

## A 1DBEM/BEM COUPLING FORMULATION FOR REINFORCED DOMAINS

**Antonio Rodrigues Neto<sup>a</sup>**

**Edson Denner Leonel<sup>a</sup>**

*antonio.rodrigues.neto@usp.br*

*edleonel@usp.br*

<sup>a</sup> *University of São Paulo, São Carlos School of Engineering, Department of Structural Engineering – Av. Trabalhador São Carlense, 400, 13566-590, São Carlos - SP, Brazil.*

**Abstract.** This work presents a coupled numerical formulation based on the Boundary Element Method (BEM) for the mechanical analysis of two-dimensional non-homogeneous reinforced domains. In this technique, the material matrix (two-dimensional domain) is represented by the usual two-dimensional singular BEM formulation, considering either isotropic or anisotropic behaviors. Whereas a one-dimensional approach of the BEM, called 1DBEM, is used to represent the reinforcements, which can be understood as trusses or fibers. The 1DBEM is based on an axial fundamental solution for elastic 1D domains, which can be easily found in the literature. The interaction between the matrix and reinforcements is described by an adherence force over the reinforcements' line, considering no relative displacements (perfect adherence). These aspects characterize the 1DBEM/BEM coupling as an alternative to the usual FEM/BEM technique, which has been widely applied in the literature for modelling this type of problem. Nonhomogeneous reinforced domains can be correctly represented in this formulation by the sub-region technique in the 2D BEM, already presented in the literature. In addition, the use of connection fiber-elements enable the crossing between reinforcements and sub-regions' interfaces. A one-dimensional approach of elastoplasticity is supported over to the 1DMEC elements, which can represent the mechanical degradation of the reinforcement's material. Numerical applications exhibits equally accurate displacements results and better stress/force results obtained by the proposed formulation, when compared to the usual FEM/BEM approach. The 1DBEM/BEM results exhibit minor perturbations in the force results near discontinuity points, which are usually observed in this type of coupled formulation. Finally, the numerical applications show accurate and stable results in the modelling of nonhomogeneous reinforced structures, when compared to the reference results available in the literature, which demonstrates the robustness of the formulation proposed in this work.

**Keywords:** Reinforced domain, BEM/BEM, FEM/BEM.

## 1 Introdução

Para a análise de materiais e estruturas reforçadas, soluções analíticas são consideravelmente restritivas, o que leva à necessidade do uso de estratégias numéricas. Vale mencionar também que tais sistemas estruturais são de grande importância para a engenharia, pois possibilitam o projeto de componentes e construções de alta resistência e baixo peso (CITARELLA [1] e [2]). Tanto materiais quanto estruturas reforçadas podem ser tratados, no campo da mecânica dos materiais, como meios reforçados.

Os meios reforçados usualmente acoplam elementos estruturais que podem ser convenientemente modelados com diferentes abordagens. Os elementos de reforço, como partículas ou fibras, podem ser representados por chapas em estado plano de tensão ou treliças e vigas unidimensionais. Enquanto que o meio (também chamado de matriz) usualmente deve ser tratado como um sólido. Por isso, abordagens baseadas no acoplamento entre diferentes métodos numéricos, tais como o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) são amplamente aplicados para a representação destes problemas. Nestas abordagens, cada método numérico representa a subestrutura na qual apresenta maiores vantagens.

Neste contexto, destaca-se o surgimento do acoplamento MEC/MEF, inicialmente proposto por Zienkiewicz, Kelly e Bettes [3]. Para a representação da matriz é utilizado o MEC, visando suas reconhecidas vantagens para representação de sólidos bi e tridimensionais, como a menor dimensionalidade da malha de discretização. Os elementos de reforço são representados por abordagens uni e bidimensionais do MEF, tendo em vista sua reconhecida eficiência em estruturas reticuladas. Desde então, diversos autores utilizaram esta abordagem em novos desenvolvimentos, fazendo com que exista uma vasta literatura sobre o tema. Revisões bibliográficas completas e abrangentes sobre o tema podem ser encontradas em Stamos e Beskos [4], Beer e Watson [5], Ganguly, Layton e Balakrishna [6], Elleithy, Tanaka e Guzik [7] e Bia et al. [8].

Embora consolidado e reconhecidamente eficiente, o acoplamento MEC/MEF apresenta algumas desvantagens, principalmente relacionadas a instabilidades numéricas na representação de força de contato e tensão resistente nos elementos enrijecedores. Abordagens utilizando somente o MEC mostraram levar à menores instabilidades nestas repostas (LEITE *et al.* [9], BOTA e VENTURINI [10]). Com o uso da técnica de sub-regiões (RIZZO e SHIPPY [11]), é possível representar matriz e subestruturas de reforço através de uma mesma abordagem do MEC. Porém, no caso de estruturas e materiais reforçados por fibras, a representação simplificada destas subestruturas como elementos unidimensionais se perde, levando à modelos mais custosos computacionalmente.

Neste panorama, o presente trabalho propõe um modelo formulado com base no usual acoplamento MEC/MEF para meios reforçados por fibras, as quais são representados por elementos unidimensionais com resistência apenas axial. Neste acoplamento, a interação entre os elementos estruturais (domínio e enrijecedor) é descrita por uma força de aderência, considerando inexistentes deslocamentos relativos (aderência perfeita). O domínio é descrito por uma formulação singular bidimensional do MEC, enquanto que uma abordagem unidimensional do MEC (MEC1D) é utilizada para a representação mecânica dos elementos enrijecedores, em substituição ao MEF no acoplamento usual. O MEC1D faz uso da solução fundamental uniaxial, sobre a qual mais detalhes podem ser encontrados em Antes [12], Seixas, Marques e Filgueiras [13] e Cruz [14]. O acoplamento proposto é denominado MEC/MEC1D. Segundo exemplos numéricos analisados, o modelo demonstrou resultados mais estáveis em comparação ao acoplamento MEC/MEF, principalmente para representação de tensões e força de aderência nas regiões mais críticas, próximas a descontinuidades.

Domínios não-homogêneos podem ser representados por meio da técnica de sub-regiões apresentada por Rizzo e Shippy [11] aplicada à formulação bidimensional do MEC. Tal técnica se baseia na imposição de condições de compatibilidade de deslocamentos e de equilíbrio de tensões na interface de sub-regiões adjacentes. Além disso, os elementos enrijecedores (fibras) podem se posicionar livremente na estrutura, com a possibilidade de cruzamento com interfaces de sub-regiões. Para isso, é proposta a utilização de fibras descontínuas sobre o cruzamento com interfaces, sendo ligadas por elementos de conexão (*connection elements*). Esta estratégia se baseia no emprego de um elemento enrijecedor especial sobre a interface, permitindo que a formulação de contorno seja

adequadamente aplicada e que a fibra apresente um comportamento contínuo nesta região. Dessa forma, a não-homogeneidade material e estrutural pode ser representada de forma geral, permitindo o livre posicionamento de fibras sobre o meio.

Dessa forma, o modelo resultante visa dar um passo na direção da representação numérica de quaisquer meios não-homogêneos reforçados por elementos unidimensionais, desde *fiber-reinforced materials* até estruturas com presença de armadura. Destacando este segundo exemplo, é bastante comum que a armadura seja composta por elementos aço, os quais apresentam um característico comportamento elastoplástico quando submetidos a tensões acima do limite elástico (chamado também de limite de escoamento). Visando tornar o modelo mais verossímil neste cenário, o comportamento elastoplástico é também adicionado à formulação dos elementos enrijecedores dentro do modelo proposto. Uma abordagem da plasticidade unidimensional é utilizada, com um modelo constitutivo bi linear isótropo. Assim, a formulação proposta se aproxima mais do comportamento real de estruturas enrijecidas por armadura, se tornando de grande potencial para desenvolvimentos futuros neste tema.

## 2 Formulação do acoplamento linear

### 2.1 Equações integrais em deslocamentos pelo MEC

As formulações do MEC utilizadas neste trabalho são válidas para domínios ( $\Omega$ ) homogêneos e de comportamento linear-elástico, cujo contorno ( $\Gamma$ ) está sujeito a carregamentos estáticos. As equações integrais do MEC podem ser obtidas pela aplicação da técnica de resíduos ponderados sobre a equação de equilíbrio do problema. Para tal, a função ponderadora adotada deve ser a solução do problema fundamental, a qual é conhecida como solução de Kelvin, no caso de domínios isotrópicos. As soluções fundamentais podem ser encontradas em Brebbia e Dominguez [15]. Para problemas elastostáticos bidimensionais, a equação que descreve a técnica de resíduos ponderados pode ser expressa por:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_{ij}^* d\Omega = 0 \quad . \quad (1)$$

Onde  $b_i$  são as forças de campo,  $u_{ij}^*$  são as soluções fundamentais em deslocamentos,  $\sigma_{ij}$  são as tensões de Cauchy e  $\Omega$  o domínio.

Aplicando sobre a Eq. (1) as equações de equilíbrio e compatibilidade do problema fundamental e realizando ainda um processo de integração por partes, obtém-se:

$$u_i^s + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega \quad . \quad (2)$$

Onde  $u_i^s$  representa os deslocamentos de um ponto fonte  $s$  interno ao domínio, enquanto que  $u_j$  e  $p_j$  são deslocamento e força de superfície nos pontos pertencentes ao contorno. Esta expressão é conhecida por Identidade Somigliana e permite obter os deslocamentos em qualquer ponto interno ao domínio em função das grandezas do contorno.

Sobre a Eq. (2) é aplicada a técnica denominada processo limite, na qual o ponto fonte  $s$  é levado para o contorno. Nesta situação, as integrações sobre  $\Gamma$  se tornam impróprias sobre a região do ponto  $s$ . Este problema é tratado por meio da técnica de subtração de singularidade, para a qual o conceito de Valor Principal de Cauchy é utilizado, conforme detalhado em Aliabadi, Hall e Phemister [16]. Assim, é obtida a equação integral em deslocamentos, chamada também de forma singular do MEC:

$$c_{ij}^s u_j^s + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega} p_{ij}^* b_j d\Omega \quad . \quad (3)$$

Onde  $c_{ij}^s$  é um termo livre, dado por  $\delta_{ij}/2$  para pontos  $s$  posicionados sobre contornos suaves, sendo  $\delta_{ij}$  o operador delta de Kronecker. Esta equação é utilizada neste trabalho para a representação da matriz do problema enrijecido, a qual é considerada como um domínio bidimensional.

Para tal, a aproximação das grandezas físicas deve ser introduzida, por meio da discretização do contorno em partes finitas denominadas elementos de contorno. O contorno é composto naturalmente por uma ordem dimensional abaixo do problema, i.e., para domínios bidimensionais a malha é unidimensional e para domínios unidimensionais (como as fibras) o contorno é composto apenas pelos pontos de extremidades do domínio.

Desse modo, a Eq. (3) deve ser avaliada de forma que cada nó da malha de contorno seja considerado como o ponto fonte  $s$ . Isto possibilita escrever o sistema algébrico de equações que relaciona as grandezas  $u$  e  $p$  do contorno, levando à solução do problema. Vale mencionar também que a solução deste sistema linear consiste na inversão de uma matriz que, diferentemente do MEF, é não-simétrica e não-esparsa em domínios homogêneos. Em contrapartida, no MEC o sistema é composto por um número substancialmente menor de incógnitas, tendo em vista a menor dimensionalidade da malha, o que equilibra o tempo de processamento em relação aos métodos de domínio.

A abordagem unidimensional, denominada aqui de MEC1D, pode ser obtida de forma análoga partindo da aplicação de resíduos ponderados sobre a equação de equilíbrio do problema unidimensional:

$$\int_0^L (EAu_{,ii} + p) u^* dx = 0 . \quad (4)$$

Onde  $u^*$  é a solução fundamental para o deslocamento axial,  $i$  representa unicamente a direção axial do domínio e  $p$  é a carga distribuída aplicada sobre o comprimento do domínio.

As soluções fundamentais unidimensionais podem ser encontradas na literatura em Antes [12] e em Cruz [14]. Estas soluções tratam de domínios solicitados apenas axialmente (como treliças) e podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} u_{sf}^* &= -\frac{|x_f - x_s|}{2EA} \\ N_{sf}^* &= -\frac{\text{sign}(x_f - x_s)}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

Onde os índices  $s$  e  $f$  representam, respectivamente, os pontos fonte e campo. Já a variável  $x$  é a coordenada de tais pontos no sistema local. Pode-se observar que, diferentemente do problema bidimensional, estas soluções fundamentais não apresentam singularidades.

Em seguida, integração por partes é aplicada e a equação de equilíbrio do problema fundamental é substituída na Eq. (4), permitindo escrever:

$$u_i - N_{i1}^* u_1 + N_{iL}^* u_L = u_{i1}^* N_1 + u_{iL}^* N_L + \int_0^L \phi_k(x) u_{,ix}^* p_k dx . \quad (6)$$

Onde os índices subscritos 1 e  $L$  representam os pontos de extremidade do elemento unidimensional e  $\phi_k(x)$  são as funções de forma, que interpolam os valores nodais  $p_k$  da carga distribuída.

Note que, conforme mencionado anteriormente, o contorno é descrito somente pela consideração de  $i=1$  e  $i=L$  na Eq. (6), enquanto que para qualquer outro valor de  $i$  é obtida uma equação de ponto interno. A consideração destes dois pontos já leva à solução do problema em deslocamentos e esforços normais. Porém, a consideração de pontos internos no sistema é necessária para a melhor representação da carga distribuída ( $p_k$ ), visto que o número de pontos limita a ordem de aproximação desta grandeza. No problema de acoplamento esta estratégia é utilizada, tendo em vista que a força de aderência entre matriz/fibra é representada pelos valores  $p_k$ . Dessa forma, esta equação pode ser expressa matricialmente por:

$$\bar{\mathbf{H}}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{G}}\mathbf{n} + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{p} . \quad (7)$$

Onde as matrizes  $\bar{\mathbf{H}}$  e  $\bar{\mathbf{G}}$  contêm os valores associados com a integração das soluções fundamentais em esforço normal e deslocamentos, respectivamente.  $\bar{\mathbf{G}}$  resulta do termo de integração de domínio.

## 2.2 Acoplamento domínio/enrijecedor

Para formular o acoplamento, considera-se um domínio bidimensional  $\Omega$  cujo contorno  $\Gamma$  foi discretizado em elementos de contorno, os enrijecedores são imersos em  $\Omega$  e posicionados sobre a linha  $\bar{\Gamma}$ , também discretizada em elementos do MEC1D. Domínio e enrijecedor são analisados separadamente, sendo que a interação entre eles é dada por uma carga distribuída ao longo da linha  $\bar{\Gamma}$ , chamada de força de aderência ou contato. Dessa forma, a consideração de acoplamento perfeito, i.e., inexistência de deslocamentos relativos tonará o acoplamento aqui formulado semelhante ao usual MEC/MEF, salvo a substituição do método numérico utilizado para representar os enrijecedores. A Figura 1 ilustra a aplicação da técnica utilizada.

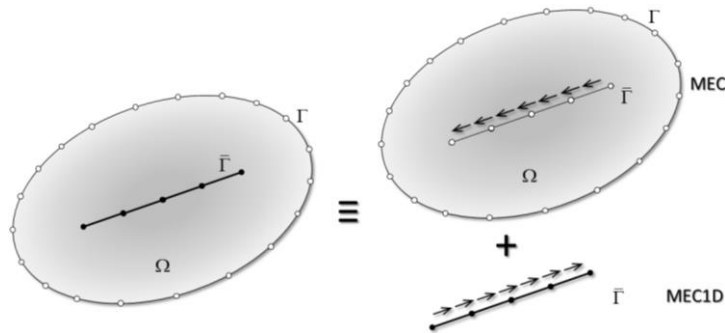


Figura 1: Esquema do acoplamento domínio/enrijecedor.

São denominados  $\mathbf{f}_E$  e  $\mathbf{f}_D$  os valores nodais da força de aderência e  $\mathbf{u}_E$  e  $\mathbf{u}_D$  os deslocamentos nodais no enrijecedor e no domínio, respectivamente. Assim, a interação entre os elementos estruturais pode ser traduzida pelas relações de equilíbrio e compatibilidade:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_E &= -\mathbf{f}_D \\ \mathbf{u}_E &= \mathbf{u}_D \end{aligned} \quad (8)$$

Para as equações de contorno do domínio, a força de aderência é considerada como uma força de campo, fazendo com que as integrais de domínio presentes na Eq. (2) e Eq. (3) possam ser avaliadas somente sobre a linha  $\bar{\Gamma}$ . A partir da Eq. (3), a equação integral do MEC bidimensional pode ser escrita para os pontos do contorno, de forma matricial, como:

$$\mathbf{H}_{CC}\mathbf{u}_c = \mathbf{G}_{CC}\mathbf{p}_c + \mathbf{G}_{CF}\mathbf{f}_D \quad (9)$$

A Identidade Somigiliana – Eq. (2) – deve ser aplicada para os pontos presentes na linha do enrijecedor ( $\bar{\Gamma}$ ), pois estes representam pontos internos ao domínio. Assim, escreve-se a segunda expressão matricial do acoplamento:

$$\mathbf{u}_D = \mathbf{G}_{FC}\mathbf{p}_c - \mathbf{H}_{FC}\mathbf{u}_c + \mathbf{G}_{FF}\mathbf{f}_D \quad (10)$$

Por fim, é necessário escrever a equação que descreve o comportamento dos enrijecedores. Para o modelo proposto, esta expressão é dada pela Eq. (7), a qual pode ser reescrita matricialmente como:

$$\mathbf{K}_E\mathbf{u}_E = \mathbf{G}_E\mathbf{f}_E \quad (11)$$

Desde que as matrizes sejam rearranjadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_E &= (\mathbf{R})(\bar{\mathbf{G}})^{-1} \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{R})^T \\ \mathbf{G}_E &= (\mathbf{R})(\bar{\mathbf{G}})^{-1} \bar{\bar{\mathbf{G}}}(\mathbf{R})^T \end{aligned} \quad (12)$$

Onde  $\mathbf{R}$  é matriz de rotação do elemento enrijecedor, a qual relaciona os sistemas de coordenadas locais e globais. Esta transformação é necessária pois as matrizes da Eq. (7) são escritas no sistema local.

As relações de compatibilidade e equilíbrio da Eq. (7) são substituídas na Eq. (8), Eq. (9) e na Eq. (10). Assim, é possível escrever um sistema algébrico que relaciona as grandezas no contorno e nos enrijecedores:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CC} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{CF} \\ \mathbf{H}_{FC} & \mathbf{I} & -\mathbf{G}_{FF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_E & \mathbf{G}_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{u}_D \\ \mathbf{f}_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{CC} \\ \mathbf{G}_{FC} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \{\mathbf{p}_C\} \quad (13)$$

Onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Este sistema algébrico leva à solução do problema em deslocamentos e forças de superfície para todos os pontos (contorno e enrijecedores). Para tal, a aplicação das condições de contorno é realizada por meio da técnica de troca de colunas, segundo Brebbia e Dominguez [15]. A partir disto, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{CC} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{CF} \\ \mathbf{B}_{FC} & \mathbf{I} & -\mathbf{G}_{FF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_F & \mathbf{G}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_C \\ \mathbf{u}_D \\ \mathbf{p}_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{CC} \\ \bar{\mathbf{B}}_{FC} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \{\tilde{\mathbf{p}}_C\} \quad (14)$$

No qual as matrizes  $\mathbf{A}_{CC}$ ,  $\mathbf{B}_{FC}$ ,  $\bar{\mathbf{A}}_{CC}$  e  $\bar{\mathbf{B}}_{FC}$  resultam da troca de colunas das respectivas matrizes da Eq. (13). As grandezas do contorno são descritas pelos vetores  $\tilde{\mathbf{p}}_C$  e  $\mathbf{X}_C$ , para os valores conhecidos e desconhecidos, respectivamente.

### 2.3 Técnicas para domínios não homogêneos

Para que a formulação de acoplamento possa ser aplicada a domínios não-homogêneos, o primeiro passo se trata da utilização da técnica de sub-regiões do MEC (RIZZO e SHIPPY [11]). Esta se baseia na discretização de cada região homogênea, de forma que a interface entre as diferentes regiões seja constituída de pares de elementos na mesma posição, nos quais cada um pertence a um dos subdomínios. A Figura 2 abaixo ilustra a aplicação da técnica.

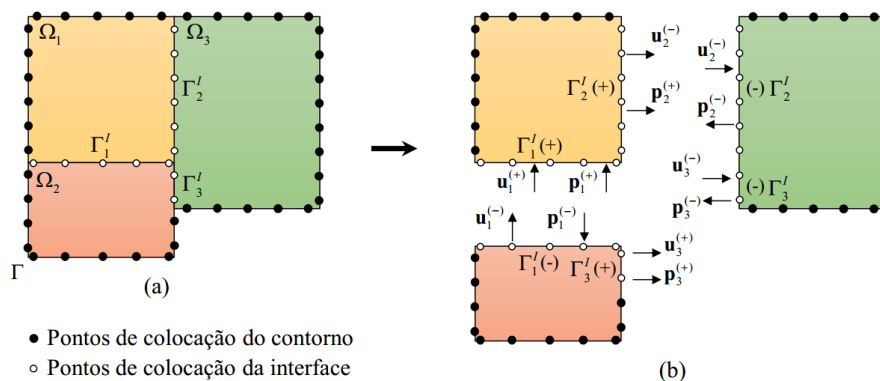


Figura 2: Discretização de um (a) domínio não homogêneo em (b) subdomínios, Andrade (2017).

Cada sub-região é analisada separadamente, ou seja, a forma singular do MEC – Eq. (3) – pode ser aplicada para cada subdomínio  $i=1, \dots, N_{sr}$ . Por sua vez, os pontos de colocação pertencentes às interfaces apresentam, diferentemente dos pontos do contorno externo, deslocamentos e forças de

superfície desconhecidos. Dessa forma, para estes pontos devem ser escritas equações de compatibilidade, considerando contato perfeito:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k1}^I &= \mathbf{u}_{k2}^I \\ \mathbf{p}_{k1}^I + \mathbf{p}_{k2}^I &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (15)$$

Onde o índice  $k$  representa o subdomínio do ponto, 1 e 2 representam cada um dos pares de nós coincidentes e  $I$  representa seu posicionamento sobre a interface.

Escrevendo a equação integral do MEC em deslocamentos para cada subdomínio  $k$  e aplicando as condições da Eq. (15) para os pontos pertencentes às interfaces ( $I$ ), pode-se escrever a equação integral do MEC de uma forma global como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k1}^B & \mathbf{H}_{k1}^I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{k2}^I & \mathbf{H}_{k2}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{k1}^B \\ \mathbf{u}_{k1}^I \\ \mathbf{u}_{k2}^B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{k1}^B & \mathbf{G}_{k1}^I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{k2}^I & \mathbf{G}_{k2}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{k1}^B \\ \mathbf{p}_{k1}^I \\ \mathbf{p}_{k2}^B \end{Bmatrix} + \bar{\mathbf{B}}_{k1} \mathbf{b}_{k1} + \bar{\mathbf{B}}_{k2} \mathbf{b}_{k2}. \quad (16)$$

Onde as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  englobam as integrações dos núcleos fundamentais em força de superfície e deslocamento, respectivamente. Os índices destas matrizes seguem a lógica detalhada para a Eq. (15) anteriormente. A matriz  $\bar{\mathbf{B}}$  contém as integrações dos termos de domínio da forma singular do MEC, as quais são independentes para cada sub-região. Percebe-se que o rearranjo das equações desta expressão permite que esta seja reescrita matricialmente da mesma forma da Eq. (9), ou seja, sem prejuízo à formulação do acoplamento.

A formulação do acoplamento descrita até então exige que todos os elementos enrijecedores estejam inseridos totalmente dentro de um subdomínio do MEC bidimensional. Portanto, o passo seguinte se refere à superação desta limitação. Para tal, sobre cada cruzamento entre enrijecedor e interface de subdomínios é utilizado um “*connection element*”, ou elemento de junta, ilustrado pela Figura 3.

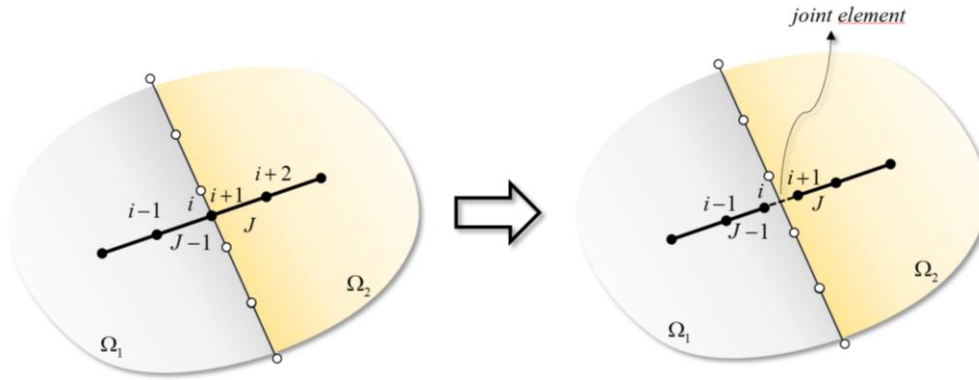


Figura 3: Estratégia utilizada para enrijecedores que cruzam interfaces de subdomínios

A estratégia é definida de forma que, sobre cada cruzamento entre enrijecedor e interface, existam dois nós da malha de enrijecedores sobrepostos ( $i$  e  $i+1$  na Figura 3). Nesta situação, o modelo computacional movimentará os nós  $i$  e  $i+1$  sobre a linha de cada um dos elementos  $J-1$  e  $J$ , deslocando-os um quarto do comprimento total do elemento. Este procedimento é semelhante à utilização do “elemento de quina” na abordagem do MEC descrita por Aliabadi [17] para elementos posicionados sobre regiões de vetor normal descontínuo. Entre estes dois nós é então criado um *connection element*.

O *connection element* não é considerado nas integrais dos núcleos fundamentais sobre o contorno, na Eq. (9) e na Eq. (10), visto que não está inserido em um domínio bidimensional definido. Porém, sua rigidez é considerada na construção das matrizes dos elementos enrijecedores – Eq. (11), uma vez que esta expressão é independente do domínio bidimensional no qual o elemento é inserido. Dessa forma, a continuidade da fibra é garantida, mesmo que este o *connection element* não exista do ponto de vista da formulação de contorno bidimensional.

### 3 Aplicação do modelo de acoplamento linear

Neste primeiro exemplo de aplicação da formulação proposta, uma estrutura enrijecida bidimensional é analisada mecanicamente. Seu comportamento é linear elástico com matriz (domínio bidimensional) isotrópico, no qual são inseridas três fibras longas, conforme ilustrado na Figura 4. Esta figura também apresenta os valores das seguintes constantes: módulos de Young de ambos os domínios bidimensionais ( $E_I$  e  $E_{II}$ ) e seus coeficientes de Poisson ( $\nu_I$  e  $\nu_{II}$ ), área ( $A$ ) e módulo de Young das fibras ( $E_F$ ) e os carregamentos distribuídos  $q$  e  $P$ . As fibras cruzam a interface das sub-regiões bidimensionais, o que permite verificar a atuação do *connection element* na resolução do problema. As propriedades físicas e valores de carregamentos são citados na própria figura, cujas unidades físicas podem ser consideradas como qualquer conjunto compatível.

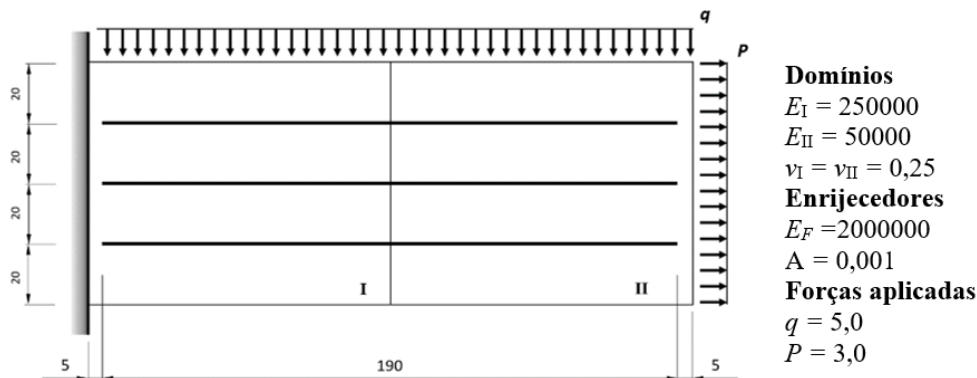


Figura 4: Estrutura analisada no exemplo de aplicação.

Para a análise via MEC, o domínio bidimensional foi discretizado por uma malha composta de 72 elementos quadráticos, totalizando 152 nós. Para os enrijecedores foram construídas diferentes malhas visando demonstrar a convergência dos resultados e a influência da discretização. É utilizado o modelo proposto (acoplamento MEC/MEC1D), além do já consolidado acoplamento MEC/MEF para a análise mecânica.

Como referência para os resultados, foi construído um modelo no software ANSYS composto por 16000 elementos de chapa e 570 elementos de treliça lineares (PLANE 182 e LINK180 respectivamente). O software se baseia em uma formulação de MEF puro, sendo que os enrijecedores devem ser adicionados com nós coincidentes com a malha de domínio. Este modelo apresentou convergência de malha, se mostrando confiável para utilização como referência.

São analisados primeiramente os resultados nas fibras, por meio do esforço normal ao longo de seu comprimento, descrito pela variável  $S$  nos gráficos seguintes. A Figura 5 ilustra os resultados para a fibra superior, quando se utilizam os três diferentes graus de aproximação para a malha de elementos enrijecedores. O mesmo número de elementos enrijecedores (120) foi utilizado nestas três análises. Os resultados são apresentados para o acoplamento MEC/MEC1D e a série denominada ANSYS representa os resultados de referência.

Com base na Figura 5 é possível observar que as três ordens de aproximação levaram a resultados coerentes em relação à referência (ANSYS). Percebe-se também que a região próxima ao cruzamento entre enrijecedor e interface ( $S = 1$  m) apresenta um comportamento com oscilações nos valores de tensão. Contudo, a principal conclusão desta análise é a comparação entre os resultados dos diferentes graus de aproximação, o que permite constatar que o aumento da ordem contribui positivamente para a diminuição destas oscilações. Este comportamento já foi observado em regiões de extremidade de enrijecedores na literatura para o acoplamento MEC/MEF (LEITE, CODA e VENTURINI [9]), quando é considerada aderência perfeita. Portanto, sua observação é esperada nas regiões próximas a descontinuidades no modelo proposto.



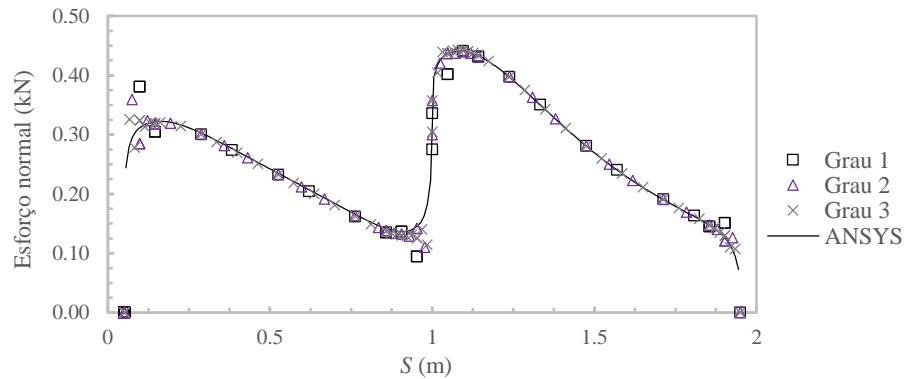


Figura 5: Resultados de esforços normais para o enrijecedor superior com 120 elementos de MEC1D.

Em seguida, a Figura 6 ilustra as respostas de esforços para a fibra central. Esta figura retrata a análise da variação na discretização da malha (30, 60 e 120 elementos) quando é fixado o grau quadrático de aproximação. Os resultados são exibidos para o acoplamento MEC/MEC1D (a) e para MEC/MEF (b), além da série ANSYS representando a referência. Pode-se observar a convergência da malha de elementos enrijecedores quadráticos. Em ambos os gráficos fica claro que o refinamento da malha melhora a precisão dos valores, além de levar à uma diminuição das oscilações nas regiões de descontinuidade. Ainda, esta figura conclui que o acoplamento MEC/MEC1D apresenta melhor convergência, visto que, com o MEC/MEF, a malha de 30 elementos se mostra ainda insuficiente para representação do problema, diferentemente da análise pelo modelo proposto. Com a malha mais refinada, ambas as abordagens levaram a resultados precisos e dentro do esperado.

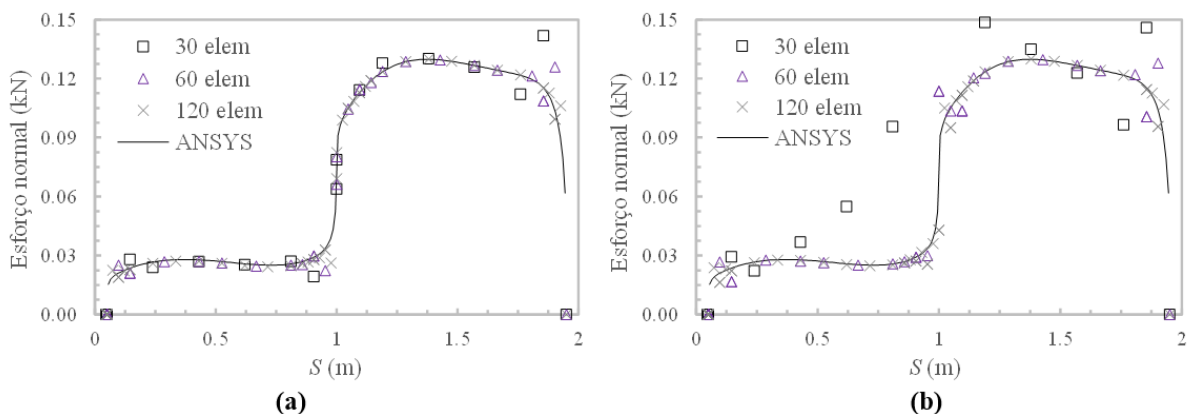


Figura 6: Esforços normais na fibra central via MEC/MEC1D (a) e MEC/MEF (b), para diferentes discretizações em elementos enrijecedores quadráticos.

A Figura 7 exibe os resultados de esforço normal na fibra inferior. Para esta análise, foi utilizada somente uma malha de 120 elementos quadráticos, visto que as análises acima a indicaram como suficiente em ambos os modelos de acoplamento. As respostas obtidas por MEC/MEC1D e MEC/MEF podem ser comparadas com a referência (ANSYS) nesta figura. Com a mesma discretização, é possível observar que ambos os acoplamentos levaram a resultados satisfatórios. Porém, é visível que o acoplamento MEC/MEC1D apresenta oscilações ligeiramente menores em comparação com o MEC/MEF. Tal observação já foi feita por Buffon [18] para as regiões próximas às extremidades dos enrijecedores e pode ser observada agora também nas regiões próximas ao cruzamento dos enrijecedores com interfaces. Esta vantagem é o principal ganho que justifica a utilização do modelo proposto (MEC/MEC1D) em relação ao modelo usual (MEC/MEF).

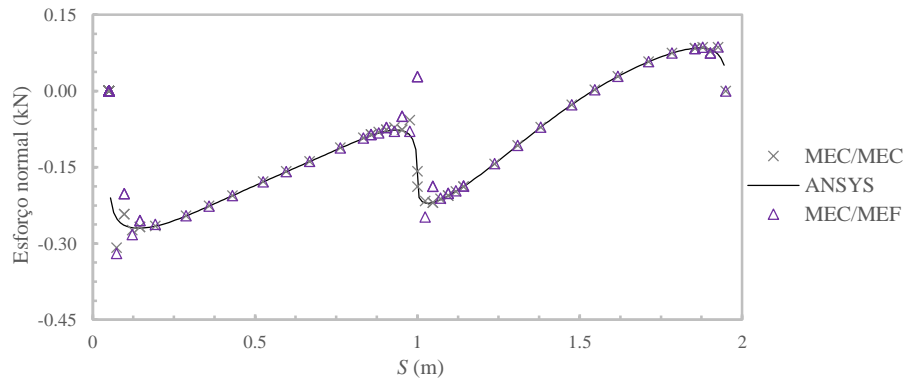
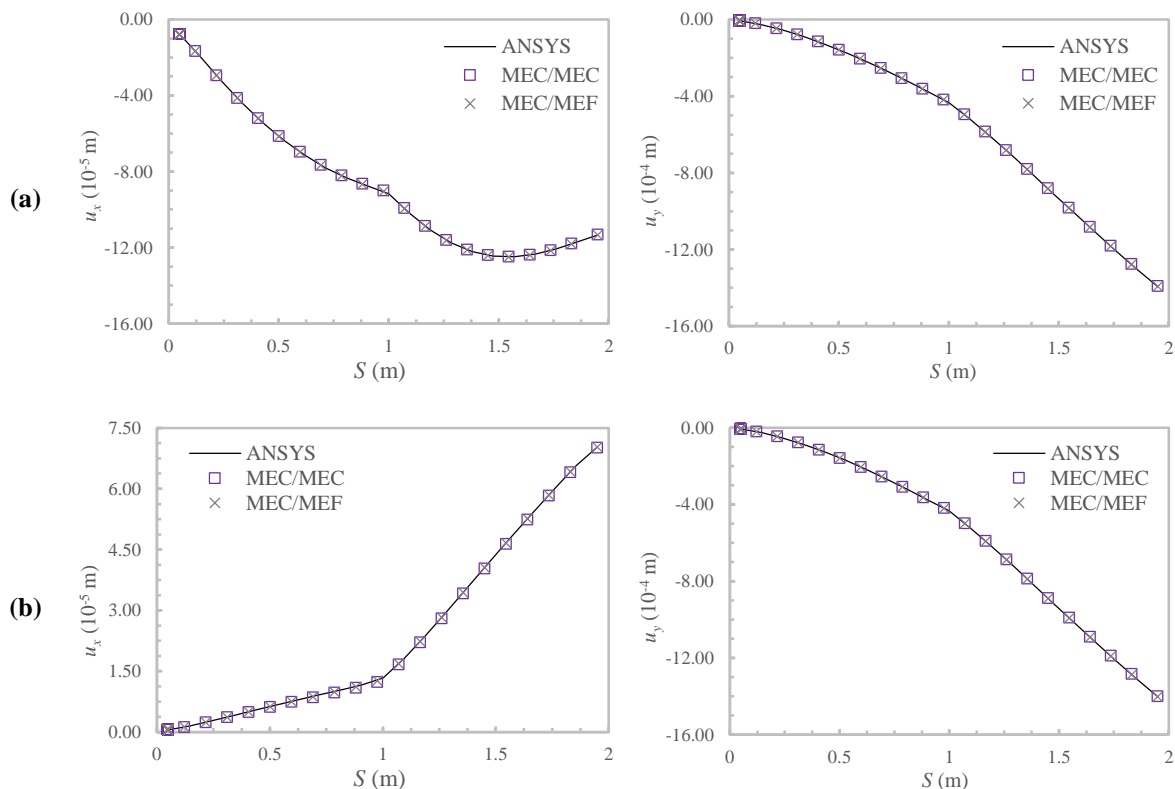


Figura 7: Esforços normais na fibra inferior utilizando malha de 120 elementos quadráticos.

Uma importante observação destas análises são os valores de esforço normal nos pontos de extremidade das fibras. Os modelos com acoplamento baseados no MEC levam sempre a valores nulos nestes pontos, diferentemente dos resultados do ANSYS. Isto ocorre porque os modelos construídos não permitem que uma força pontual da extremidade do enrijecedor seja aplicada ao domínio. Já a formulação baseada em MEF puro utilizada pelo ANSYS permite a transmissão desta força para o meio bidimensional, através de uma força nodal aplicada no nó coincidente com a malha de domínio. Levando em conta que a aplicação de forças externas no interior de um domínio seja impraticável em problemas hipoteticamente planos, ainda que o MEF o permita, pode-se considerar que a resposta obtida pelo modelo proposto e pelo MEC/MEF apresenta uma maior coerência nesta questão.

Os resultados de deslocamentos nas três fibras são apresentados na Figura 8. Para a obtenção destes resultados foi escolhida a malha de aproximação quadrática para 120 elementos enrijecedores. Porém, vale citar que não são observadas diferenças nos resultados quando as outras aproximações são utilizadas. Na figura é possível comparar as análises via MEC/MEC, MEC/MEF e a referência (ANSYS), verificando a perfeita concordância dos resultados.



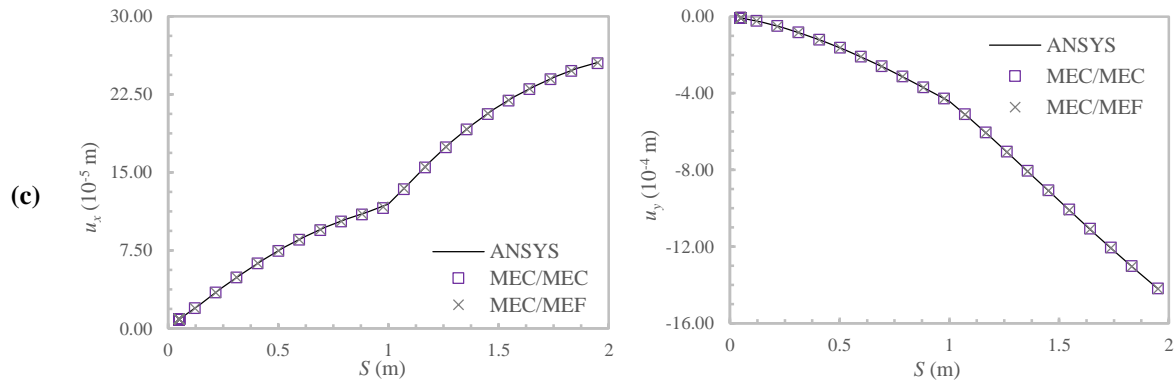


Figura 8: Deslocamentos horizontais ( $u_x$ ) e verticais ( $u_y$ ) nas fibras: inferior (a), central (b) e superior (c).

Para finalizar este exemplo, os resultados nos domínios bidimensionais são apresentados por meio dos deslocamentos do contorno, na Figura 9. É definida uma variável  $S$ , que percorre o perímetro da estrutura em sentido anti-horário, com origem no canto inferior esquerdo. Os deslocamentos verticais e horizontais são apresentados em função desta linha  $S$ .

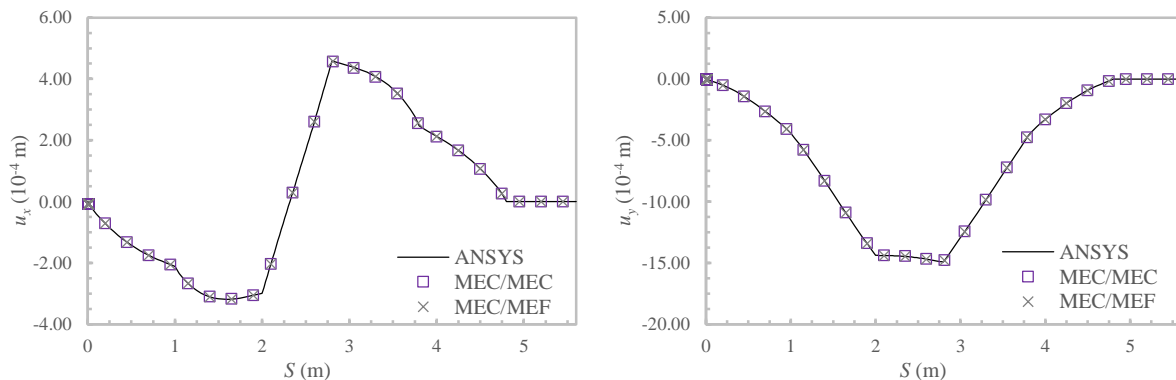


Figura 9: Deslocamentos horizontais ( $u_x$ ) e verticais ( $u_y$ ) no contorno da estrutura.

A análise da Figura 8 e da Figura 9 permite concluir que os resultados de deslocamentos nas fibras e no domínio 2D são precisos e coerentes com a referência. Percebe-se ainda que tanto os deslocamentos no enrijecedor, quanto os resultados no domínio são pouco influenciados pela discretização dos enrijecedores, desde que esta forneça uma aproximação minimamente suficiente.

#### 4 Abordagem para comportamento elastoplástico das fibras

O comportamento elastoplástico das fibras é incorporado à formulação que representa mecanicamente os meios reforçados. Para tal, um modelo de encruamento isotrópico bi linear é considerado. Neste modelo, o critério de plastificação segue a seguinte expressão:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + K^p \alpha) \leq 0 \quad (17)$$

Onde  $\sigma$  é a tensão atuante,  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento do material,  $K^p$  é um parâmetro material denominado módulo plástico de encruamento e  $\alpha$  é o parâmetro de encruamento, que representa a deformação plástica acumulada.

Conforme a teoria de elastoplasticidade clássica, as condições de consistência e complementaridade governam a evolução da deformação plástica, a qual pode ser calculada por:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \text{sign}(\sigma)$$

$$d\lambda = \frac{\text{sign}(\sigma)E}{E + K^p} d\varepsilon \quad (18)$$

Na qual  $d\varepsilon$  é o incremento de deformação total e  $\text{sign}$  indica a função sinal. Assim, o incremento de tensão  $d\sigma$  pode também ser definido por:

$$d\sigma = E(d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad (19)$$

Com base nas expressões da Eq. (17), (18) e Eq. (19) é possível aplicar uma abordagem de Newton-Raphson para resolver o problema não linear da plasticidade. Nesta técnica, os carregamentos prescritos são divididos em um número finito de passos de carga e, para cada um destes, os incrementos das grandezas são encontrados por meio do processo iterativo ilustrado na Figura 10 e com base nas três últimas equações. É importante mencionar que é adotada uma abordagem constante/secante para a realização deste processo iterativo, i.e., a matriz de rigidez dos elementos plastificados não é atualizada entre iterações. Esta abordagem configura uma modificação do método de Newton-Raphson clássico, levando a uma menor ordem de convergência. Por outro lado, a não atualização das matrizes permite que as soluções fundamentais elásticas não necessitem de modificação ou reavaliação nos elementos de MEC1D.

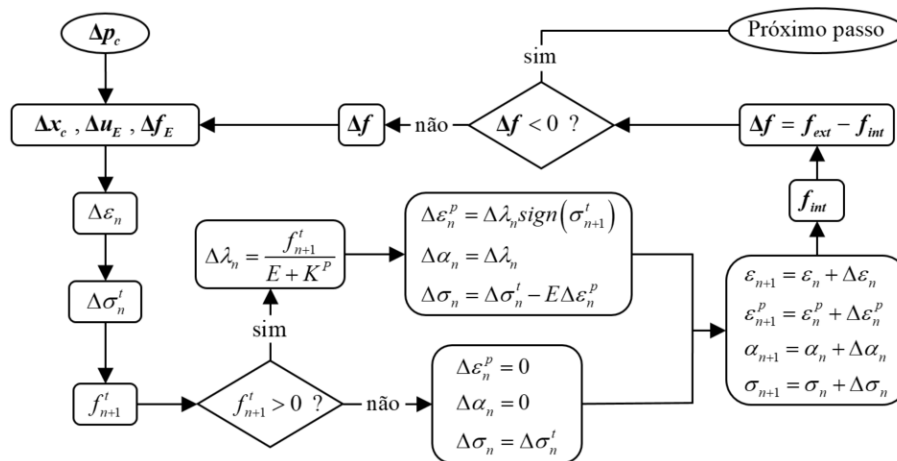


Figura 10: Fluxograma do processo iterativo elastoplástico.

## 5 Aplicação do modelo de acoplamento com fibra elastoplástica

Neste segundo exemplo de aplicação do trabalho, uma estrutura semelhante ao primeiro exemplo é analisada mecanicamente. Neste caso, o domínio bidimensional é homogêneo e as fibras apresentam comportamento elastoplástico. A Figura 11 ilustra o problema analisado, além das constantes: módulo de Young ( $E$ ), coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), tensão de escoamento ( $\sigma_y$ ) e módulo plástico de encruamento ( $K^p$ ) das fibras. As propriedades físicas e valores de carregamentos são citados na própria figura, cujas unidades físicas podem ser consideradas como qualquer conjunto compatível.

Como referência dos resultados obtidos é utilizado o mesmo modelo no ANSYS construído para o primeiro exemplo, sendo que a plasticidade é considerada nos elementos de treliça por meio da opção de *Isotropic Hardening Plasticity* e o modelo *Mises Plasticity*. O modelo do MEC consiste na mesma malha de contorno utilizada no exemplo anterior, com a malha de 120 elementos quadráticos para discretizar as fibras.

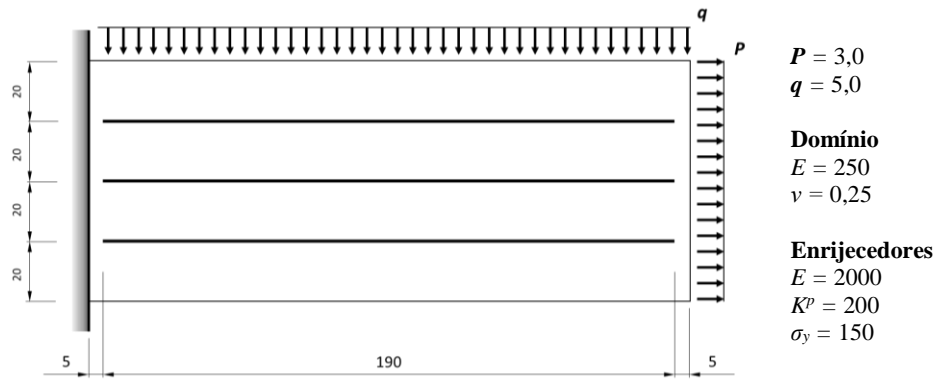


Figura 11: Estrutura analisada no exemplo de aplicação do modelo de acoplamento com fibra elastoplástica.

A solução do problema não-linear se deu em 3 passos de carga, tanto para o modelo proposto quanto para o modelo do ANSYS. A tolerância estipulada para convergência foi de  $10^{-5}$  em força. O modelo proposto apresentou um número total de iterações igual à 10, já no ANSYS, este número foi de 4. Esta diferença é reflexo da menor ordem de convergência do Operador Constante, em comparação com a abordagem tangente utilizada pelo software baseado em MEF.

Primeiramente, são apresentados os resultados de esforço normal e deformações plásticas sobre a linha da fibra ao final do processo elastoplástico. A Figura 12 exhibe estes resultados para a fibra inferior, em função da variável  $S$ , a qual representa a linha do enrijecedor projetada sobre o eixo horizontal da estrutura. Nesta figura são apresentados os resultados obtidos pelo modelo proposto (MEC/MEC), os resultados de referência (ANSYS) e os resultados obtidos pelo já consolidado acoplamento MEC/MEF.

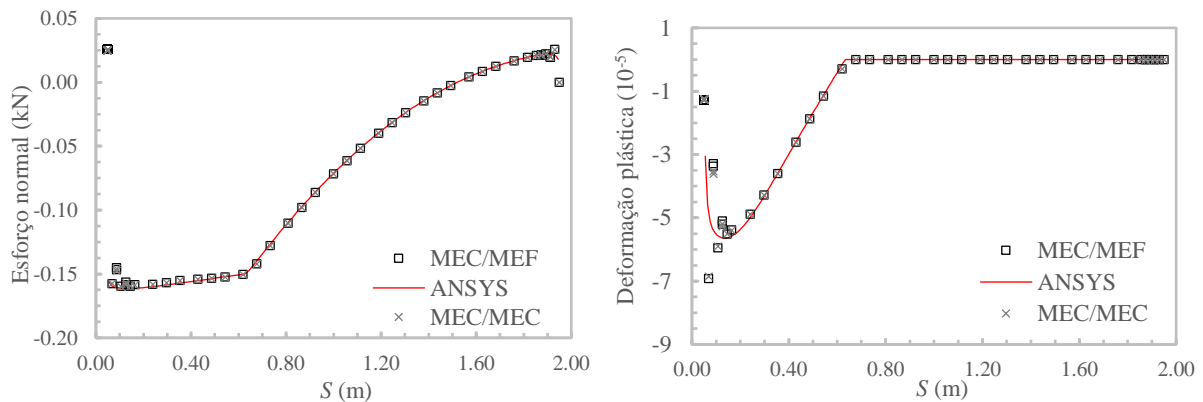


Figura 12: Resultados de esforços normais e deformações plásticas ao longo da fibra inferior.

A Figura 12 permite constatar que os valores obtidos estão de acordo com a referência. Em regiões próximas a extremidades é observada uma diferença nos valores, caracterizando o usual comportamento perturbado, já observado no primeiro exemplo e na literatura. (ROCHA, VENTURINI e CODA [19]). Vale observar aqui que as perturbações presente nos valores de esforços foram também transmitidas para os valores de deformação plástica. A Figura 13 ilustra estas mesmas grandezas obtidas nas demais fibras, no mesmo formato apresentado na figura anterior. Estes resultados concordam com a análise comentada para a Figura 12.

Finalmente, a Figura 14 demonstra a validação do modelo quanto aos resultados do domínio bidimensional. Os valores obtidos apresentam concordância em relação à referência. Como já observado no exemplo anterior, os resultados de deslocamentos, tanto do domínio quanto no enrijecedor, não apresentam perturbações e coincidem precisamente com o esperado (BOTTA e VENTURINI [20]).

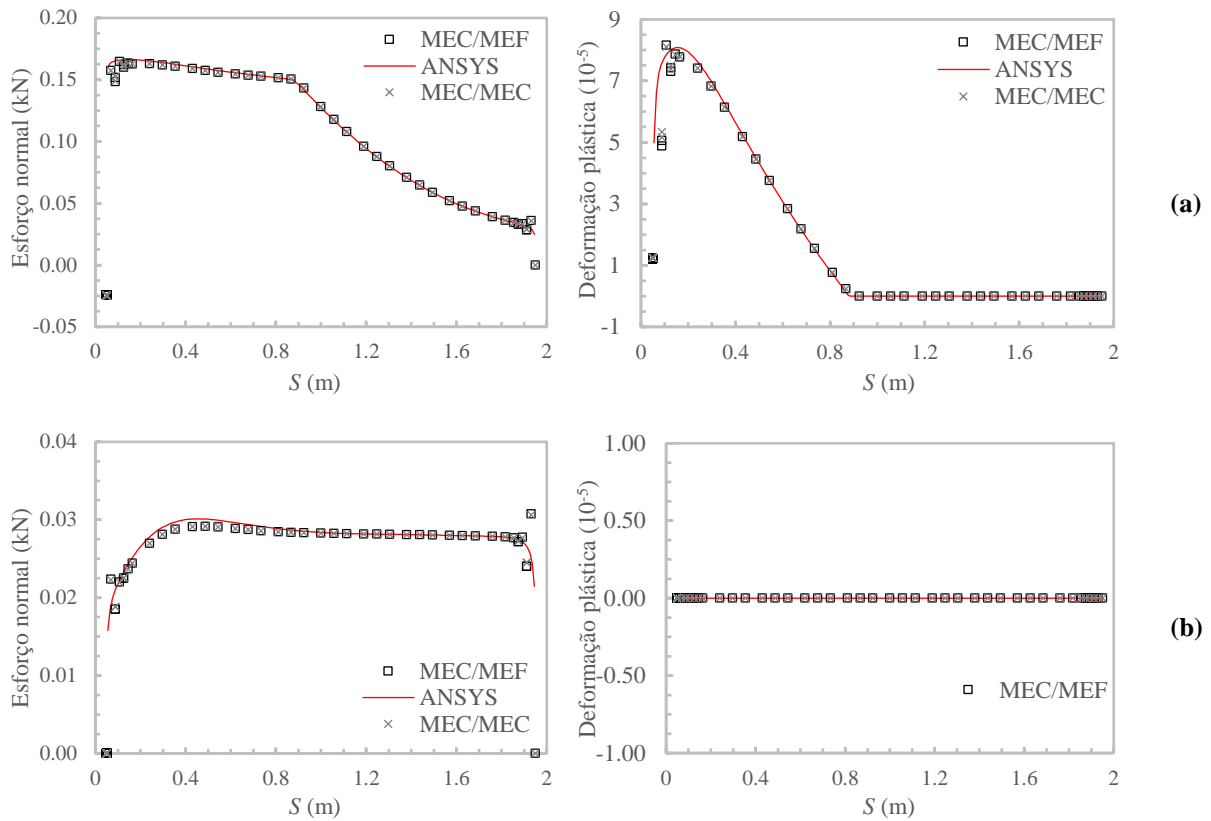


Figura 13: Resultados de esforços normais e deformações plásticas ao longo das fibras: superior (a) e central (b).

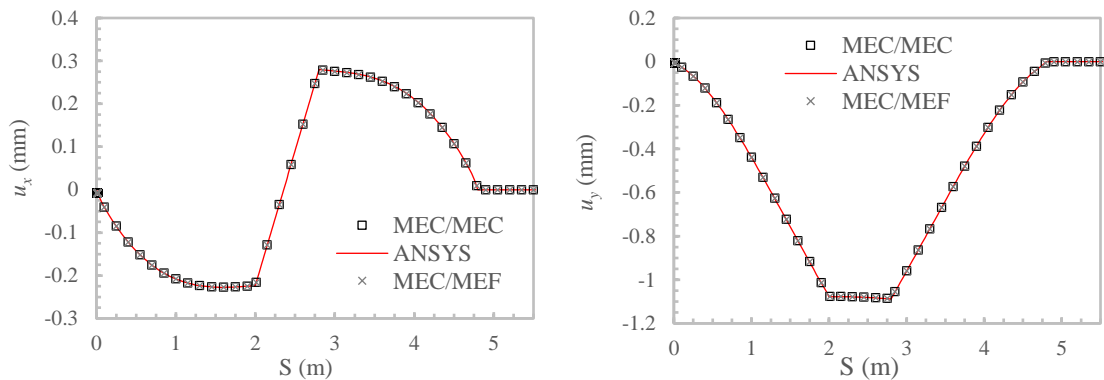


Figura 14: Deslocamentos horizontais ( $u_x$ ) e verticais ( $u_y$ ) no contorno da estrutura.

## 6 Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um modelo para representação mecânica de estruturas e materiais enrijecidos, com base no usual acoplamento MEC/MEF, porém, fazendo uso do MEC1D para representação dos elementos enrijecedores. Segundo resultados numéricos apresentados nas aplicações linear-elásticas, o acoplamento MEC/MEC1D levou a resultados precisos e coerentes em todas as grandezas mecânicas analisadas. Nos valores de esforços, oscilações foram observadas em regiões próximas a extremidades de enrijecedores e cruzamentos com interfaces. Este comportamento já foi observado para o acoplamento MEC/MEF na literatura e é considerado comum para acoplamentos como este, construídos com base em aderência perfeita. Sabe-se também que tais oscilações tendem a

diminuir com o aumento da discretização da malha e de sua ordem de aproximação, o que foi confirmado para ambos os acoplamentos utilizados. Porém, os resultados evidenciaram que o MEC/MEC1D apresentou oscilações de menor intensidade quando comparado com o acoplamento usual. Além disso, a técnica de sub-regiões do MEC bidimensional e o *connection element* aplicado em fibras foram utilizados para tornar o modelo capaz de representar a não-homogeneidade. Esta abordagem se mostrou confiável para problemas de domínios enrijecidos não-homogêneos. Uma análise não-linear referente ao comportamento elastoplástico dos enrijecedores foi incorporada à formulação acoplada neste trabalho. Foi utilizado o modelo clássico de plasticidade unidimensional representado pelo encruamento isótropo. Os resultados elastoplásticos foram validados com resultados de referência para ambos os acoplamentos MEC/MEF e MEC/MEC1D, mostrando a validação e precisão dos valores obtidos. Por fim, o modelo proposto se mostrou confiável para a execução da análise proposta, exibindo vantagens em relação a técnicas já presentes na literatura. Além disso, a adição da plasticidade dos elementos enrijecedores possibilitou a representação da não-linearidade física com êxito, tornando o modelo mais verossímil para a análise mecânica de estruturas.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro fornecido pela FAPESP, projeto de pesquisa nº 2018/20253-4, sem o qual este trabalho não poderia ter sido realizado.

## Referências

- [1] E. Armentani e R. Citarella, 2006. DBEM and FEM analysis on non-linear multiple crack propagation in an aeronautic doubler-skin assembly. *International Journal of Fatigue*, 28(5-6), 598-608.
- [2] R. Citarella, 2009. Non-linear MSD crack growth by DBEM for a riveted aeronautic reinforcement. *Advances in Engineering Software*, 40(4), 253-259.
- [3] O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly e P. Bettles, 1977. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, v.11, 355-375.
- [4] A.A. Stamos, D.E. Beskos, 1995. Dynamic analysis of large 2D underground structures by the BEM. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 24, 917-934.
- [5] G. Beer, J.O. Watson, 1982. *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers*. John Wiley & Sons, New York.
- [6] S. Ganguly, J.B. Layton e C. Balakrishna, 2000. Symmetric coupling of multi-zone curved Galerkin boundary elements with finite elements in elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(5), 633-654.
- [7] W.M. Elleithy, M. Tanaka e A. Guzik, 2004. Interface relaxation FEM–BEM coupling method for elasto-plastic analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(7), 849-857.
- [8] R.A. Bia, Z. Ostrowski, A.J. Kassab, Q. Yin, E. Sciubba, 2002. Coupling BEM, FEM and analytic solutions in steady-state potential problems. *Engineering analysis with boundary elements*, 26(7), 597-611.
- [9] L.G. Leite, H.B. Coda e W.S. Venturini, 2003. Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method. *Engineering analysis with boundary elements*, 27(3), 193-201.
- [10] A.S. Botta, e W.S. Venturini, 2005. Reinforced 2D domain analysis using BEM and regularized BEM/FEM combination. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, v. 8, n. 1, p. 15-28, 2005.
- [11] F.J. Rizzo, e D.J. Shippy, 1968. Formulation and solution procedure for the general nonhomogeneous elastic inclusion problem. *Int J Solids Struct.* v.4, p. 1161–1179, 1968.
- [12] H. Antes, Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams. *Computers & Structures*, 2003, 81:383-396. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(02\)00452-2](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(02)00452-2)
- [13] R. Seixas, F.D.M. Marques e J.M. Filgueiras, 2010. Uma estratégia para análise estática de pórticos planos e espaciais utilizando-se o método dos elementos de contorno. *Nono Simpósio de Mecânica Computacional*.

- [14] J.M.F Cruz, Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo Método dos Elementos de Contorno. 2012. 391 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2012.
- [15] C.A. Brebbia e J. Dominguez, 1989. Boundary Elements: An introductory Course. New York: McGraw Hill, vol. I.
- [16] M.H. Aliabadi, W.S. Hall e T.G. Phemister, 1985. Taylor expansions for singular kernels in the boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(12), 2221-2236.
- [17] M.H. Aliabadi. *The Boundary Element Method: Application in solids and structures*. v.2. New York: Wiley, 2002.
- [18] L.P. Buffon. *Formulações do Método dos Elementos de Contorno para a análise mecânica de domínios planos não-homogêneos enrijecidos*. 2018. 143 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.
- [19] F.C. Rocha, W.S. Venturini e H.B. Coda. Sliding frame-solid interaction using BEM/FEM coupling. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 11, n. 8, p. 1376- 1399, 2014.
- [20] A.S. Botta e W.S. Venturini. Reinforced 2D domain analysis using BEM and regularized BEM/FEM combination. *CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences*, v. 8, n. 1, p. 15-28, 2005.