pode ficar restrito a problemas de Poisson e outros que não possuem condição singular. Uma importante alternativa para solucionar as integrais de domínio encontra-se em Gao [20], onde problemas de Poisson são solucionados por integrais de contorno graças a uma transformação de coordenadas. Entretanto, a extensão do procedimento para problemas em que o núcleo não é conhecido envolve funções de base radial, manipuladas com alto custo computacional relativamente às demais alternativas.

Para superar diversos problemas nas formulações precedentes, uma técnica alternativa que também utiliza FBR foi proposta: o Método de Elementos de Contorno de Interpolação Direta (MECID). No MECID, o uso de FBR torna este método similar ao MECDR, contudo, a interpolação direta de todo o núcleo da integral de domínio, incluindo a solução fundamental, torna-o diferente do MECDR e por sua vez semelhante ao procedimento DIM. É importante destacar que o MECID utiliza o procedimento de regularização para evitar singularidades entre pontos fonte e os pontos campo usuais com o MEC. Foram feitas por Loeffler et al [21] aplicações do MECID em problemas de Helmholtz e Poisson em regiões homogêneas [4], apresentando claramente bons resultados através de comparações realizadas com o MECDR.

Considerando o MECID em casos nos quais os domínios apresentem heterogeneidades constantes em diversas regiões, foi utilizada recentemente uma ferramenta denominada Técnica de Superposição de Domínios (TSD) desenvolvida por Loeffler e Mansur [22], na qual a energia associada a qualquer região interna e homogênea pode ser interpretada como fonte de energia e, com isto, modelada facilmente em termos de coeficientes de influência típicos do MEC. Assim, alguns problemas de Laplace foram resolvidos por Loeffler et al [23].

Recentemente, Barcelos e Loeffler [1] aplicaram a TSD e o MECID com regularização em problemas de Laplace em regiões com propriedades constitutivas isotrópicas, variando suavemente em todo o domínio ou setorialmente sendo envolvidas por uma propriedade $K(\mathbf{X})$ constante.

Para este artigo, a TSD é aplicada novamente em conjunto com o MECID com regularização; contudo, a complexidade do problema associado à Equação de Laplace será maior, pois o domínio apresenta diferentes propriedades constitutivas, variando em regiões definidas na geometria escolhida. Estes problemas estão sob regime permanente, sem fontes de energia externa e com propriedades isotrópicas variando com a posição no domínio. Elementos lineares serão utilizados durante as soluções numéricas e analíticas das integrais de contorno, sendo apresentadas geometrias diversas durante as simulações, para demonstrar a versatilidade do modelo proposto.

2 Formulação Integral

O problema proposto baseia-se em um modelo onde $K(\mathbf{X})$ representa a propriedade constitutiva heterogênea contida em um domínio $\Omega(\mathbf{X})$. Tal propriedade é isotrópica e também suave nos setores que compõem todo o domínio. O potencial ou variável de estado $u(\mathbf{X})$ está em regime permanente em $\Omega(\mathbf{X})$ e seu campo é considerado irrotacional. Não há fontes. As condições de contorno são dadas pelo potencial e sua derivada normal.

Desta forma a equação de governo será dada por:

$$[K(\mathbf{X})u_{,i}(\mathbf{X})]_{,i} = 0. \quad (1)$$

A região completa ou envolvente $\Omega^{sur}(\mathbf{X})$ e um subdomínio arbitrário $\Omega^{int}(\mathbf{X})$ podem ser visualizados tomando como exemplo a Fig. 1. Usando a Técnica de Superposição de Domínios, conforme mostram Loeffler e Mansur [22], é importante criar um domínio envolvente e outros internos nos quais as propriedades variam de modo distinto.

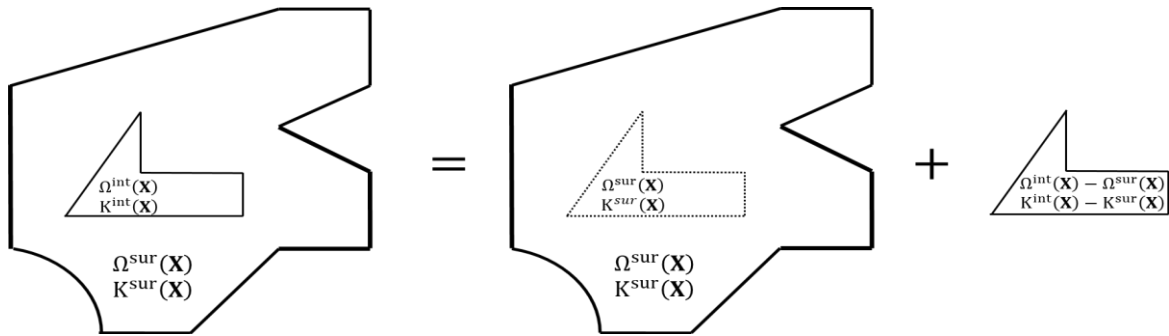


Figura 1. Interpretação da Técnica de Superposição de Domínios.

Na Fig. 1, o termo $K^{sur}(\mathbf{X})$ representa a propriedade envolvente em $\Omega^{sur}(\mathbf{X})$ e $K^{int}(\mathbf{X})$ uma propriedade restrita ao setor interno. Diante desse modelo, aplica-se o MEC com sua clássica solução fundamental $u^*(\mathbf{X})$ apresentada por Brebbia et al [10], obtendo a forma integral forte:

$$\int_{\Omega(\mathbf{X})} [K(\mathbf{X})u_{,i}(\mathbf{X})]_{,i} u^*(\mathbf{X}) d\Omega(\mathbf{X}) = 0. \quad (2)$$

Considere-se que o núcleo das integrais se componham por funções suaves e integráveis. É possível contabilizar os valores das propriedades envolvente e internas por superposição, de modo que tanto no domínio envolvente quanto no interno, novas funções contínuas descrevam as propriedades constitutivas. Deste modo, a Eq. (2) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega^{sur}(\mathbf{X})} [K^{sur}(\mathbf{X})u_{,i}(\mathbf{X})]_{,i} u^*(\mathbf{X}) d\Omega^{sur}(\mathbf{X}) = \int_{\bar{\Omega}(\mathbf{X})} [\bar{K}(\mathbf{X})u_{,i}(\mathbf{X})]_{,i} u^*(\mathbf{X}) d\bar{\Omega}(\mathbf{X}), \quad (3)$$

sendo que $\bar{K}(\mathbf{X})$ e $\bar{\Omega}(\mathbf{X})$ valem, respectivamente:

$$\bar{K}(\mathbf{X}) = K^{sur}(\mathbf{X}) - K^{int}(\mathbf{X}); \quad \bar{\Omega}(\mathbf{X}) = \Omega^{sur}(\mathbf{X}) - \Omega^{int}(\mathbf{X}). \quad (4)$$

Usando os procedimentos usuais do MEC na Eq. (3), encontra-se a sua forma integral inversa pela Eq. (5), sendo que o desenvolvimento detalhado dessas integrais pode ser colhido em Barcelos e Loeffler [1], que abordaram meios totalmente heterogêneos:

$$\begin{aligned} & c(\xi)u(\xi)K^{sur}(\xi) + \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} u(\mathbf{X})K^{sur}(\mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}) - \\ & \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} q(\mathbf{X})K^{sur}(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}) - \int_{\Omega^{sur}(\mathbf{X})} u(\mathbf{X})K_i^{sur}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega^{sur}(\mathbf{X}) = \\ & c(\xi)u(\xi)\bar{K}(\xi) + \int_{\bar{\Gamma}(\mathbf{X})} u(\mathbf{X})\bar{K}(\mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X}) d\bar{\Gamma}(\mathbf{X}) - \int_{\bar{\Gamma}(\mathbf{X})} q(\mathbf{X})\bar{K}(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X}) d\bar{\Gamma}(\mathbf{X}) - \\ & \int_{\bar{\Omega}(\mathbf{X})} u(\mathbf{X})\bar{K}_i(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) d\bar{\Omega}(\mathbf{X}). \end{aligned} \quad (5)$$

Ressalta-se que:

$$\bar{\Gamma}(\mathbf{X}) = \Gamma^{sur}(\mathbf{X}) - \Gamma^{int}(\mathbf{X}). \quad (6)$$

De acordo com os fundamentos da técnica de superposição de domínios, a energia interna relativa aos subdomínios pode ser quantificada em termos exclusivamente da energia potencial nele contida, conforme Loeffler e Mansur [22]. Assim, a integral que relaciona os trabalhos de fluxo na região interna da Eq. (5) não precisa ser considerada, podendo a equação ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & c(\xi)u(\xi)K^{sur}(\xi) + \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} u(\mathbf{X})K^{sur}(\mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}) - \\ & \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} q(\mathbf{X})K^{sur}(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}) - \int_{\Omega^{sur}(\mathbf{X})} u(\mathbf{X})K_i^{sur}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X})d\Omega^{sur}(\mathbf{X}) = \quad (7) \\ & c(\xi)u(\xi)\bar{K}(\xi) + \int_{\bar{\Gamma}(\mathbf{X})} u(\mathbf{X})\bar{K}(\mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X}) d\bar{\Gamma}(\mathbf{X}) - \int_{\bar{\Omega}(\mathbf{X})} u(\mathbf{X})\bar{K}_{,i}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X})d\bar{\Omega}(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Seguem as seguintes definições para a Eq. (7): $u^*(\xi; \mathbf{X})$ e $q^*(\xi; \mathbf{X})$ são respectivamente a solução fundamental e a sua derivada normal:

$$q^*(\xi; \mathbf{X}) = u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X})n_i(\mathbf{X}); \quad q(\mathbf{X}) = u_{,i}(\mathbf{X})n_i(\mathbf{X}), \quad (8)$$

$$u^*(\xi; \mathbf{X}) = -\frac{1}{2\pi} \ln[r(\xi; \mathbf{X})]; \quad q^*(\xi; \mathbf{X}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial r(\xi; \mathbf{X})}{\partial n(\mathbf{X})}. \quad (9)$$

3 Aplicação do MECID

O núcleo das integrais de domínio da Eq. (7) pode ser aproximado utilizando uma combinação linear de Funções de Base Radial (FBR), conforme Loeffler et al. [21]:

$$u(\mathbf{X})K_i^{sur}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) = u(\mathbf{X}) \xi \Lambda(\mathbf{X}) \approx \xi \alpha^j F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}), \quad (10)$$

$$u(\mathbf{X})\bar{K}_{,i}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) = u(\mathbf{X}) \xi \Pi(\mathbf{X}) \approx \xi \beta^j F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}). \quad (11)$$

O termo $F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})$ corresponde à FBR conhecida como função de placa fina, apresentada por Buhmann [2] como

$$F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) = r^2(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \ln[r(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})], \quad (12)$$

onde $r(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})$ é a distância Euclidiana entre o ponto campo \mathbf{X} e o ponto base \mathbf{X}^j definida por uma varredura realizada em $\Omega(\mathbf{X})$. Durante o processo de discretização, os pontos campo definem os nós geométricos. Os termos α e β são coeficientes e os termos Λ e Π representam matrizes diagonais que contêm as derivadas parciais da propriedade constitutiva K^{sur} e $\bar{K}(\mathbf{X})$ respectivamente.

Utilizando uma função $\Psi^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})$ como primitiva de $F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})$ durante a aplicação do MECID, obtêm-se as integrais de linha correspondentes às integrais de domínio da Eq. (7). A Eq. (13) apresenta a aplicação do Teorema da Divergência para a região envolvente, ou seja:

$$\begin{aligned} & \xi \alpha^j \int_{\Omega^{sur}(\mathbf{X})} F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) d\Omega^{sur}(\mathbf{X}) = \xi \alpha^j \int_{\Omega^{sur}(\mathbf{X})} \Psi_{,ii}^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) d\Omega^{sur}(\mathbf{X}) = \\ & \xi \alpha^j \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} \Psi_{,i}^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}) = \xi \alpha^j \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}). \end{aligned} \quad (13)$$

O mesmo pode ser feito para a integral de domínio dada pela Eq. (7), composta pela expressão da Eq. (11) em seu núcleo. Desta forma, a Eq. (7) pode ser reescrita pela seguinte aproximação:

$$\begin{aligned} & c(\xi)u(\xi)K^{sur}(\xi) + \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} u(\mathbf{X})K^{sur}(\mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}) - \\ & \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} q(\mathbf{X})K^{sur}(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}) - \xi \alpha^j \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}) \approx \quad (14) \\ & c(\xi)u(\xi)\bar{K}(\xi) + \int_{\bar{\Gamma}(\mathbf{X})} u(\mathbf{X})\bar{K}(\mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X}) d\bar{\Gamma}(\mathbf{X}) - \xi \beta^j \int_{\bar{\Gamma}(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) d\bar{\Gamma}(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Com o ponto fonte ξ fixo, o processo de interpolação apresentado pelas equações Eq. (10) e Eq. (11) mapeia todos os pontos base \mathbf{X}^j correlacionados com os pontos campo \mathbf{X} . Apesar dos coeficientes α e β serem desconhecidos, com o procedimento de discretização padrão do MEC, forma-se um sistema de equações que reescreve esses coeficientes em função dos valores de $u(\mathbf{X})$.

4 Procedimento de regularização

Observa-se que ocorrem singularidades nos núcleos das Eq. (10) e Eq. (11) toda a vez que os pontos fonte ξ coincidirem com os pontos campo \mathbf{X} . Para evitar isto, utiliza-se um processo de regularização, conforme utilizado por Loeffler e Mansur [5] o qual é baseado no conceito de Hadamard [24]. Esse conceito é aplicado nas integrais de domínio da Eq. (7) sendo representado pela Eq. (15), onde:

$$\begin{aligned} & c(\xi)u(\xi)K^{sur}(\xi) + \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} u(\mathbf{X})K^{sur}(\mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}) - \\ & \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} q(\mathbf{X})K^{sur}(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}) - \int_{\Omega^{sur}(\mathbf{X})} [u(\mathbf{X}) - \\ & u(\xi)]K_i^{sur}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega^{sur}(\mathbf{X}) - u(\xi) \int_{\Omega^{sur}(\mathbf{X})} K_i^{sur}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega^{sur}(\mathbf{X}) = \quad (15) \\ & c(\xi)u(\xi)\bar{K}(\xi) + \int_{\bar{\Gamma}(\mathbf{X})} u(\mathbf{X})\bar{K}(\mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X}) d\bar{\Gamma}(\mathbf{X}) - \int_{\bar{\Omega}(\mathbf{X})} [u(\mathbf{X}) - \\ & u(\xi)]\bar{K}_{,i}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) d\bar{\Omega}(\mathbf{X}) - u(\xi) \int_{\bar{\Omega}(\mathbf{X})} \bar{K}_{,i}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) d\bar{\Omega}(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Aplica-se na Eq. (15) o procedimento do MECID, aproximando o núcleo das integrais de domínio, conforme a seguir:

$$[u(\mathbf{X}) - u(\xi)]K_i^{sur}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) \approx \xi \alpha^j F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}), \quad (16)$$

$$[u(\mathbf{X}) - u(\xi)]\bar{K}_{,i}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) \approx \xi \beta^j F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}). \quad (17)$$

Os termos adicionais que fazem parte do processo de regularização podem ser tratados do seguinte modo:

$$\begin{aligned} & -u(\xi) \int_{\Omega^{sur}(\mathbf{X})} K_i^{sur}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega^{sur}(\mathbf{X}) = \\ & -u(\xi) \int_{\Omega^{sur}(\mathbf{X})} [K^{sur}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X})]_{,i} d\Omega^{sur}(\mathbf{X}) + \quad (18) \\ & u(\xi) \int_{\Omega^{sur}(\mathbf{X})} K^{sur}(\mathbf{X})u_{,ii}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega^{sur}(\mathbf{X}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -u(\xi) \int_{\bar{\Omega}(\mathbf{X})} \bar{K}_{,i}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) d\bar{\Omega}(\mathbf{X}) = -u(\xi) \int_{\bar{\Omega}(\mathbf{X})} [\bar{K}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X})]_{,i} d\bar{\Omega}(\mathbf{X}) + \\ & u(\xi) \int_{\bar{\Omega}(\mathbf{X})} \bar{K}(\mathbf{X})u_{,ii}^*(\xi; \mathbf{X}) d\bar{\Omega}(\mathbf{X}). \quad (19) \end{aligned}$$

Conforme Brebbia [10], o termo $u_{,ii}^*(\xi; \mathbf{X})$ representa o problema fundamental de Poisson onde a fonte é concentrada e expressa pelo Delta de Dirac $\Delta(\xi; \mathbf{X})$, aplicado em um ponto fonte ξ qualquer em $\Omega(\mathbf{X})$. Dessa forma, as Eq. (18) e Eq. (19) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} & -u(\xi) \int_{\Omega^{sur}(\mathbf{X})} K_i^{sur}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) d\Omega^{sur}(\mathbf{X}) = \\ & -u(\xi) \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} K^{sur}(\mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}) - c(\xi)u(\xi)K^{sur}(\xi), \quad (20) \end{aligned}$$

$$-u(\xi) \int_{\bar{\Omega}(\mathbf{X})} \bar{K}_{,i}(\mathbf{X})u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) d\bar{\Omega}(\mathbf{X}) = -u(\xi) \int_{\bar{\Gamma}(\mathbf{X})} \bar{K}(\mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X}) d\bar{\Gamma}(\mathbf{X}) - c(\xi)u(\xi)\bar{K}(\xi). \quad (21)$$

Substituindo as Eq. (20) e Eq. (21) na Eq. (15) e, tratando as integrais de domínio regularizadas através do MECID, obtêm-se a forma integral inversa da Equação de Laplace aplicada em subdomínios suavemente heterogêneos, conforme a Eq. (22) a seguir:

$$\begin{aligned}
 & -u(\xi) \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} K^{sur}(\mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}) + \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) K^{sur}(\mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}) - \\
 & \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} q(\mathbf{X}) K^{sur}(\mathbf{X}) u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}) - \xi \alpha^j \int_{\Gamma^{sur}(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) d\Gamma^{sur}(\mathbf{X}) = \\
 & -u(\xi) \int_{\bar{\Gamma}(\mathbf{X})} \bar{K}(\mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\bar{\Gamma}(\mathbf{X}) + \int_{\bar{\Gamma}(\mathbf{X})} u(\mathbf{X}) \bar{K}(\mathbf{X}) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\bar{\Gamma}(\mathbf{X}) - \\
 & \xi \beta^j \int_{\bar{\Gamma}(\mathbf{X})} \eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) d\bar{\Gamma}(\mathbf{X}).
 \end{aligned} \tag{22}$$

5 O procedimento de discretização

O procedimento de discretização a seguir segue os padrões tradicionais do MEC, diferenciando-se apenas pela presença dos termos oriundos do processo de interpolação. Diante disso, os sistemas de equações para cada ponto fonte ξ são organizados conforme a Eq. (23):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -(H_{12} + \dots + H_{1n})u_1 + H_{12}u_2 + \dots + H_{1n}u_n - G_{11}q_1 - \dots - G_{1n}q_n \\
 = {}^1\alpha^1 N_1^{sur} + \dots + {}^1\alpha^n N_n^{sur} - {}^1\beta^i \bar{N}_i - \dots - {}^1\beta^m \bar{N}_m \\
 H_{21}u_1 - (H_{21} + H_{23} + \dots + H_{2n})u_2 + \dots + H_{2n}u_n - G_{21}q_1 - \dots - G_{2n}q_n \\
 = {}^2\alpha^1 N_1^{sur} + \dots + {}^2\alpha^n N_n^{sur} - {}^2\beta^i \bar{N}_i - \dots - {}^2\beta^m \bar{N}_m \\
 \vdots \\
 H_{n1}u_1 + H_{n2}u_2 + \dots - (H_{n1} + \dots + H_{n(n-1)})u_n - G_{n1}q_1 - \dots - G_{nn}q_n \\
 = {}^n\alpha^1 N_1^{sur} + \dots + {}^n\alpha^n N_n^{sur} - {}^n\beta^i \bar{N}_i - \dots - {}^n\beta^m \bar{N}_m
 \end{array} \right. \tag{23}$$

Verifica-se pela construção do sistema linear que a matriz \mathbf{H} na Eq. (23) não possui termos singulares em sua diagonal. A organização do sistema de equações permite trabalhar de forma mais adequada os termos que apresentam os coeficientes de interpolação, pois o processo de interpolação da região envolvente abrange todos os nós do domínio $\Omega^{sur}(\mathbf{X})$, enquanto que a interpolação do domínio interno $\Omega(\mathbf{X})$ se limita aos nós que compõem este setor. Na Eq. (23) isto é assinalado por um intervalo de nós para os pontos base e campo compreendidos entre i e m .

A representação matricial mais concisa da Eq. (23) é dada por:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} {}^1\alpha^1 & \dots & {}^1\alpha^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^n\alpha^1 & \dots & {}^n\alpha^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{bmatrix}^{sur} - \begin{bmatrix} {}^1\beta^i & \dots & {}^1\beta^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^n\beta^i & \dots & {}^n\beta^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}_i \\ \vdots \\ \bar{N}_m \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Por conveniência, o lado direito da Eq. (24) pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}^{sur} - \begin{bmatrix} \bar{B}_i \\ \vdots \\ \bar{B}_m \end{bmatrix}. \tag{25}$$

O sistema matricial apresentado pela Eq. (25) deve ser resolvido explicitando os vetores A_ξ^{sur} e \bar{B}_ξ em função de $u(\mathbf{X})$. Dessa forma, eles podem ser reescritos em termos de cada ponto fonte como:

$$A_\xi^{sur} = [N_1 \quad \dots \quad N_n]^{sur} \begin{bmatrix} \xi \alpha^1 \\ \vdots \\ \xi \alpha^n \end{bmatrix}; \bar{B}_\xi = [\bar{N}_i \quad \dots \quad \bar{N}_m] \begin{bmatrix} \xi \beta^i \\ \vdots \\ \xi \beta^m \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Os coeficientes α e β podem ser calculados baseados nas Eq. (10) e Eq. (11) considerando o processo de regularização, a saber:

$$\xi\Lambda(\mathbf{X})[u(\mathbf{X}) - u(\xi)] \approx \xi\alpha^j F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \rightarrow \xi\alpha = [\mathbf{F}]^{-1} \xi\Lambda[\mathbf{u} - \mathbf{u}_\xi], \quad (27)$$

$$\xi\Pi(\mathbf{X})[u(\mathbf{X}) - u(\xi)] \approx \xi\beta^j F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) \rightarrow \xi\beta = [\mathbf{F}]^{-1} \xi\Pi[\mathbf{u} - \mathbf{u}_\xi]. \quad (28)$$

Utilizando as Eq. (27) e Eq. (28) para o cálculo dos vetores da Eq. (26) tem-se que:

$$A_\xi^{sur} = [N_1 \quad \dots \quad N_n]^{sur} \begin{bmatrix} F^{11} & \dots & F^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F^{n1} & \dots & F^{nn} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \xi\Lambda(1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \xi\Lambda(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi\Lambda(1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \xi\Lambda(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\xi \\ \vdots \\ u_\xi \end{bmatrix} \right\}. \quad (29)$$

Do mesmo modo que:

$$\bar{B}_\xi = [\bar{N}_i \quad \dots \quad \bar{N}_m] \begin{bmatrix} F^{ii} & \dots & F^{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F^{mi} & \dots & F^{mm} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \xi\Lambda(i) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \xi\Lambda(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi\Lambda(i) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \xi\Lambda(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\xi \\ \vdots \\ u_\xi \end{bmatrix} \right\}. \quad (30)$$

O produto inicial do vetor \mathbf{N} com a matriz \mathbf{F} pode ser representado pelo vetor \mathbf{S} a seguir:

$$A_\xi^{sur} = [S_1 \quad \dots \quad S_n]^{sur} \left\{ \begin{bmatrix} \xi\Lambda(1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \xi\Lambda(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi\Lambda(1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \xi\Lambda(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\xi \\ \vdots \\ u_\xi \end{bmatrix} \right\}. \quad (31)$$

O mesmo ocorre com \bar{B}_ξ :

$$\bar{B}_\xi = [\bar{S}_i \quad \dots \quad \bar{S}_m] \left\{ \begin{bmatrix} \xi\Lambda(i) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \xi\Lambda(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi\Lambda(i) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \xi\Lambda(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_\xi \\ \vdots \\ u_\xi \end{bmatrix} \right\}. \quad (32)$$

Desta maneira, cada elemento dos vetores A_ξ^{sur} e \bar{B}_ξ pode ser escrito como:

$$A_\xi^{sur} = [S_1 \xi\Lambda(1)u_1]^{sur} + \dots + [S_n \xi\Lambda(n)u_n]^{sur} - [S_1 \xi\Lambda(1) + \dots + S_n \xi\Lambda(n)]^{sur} u_\xi, \quad (33)$$

$$\bar{B}_\xi = [\bar{S}_i \xi\Lambda(i)u_i] + \dots + [\bar{S}_m \xi\Lambda(m)u_m] - [\bar{S}_i \xi\Lambda(i) + \dots + \bar{S}_m \xi\Lambda(m)]u_\xi. \quad (34)$$

Como a varredura do MEC considera os pontos campo como coincidentes com os pontos fonte, os vetores A_ξ^{sur} e \bar{B}_ξ podem ser escritos em função dos potenciais $u(\mathbf{X})$ pelas Eq. (35) e Eq. (36), conforme desejado:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}^{sur} = \begin{bmatrix} -[S_2^1 \Lambda(2) + \dots + S_n^1 \Lambda(n)] & \dots & S_n^1 \Lambda(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1^n \Lambda(1) & \dots & -[S_1^n \Lambda(1) + \dots + S_{n-1}^n \Lambda(n-1)] \end{bmatrix}^{sur} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \vdots \\ \bar{B}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\bar{S}_{i+1}^1 \Lambda(i+1) + \dots + \bar{S}_m^1 \Lambda(m)] & \dots & \bar{S}_m^1 \Lambda(m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{S}_i^n \Lambda(i) & \dots & -[\bar{S}_i^n \Lambda(i) + \dots + \bar{S}_{m-1}^n \Lambda(m-1)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Salienta-se que a matriz formadora do vetor \bar{B}_ξ tem ordem $\xi \times \xi$ e contém diagonal cheia, contudo as suas colunas serão preenchidas sempre que seu índice coincidir com os pontos base X^j que compõem o setor interno, o qual está sendo interpolado.

Substituindo os sistemas matriciais das Eq. (35) e Eq. (36) no sistema da Eq. (25), o sistema matricial final para solucionar o problema de Laplace, aplicado em meios setorialmente isotrópicos e suavemente heterogêneos pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^{sur} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & \dots & \bar{D}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{D}_{n1} & \dots & \bar{D}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}. \quad (37)$$

6 Exemplos numéricos

Os exemplos abordados tomam o modelo matemático como sendo representativo de problemas de condução de calor em regime estacionário e sem fonte. As fronteiras destes problemas contêm condições de contorno do tipo Dirichlet em termos de temperatura $u(X)$ em Celsius $^\circ\text{C}$ e do tipo Neumann para o gradiente normal de temperatura $\frac{\partial u(X)}{\partial n}$ em $^\circ\text{C}/\text{m}$.

Em cada exemplo, o erro relativo percentual $er_\%$ será medido no contorno de interesse através do somatório abaixo:

$$er_\% = 100 \left(\frac{1}{n} \right) \frac{1}{V_{MEF}} \sum_{i=1}^n |v_i^{MEF} - v_i^{MECID}| \%, \quad (38)$$

onde n é igual ao número total de pontos analisados na fronteira medida, V_{MEF} corresponde ao maior valor de referência calculado pelo MEF nesta fronteira, v_i^{MEF} o valor MEF calculado no ponto i e v_i^{MECID} o valor MECID também calculado neste mesmo ponto i .

A geração de malhas para representar o processo de discretização do MECID e MEF foi feita através da Triangulação de Delaunay [25].

6.1 Primeiro exemplo

Considera-se uma região quadrada bidimensional de lado L igual a 1×10^{-1} m e em seu centro uma região interna conforme a Fig.2. As condições de contorno são do tipo Dirichlet e Neumann.

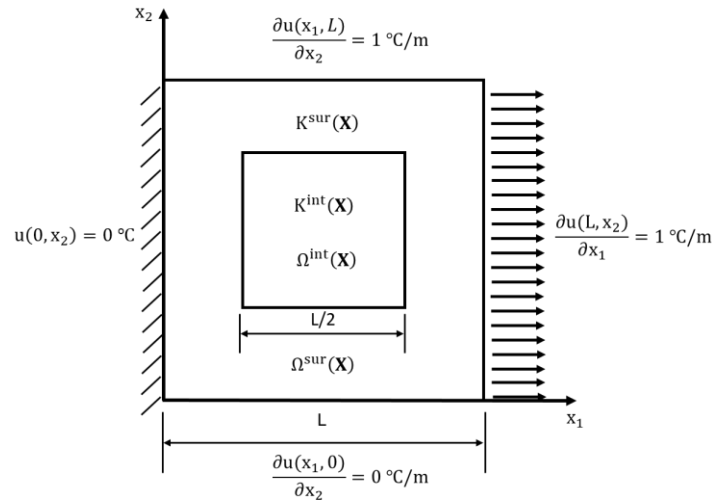


Figura 2. Domínio para o primeiro exemplo.

As propriedades constitutivas K^{sur} e K^{int} são dadas pelas Eq. (39) e (40):

$$K^{sur}(x_1, x_2) = K_0(1 + 5x_1) \frac{W}{m \cdot ^\circ C}, \quad (39)$$

$$K^{int}(x_1, x_2) = K_0(1 + x_1^2) \frac{W}{m \cdot ^\circ C}. \quad (40)$$

O valor de \bar{K} é obtido pela diferença entre as propriedades K^{sur} e K^{int} conforme apresentado na seção 2 deste trabalho. Desta forma o \bar{K} para este exemplo vale:

$$\bar{K}(x_1, x_2) = K_0(5x_1 - x_1^2) \frac{W}{m \cdot ^\circ C}. \quad (41)$$

Conforme as Eq. (10) e (11) é necessário obter os gradientes das propriedades constitutivas K^{sur} e \bar{K} ; os valores encontrados são expostos a partir da Eq. (42) até a Eq. (45):

$$\frac{\partial K^{sur}(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 5K_0 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}, \quad (42)$$

$$\frac{\partial K^{sur}(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}, \quad (43)$$

$$\frac{\partial \bar{K}(x_1, x_2)}{\partial x_1} = K_0(5 - 2x_1) \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}, \quad (44)$$

$$\frac{\partial \bar{K}(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}. \quad (45)$$

Durante o processo de discretização, a malha utilizada para o MEF contém 8321 nós com 16384 elementos triangulares. O formato da malha é do tipo estruturada e a distribuição dos elementos internos é similar à Fig. 3.

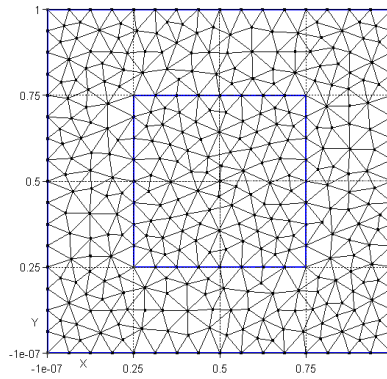


Figura 3. Modelo de malha MEF para o primeiro exemplo.

A distribuição de temperatura $u(\mathbf{X})$ encontrada pelo MEF sobre o domínio $\Omega(\mathbf{X})$ pode ser observada pela Fig. 4.

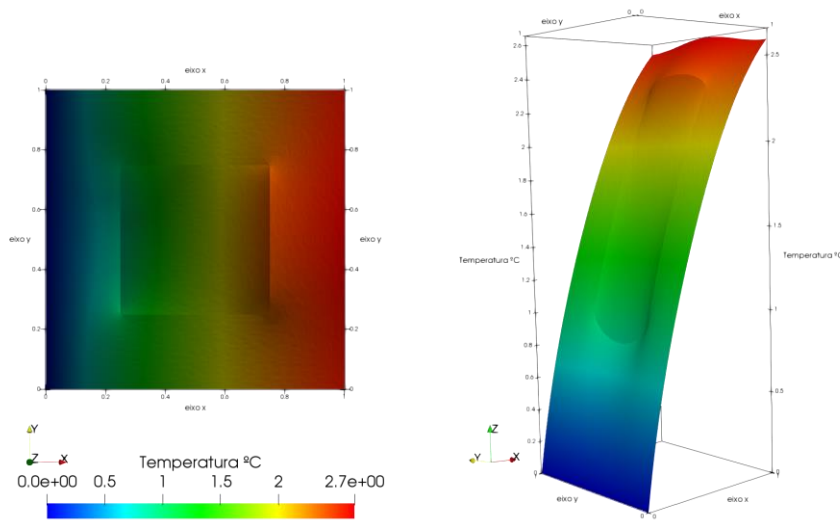


Figura 4. Solução MEF em malha estruturada para o primeiro exemplo.

Para a aplicação do MECID com o TSD, foi criada uma malha com a distribuição de pontos internos interpolantes e discretização dos contornos conforme a Fig. 5. Por questões de concisão, doravante os pontos internos interpolantes ou pontos base são denominados simplesmente de pólos.

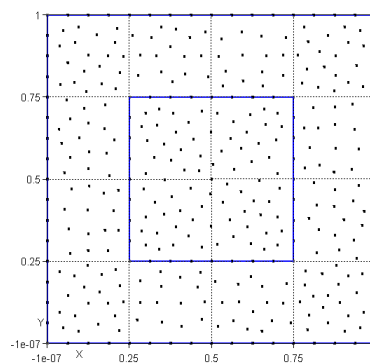


Figura 5. Modelo de malha MECID para o primeiro exemplo.

Os valores de erro relativo percentual para o cálculo das temperaturas foram tomados no contorno com $u(1, x_2)$, podendo ser observados pela Tabela 1 e Fig. 6. Neste exemplo, para melhor identificar o efeito da interpolação, as malhas do contorno envolvente e do contorno interno são mantidas constantes e a quantidade de pólos é alterada. Inicialmente, tomam-se 64 elementos para discretizar o

contorno envolvente e 32 elementos na definição do contorno interno.

Tabela 1. Valores do erro relativo percentual para a temperatura calculada no primeiro exemplo

Nº de pólos no setor envolvente	Nº de pólos do setor interno	Erro relativo percentual
0	0	0,234986%
32	13	0,115715%
120	57	0,051892%
197	57	0,016449%
197	77	0,016137%

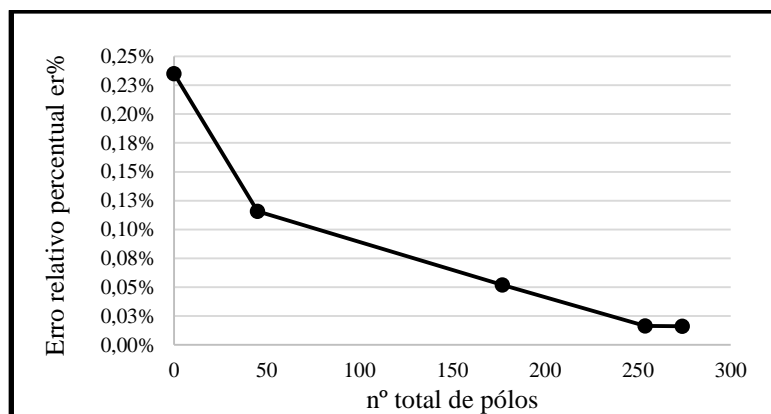


Figura 6. Curva de erro do cálculo de temperatura em $x_1=1$ para o primeiro exemplo.

Pode-se perceber pelos resultados mostrados na Fig. 6 que o aumento gradativo da quantidade de pólos reduz o erro relativo até uma determinada faixa de valores, a partir da qual este se estabiliza. Uma contínua redução dos erros seria alcançada apenas com o refinamento da malha de contorno. Ressalta-se ainda que o comportamento da curva de erro não é monótono, pois a distribuição espacial dos pólos no domínio afeta o desempenho do modelo, embora de modo secundário. Para uma mesma quantidade de pólos, o arranjo destes no domínio pode melhorar ou piorar levemente os resultados. Este efeito apenas se torna preponderante se a distribuição dos pólos é feita de forma inadequada.

A Tabela 2 apresenta uma comparação entre o MEF e MECID, tomando três valores de temperaturas calculadas pelo MEF em certos pontos, escolhidos arbitrariamente. Os resultados do MECID são extraídos de cada malha utilizada na construção da Tabela 1.

Tabela 2. Comparação entre MEF e MECID

Pontos de contorno analisados (x_1, x_2)	Temperatura dada pelo MEF	Temperatura dada pelo MECID para cada número total de pólos				
		0	45	117	254	274
(1,0;0,0)	2,5910	2,5812	2,5938	2,5925	2,5909	2,5909
(1,0;0,5)	2,6520	2,6474	2,6559	2,6531	2,6513	2,6514
(1,0;1,0)	2,5910	2,5812	2,5934	2,5924	2,5909	2,5904

Os cálculos dos valores do gradiente normal de temperatura são contabilizados na fronteira conforme a Eq. (46):

$$q(0, x_2) = \frac{\partial u(0, x_2)}{\partial n}, \tag{46}$$

Os erros relativos percentuais encontrados estão registrados na Tabela 3 e Fig. 7.

Tabela 3. Valores do erro relativo percentual para o gradiente normal de temperatura calculado no primeiro exemplo.

Nº de pólos no setor envolvente	Nº de pólos do setor interno	Erro relativo percentual
0	0	5,063350%
32	13	3,054920%
120	57	1,996058%
197	57	1,990839%
197	77	1,990306%

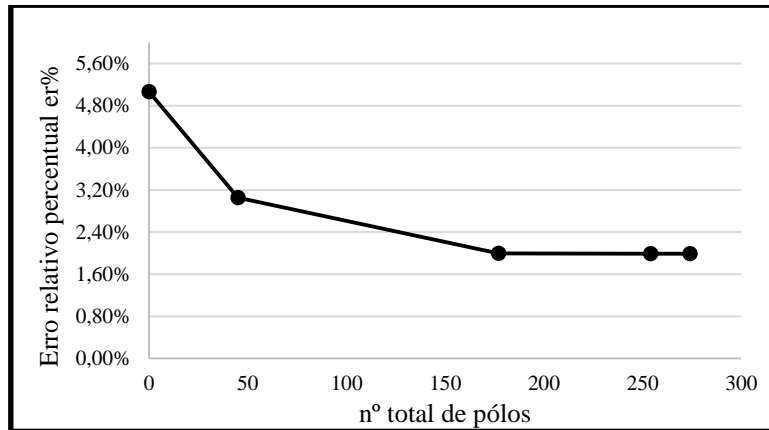


Figura 7. Curva de erro do cálculo do gradiente normal de temperatura em $x_1=0$ para o primeiro exemplo.

6.2 Segundo exemplo

Considera-se uma região com contorno irregular para o meio envolvente e também para a região interna. Visando testar a robustez do modelo proposto são incluídos contornos angulosos e circulares conforme a Fig. 8. Diferentemente do exemplo anterior, em que a função que descrevia o comportamento das propriedades variava apenas com uma direção, agora as funções dependem das duas coordenadas. Ressalta-se que tais funções precisam obedecer à equação de governo e desse modo foram escolhidas uma variação exponencial e outra na forma do produto das duas coordenadas (vide Eqs. (47) e (48)).

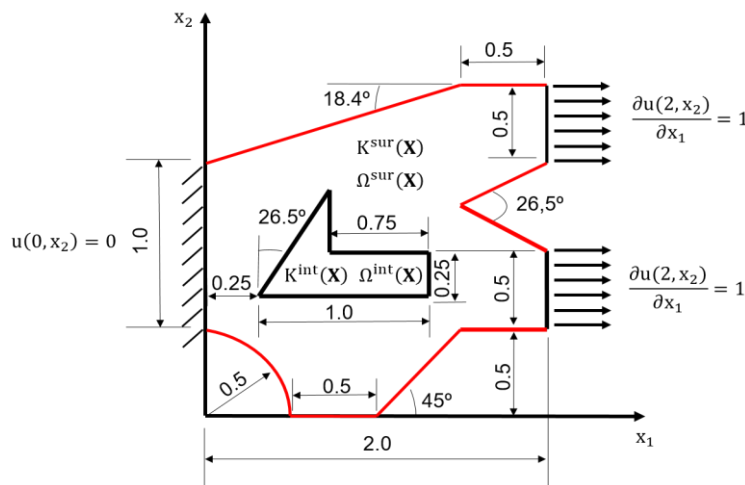


Figura 8. Domínio para o segundo exemplo. O contorno em vermelho apresenta isolamento térmico com gradiente normal de temperatura considerado nulo.

As propriedades $K^{sur}(x_1, x_2)$ e $K^{int}(x_1, x_2)$ foram definidas conforme dado pelas Eq. (47) e (48):

$$K^{sur}(x_1, x_2) = K_0 e^{0,125x_1x_2} \frac{W}{m \cdot ^\circ C}. \quad (47)$$

$$K^{int}(x_1, x_2) = K_0 x_1 x_2 \frac{W}{m \cdot ^\circ C}. \quad (48)$$

O valor de $\bar{K}(x_1, x_2)$ é obtido pela diferença entre as propriedades, de acordo com a Eq. (49) a seguir:

$$\bar{K}(x_1, x_2) = K_0 (e^{0,125x_1x_2} - x_1x_2) \frac{W}{m \cdot ^\circ C}. \quad (49)$$

Os gradientes correspondentes às Eq. (47) e (49) são:

$$\frac{\partial K^{sur}(x_1, x_2)}{\partial x_1} = K_0 0,125x_2 e^{0,125x_1x_2} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}. \quad (50)$$

$$\frac{\partial K^{sur}(x_1, x_2)}{\partial x_2} = K_0 0,125x_1 e^{0,125x_1x_2} \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}. \quad (51)$$

$$\frac{\partial \bar{K}(x_1, x_2)}{\partial x_1} = K_0 (0,125x_2 e^{0,125x_1x_2} - x_2) \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}. \quad (52)$$

$$\frac{\partial \bar{K}(x_1, x_2)}{\partial x_2} = K_0 (0,125x_1 e^{0,125x_1x_2} - x_1) \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}. \quad (53)$$

Durante o processo de discretização, a malha utilizada para o MEF contém 3635 nós com 7036 elementos triangulares e a forma da malha assemelha-se à Fig. 9. A solução de referência MEF sobre o domínio analisado pode ser observada por meio da Fig. 10. A Fig. 11 representa a estrutura da malha MECID utilizada. Diferentemente do exemplo precedente, a quantidade de elementos de contorno (externo e interno) e pólos variam gradativamente. Os resultados foram satisfatórios como apresentado pela Fig. 12 e Tabela 4.

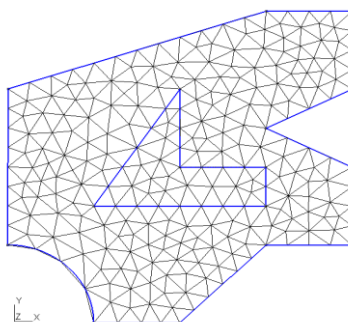


Figura 9. Modelo de malha MEF para o segundo exemplo.

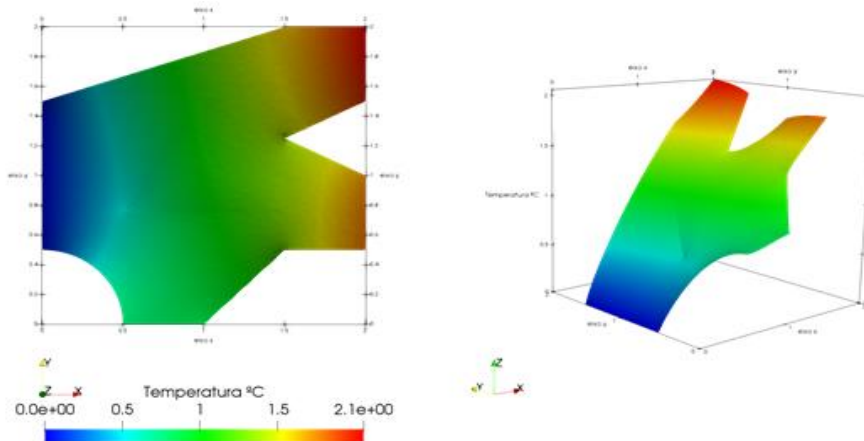


Figura 10. Solução MEF em malha estruturada para o segundo exemplo.

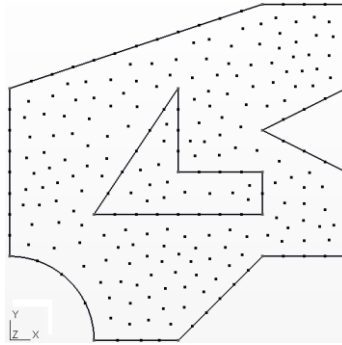


Figura 11. Modelo de malha MEC do segundo exemplo.

Tabela 4. Valores do erro relativo percentual para a temperatura e gradiente normal de temperatura calculados no segundo exemplo

Nº total de pontos nodais com pólos	Malha MEC (a)-(b)-(c)-(d)	Erro relativo percentual (Temperatura)	Erro relativo percentual (Gradiente normal de temperatura)
93	MEC 58-0-24-0	11,866085%	15,248402%
132	MEC 58-35-24-4	4,295939%	4,789080%
214	MEC 116-4-48-35	1,342017%	1,375782%
378	MEC 232-35-96-4	0,570148%	0,980338%
512	MEC 232-159-96-14	0,447106%	0,664629%
1128	MEC 232-715-96-74	0,272226%	0,473226%

(a) – nº de elementos de contorno do setor envolvente.

(b) – nº de pólos do setor envolvente.

(c) – nº de elementos de contorno do setor interno.

(d) – nº de pólos do setor interno.

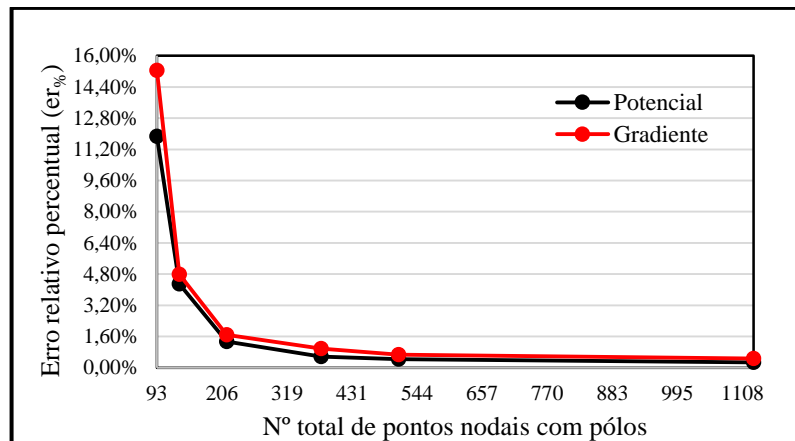


Figura 12 Curva de erro para os valores de temperatura (potencial) em $x_1=2$ e gradiente normal de temperatura em $x_1=0$ para o segundo problema.

6.3 Terceiro exemplo

Este exemplo se baseia num projeto de avaliação da variação do gradiente normal de temperatura em $x_2=0$ através do contato de uma ferramenta com superfícies a serem desbastadas. O projeto requer o isolamento térmico das partes laterais da ferramenta para que o fluxo global de calor se direcione totalmente para a sua base. A Fig. 13 esquematiza o problema em questão e apresenta as condições de contorno. Chama-se a atenção que o contorno tracejado indica o isolamento térmico mencionado, ou seja, a condição de gradiente normal de temperatura nulo. O erro medido para o cálculo da

temperatura será tomado no contorno externo do setor que contém a propriedade K^{int1} , e como já mencionado, o cálculo do gradiente de temperatura foi calculado em $x_2 = 0$.

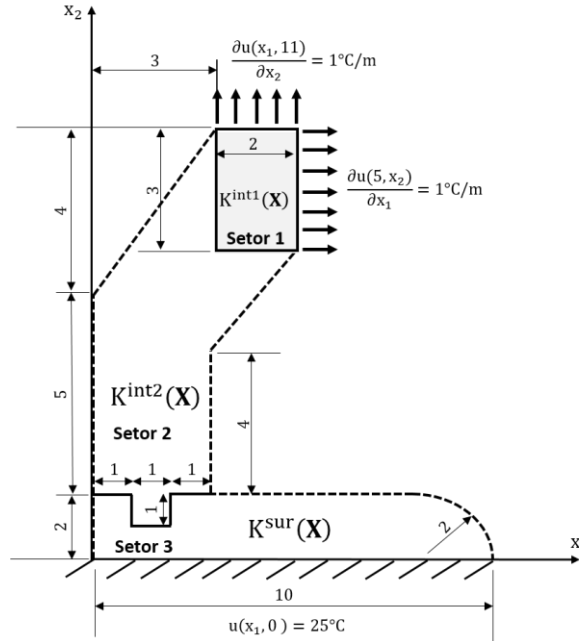


Figura 13. Domínio para o terceiro exemplo. O setor com $K^{int1}(x_1, x_2)$ recebe o fluxo de calor durante o processo de aplicação da peça.

As propriedades $K^{sur}(x_1, x_2)$, $K^{int1}(x_1, x_2)$ e $K^{int2}(x_1, x_2)$ estão definidas conforme as Eq. (54) a Eq. (56) a seguir:

$$K^{sur}(x_1, x_2) = K_0 \frac{W}{m^{\circ}C}, \quad (54)$$

$$K^{int1}(x_1, x_2) = K_0 e^{(1+0,018x_1x_2)} \frac{W}{m^{\circ}C}, \quad (55)$$

$$K^{int2}(x_1, x_2) = K_0 x_2 \frac{W}{m^{\circ}C}. \quad (56)$$

O valor de K_0 será unitário para este exemplo. As propriedades \bar{K}^1 e \bar{K}^2 são obtidas pela diferença entre K^{sur} e as propriedades K^{int1} e K^{int2} respectivamente, conforme mostram as Eq. (57) e Eq. (58):

$$\bar{K}^1(x_1, x_2) = K_0 (1 - e^{(1+0,018x_1x_2)}) \frac{W}{m^{\circ}C}, \quad (57)$$

$$\bar{K}^2(x_1, x_2) = K_0 (1 - x_2) \frac{W}{m^{\circ}C}. \quad (58)$$

As derivadas direcionais das propriedades correspondentes às Eq. (54), Eq. (57) e Eq. (58) são:

$$\frac{\partial K^{sur}(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \frac{W}{m^2 \cdot ^{\circ}C}, \quad (59)$$

$$\frac{\partial K^{sur}(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0 \frac{W}{m^2 \cdot ^{\circ}C}, \quad (60)$$

$$\frac{\partial \bar{K}^1(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -K_0 0,018 x_2 e^{(1+0,018x_1x_2)} \frac{W}{m^2 \cdot ^{\circ}C}, \quad (61)$$

$$\frac{\partial \bar{K}^1(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -K_0 0,018 x_1 e^{(1+0,018x_1x_2)} x_1 \frac{W}{m^2 \cdot ^{\circ}C}, \quad (62)$$

$$\frac{\partial \bar{K}^2(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0 \frac{W}{m^2 \cdot ^{\circ}C}, \quad (63)$$

$$\frac{\partial \bar{K}^2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -K_0 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \tag{64}$$

Durante o processo de discretização, a malha utilizada para o MEF contém 4405 nós com 8464 elementos triangulares. A Fig. 14 apresenta uma malha MEF com poucos elementos.

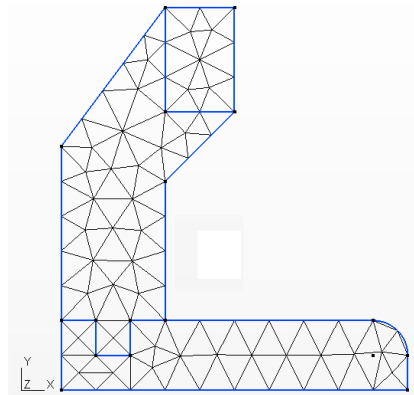


Figura 14. Modelo de malha MEF para o terceiro exemplo.

A resposta de referência MEF sobre o domínio analisado pode ser observada na Fig. 15.

A construção das malhas da MECID foi feita atentando para uma distribuição uniforme dos pontos internos conforme a Fig. 16.

Conforme a Tabela 5 e a Fig. 17, a aplicação do modelo proposto apresentou resultados que convergiram de forma satisfatória com os valores encontrados pelo MEF. Neste exemplo foi adotado por conveniência um refinamento constante de elementos de contorno, variando apenas a quantidade de pólos nos setores 1, 2 e 3 conforme Fig. 13.

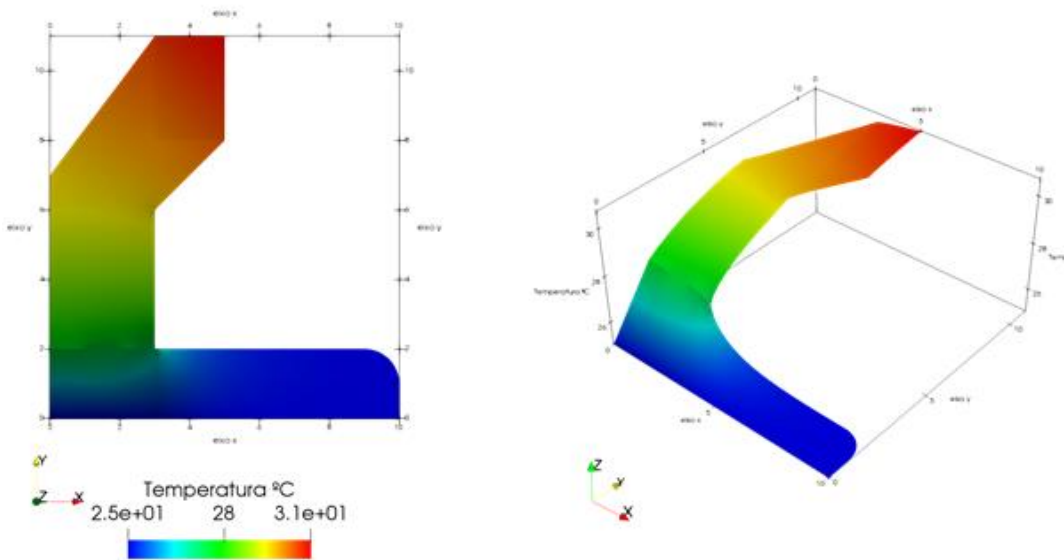


Figura 15. Solução MEF para o terceiro exemplo.

O esquema de refinamento repete o que foi utilizado no primeiro exemplo: mantêm-se as malhas de contorno, seja para o contorno envolvente como para os demais contornos envolvidos (que neste caso possuem interseção com o contorno envolvente, vide Fig. 16). Sucessivamente, o número de pólos foi acrescido, visando melhorar a aproximação das propriedades dos setores.

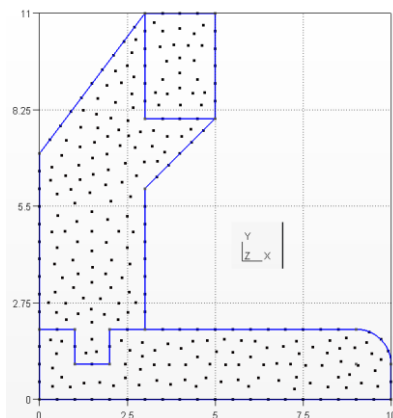


Figura 16. Modelo de malha MECID para o terceiro exemplo.

Tabela 5. Valores do erro relativo percentual para a temperatura e gradiente normal de temperatura calculados no terceiro exemplo

Nº total de pólos (Setor 1+Setor 2+Setor 3)	Malha MEC (a)-(b)-(c)	Erro relativo percentual (Temperatura)	Erro relativo percentual (Gradiente normal de temperatura)
0		0,496192%	5,622658%
29		0,269124%	0,341815%
41	MEC 172/40/108	0,137251%	0,196732%
176		0,006716%	0,047528%
196		0,006714%	0,047524%

(a) – nº de elementos de contorno da região envolvente.
 (b) – nº de elementos de contorno da região interna K^{int1}
 (c) – nº de elementos de contorno da região interna K^{int2}

Pode-se perceber que, para a simulação do potencial, o modelo com menor número de pólos já retornou bons resultados, e o acréscimo dos pólos apenas diminui suavemente o nível de erro, que foi bastante reduzido. Contudo, para os valores de fluxo, colhidos apenas na base da ferramenta (em $x_2=0$), a malha inicial com menor número de pólos apresentou erro elevado. Surpreendentemente, este erro decaiu rapidamente, conforme mostra a Fig. 17.

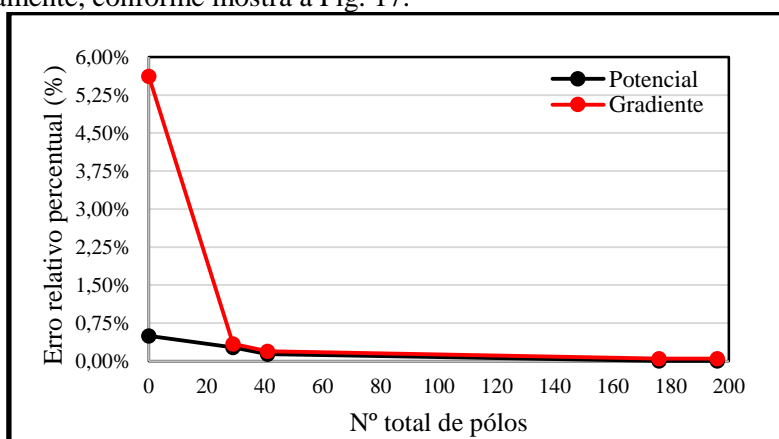


Figura 17. Curva de erro para os valores de temperatura (potencial) e gradiente normal de temperatura para o terceiro problema.

Conclusões

Neste artigo foram apresentados exemplos de aplicação de um modelo do MEC em problemas de Laplace, considerando regiões com setores suavemente heterogêneos. Este modelo associa duas recentes formulações: a MECID, voltada à transformação de integrais de domínio com núcleos não autoadjuntos em integrais de contorno usando funções de base radial; e a TSD, direcionada à modelagem de regiões com diferentes propriedades constitutivas no domínio usando a metodologia clássica do MEC, apenas computando as heterogeneidades tais como fossem fontes de energia.

A combinação destas duas técnicas permitiu a utilização direta da solução fundamental associada ao problema de Laplace, evitando adaptações complicadas. Os bons resultados alcançados estão ligados à consistência e a afinidade das duas recentes metodologias, que isoladamente já haviam sido bem-sucedidas em diversos problemas, mas ainda não haviam sido aplicadas em conjunto nessa classe de problemas.

Pode-se constatar que, mesmo diante das dificuldades geométricas impostas no segundo e terceiro exemplos propostos, particularmente no que tange a inclusão de contornos angulosos e funções mais elaboradas representando as propriedades do material, a precisão do modelo aqui apresentado foi satisfatória. Os valores de erro percentual puderam ser reduzidos gradativamente com o aumento da quantidade de pontos nodais, auxiliado pela inserção crescente de pólos. Além desta redução, os valores alcançados para o erro médio foram baixos, indicando a convergência do esquema.

O processo de regularização foi efetivo também neste problema em que a transformação das integrais de domínio em integrais de contorno se referiram às derivadas não nulas das propriedades constitutivas. Diante das peculiaridades do modelo, que envolvem duas integrais de domínio, duas interpolações foram aplicadas, mas não foram percebidas imprecisões relacionadas a essa dupla aplicação da MECID.

Diante desses bons resultados, as aplicações aos problemas setorialmente heterogêneos com variação nas propriedades constitutivas governados pela Equação de Helmholtz se afiguram como sendo o objeto do prosseguimento dessa pesquisa.

Agradecimentos

Agradecemos a Capes e ao INMETRO pelo apoio à pesquisa.

Referências

- [1] H. M. Barcelos and C. F. Loeffler. The direct interpolation boundary element method applied to smoothly inhomogeneous Laplace's problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 105, n. 1, pp. 155-164, 2019.
- [2] M. D. Buhmann. *Radial Basis Function: Theory and Implementations*. Cambridge University Press, Giessen, 2003.
- [3] D. Nardini and C. A. Brebbia. Transient Dynamic Analysis by the Boundary Element Method. In: C.A. Brebbia ed, *Proceedings of BEM V*, pp. 719-730, 1983.
- [4] C. F. Loeffler, A.L. Cruz and A. Bulcão. Direct Use of radial basis interpolation functions for modelling source terms with the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 50, n.1, pp. 97-108, 2015.
- [5] C. F. Loeffler and W. J. Mansur. A Regularization scheme applied to the direct interpolation boundary element technique with radial basis functions for solving eigenvalue problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 74, n.1, pp. 14-18, 2017.
- [6] F. J. Rizzo and D. J. Shippy. A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. *International Journal. Solids Structures*, vol. 4, n.12, pp 1161-1179, 1968.

- [7] J. C. F. Telles. *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1983.
- [8] M. C. Cavalcanti and J. C. F. Telles. Biot's consolidation theory - application of BEM with time independent fundamental solutions for poro-elastic saturated media. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 27, n.1, pp. 145-157, 2003.
- [9] A. J. Kassab and E. Divo. A generalized boundary integral equation for isotropic heat conduction with spatially varying thermal conductivity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 18, n.1, pp. 273-286, 1996.
- [10] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles and L. C. Wrobel. *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.
- [11] S. A. Sarra. Integrated Multiquadric Radial Basis Function Approximation Methods. *Computers & Mathematics with applications*, vol 51, n.8, pp. 1283-1296, 2006.
- [12] P. W. Partridge, C. A. Brebbia and L.C. Wrobel. The dual reciprocity boundary element method. *Computational Mechanics Publications*, Southampton, 1992.
- [13] K. El Harrouni, D. Ouazar, L. C. Wrobel and A. H. D. Cheng. Global interpolation function based DRBEM applied to Darcy's flow in heterogeneous media. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 16, n.1, pp. 281-285, 1995.
- [14] P. A. Ramachadran. Boundary element methods in transport phenomena. *Computational Mechanics Publications*, Southampton, 1994.
- [15] M. M Perez and L. C. Wrobel. A general integral equation formulation for homogeneous orthotropic potential problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 10, n.4, pp. 323-332, 1992.
- [16] C. F. Loeffler and R. D. Pereira. Dual reciprocity boundary element applied to inhomogeneous continua medium (in Portuguese). In: Proceedings of the XXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE), pp. 1-10, 2004.
- [17] C. F. Loeffler and W. J. Mansur. Quasi-dual reciprocity boundary-element method for incompressible flow: Application to the diffusive-advective equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 58, n.8, pp. 1167-1186, 2003.
- [18] P. H. Wen, M. H. Aliabadi and D. P. Rooke. A New Method for Transformation of Domain Integrals to Boundary Integrals in Boundary Element Method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, n.11, pp. 1055-1065, 1998.
- [19] P. H. Wen, M. H. Aliabadi and A. Young. Transformation of domain integrals to boundary integrals in BEM analysis of shear deformable plate bending problems. *Computational Mechanics*, vol. 24, n.4, pp. 304-309, 1999.
- [20] X. W Gao. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 26, n.10, pp. 905-916, 2002.
- [21] C. F. Loeffler, H. M. Barcelos, W. J. Mansur, and A. Bulcão. Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 61, n.1, pp. 218-225, 2015.
- [22] C. F. Loeffler, W. J. Mansur. Sub-regions without subdomain partition with boundary elements. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 74, n.1, pp. 14-18, 2016.
- [23] C. F. Loeffler, J. P. Barbosa and H. M. Barcelos. Performance of BEM superposition technique for solving sectorially heterogeneous Laplace's problems with non-regular geometry. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol 93, n.1, pp. 105-111, 2018.
- [24] R. V. Pessolani. An hp-adaptive hierarchical formulation for the boundary element method applied to elasticity in two dimensions. *Journal of the Brazilian Society Mechanical Sciences*, vol 24, n.1, pp. 23-45, 2002.
- [25] B. N. Delaunay. Sur la sphère vide. *Izvestia Akademil Nauk SSSR. Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennykh*, 7:793-800, 1934.