

BOUNDARY ELEMENT FORMULATION TO ANALYZE TORSION PROBLEMS IN GENERIC COMPOSITE BARS

Maicon José Hillesheim

maicon@unemat-net.br

Universidade do Estado do Mato Grosso, Ph.D. student at Universidade Federal de Ouro Preto

Rua Rua Nove, n° 293, 35400-000, Ouro Preto/Minas Gerais, Brazil

Gabriel Viecelli Renostro

viecellieng@gmail.com

Sc. M. student at Universidade Federal de Ouro Preto

Rua Rua Nove, n° 293, 35400-000, Ouro Preto/Minas Gerais, Brazil

Francisco Célio de Araújo

dearaujofc@gmail.com

Universidade Federal de Ouro Preto

Rua Rua Nove, n° 293, 35400-000, Ouro Preto/Minas Gerais, Brazil

Abstract. This paper applies the boundary-element subregion-by-subregion (BE SBS) technique to solve torsion problems in general composite bars. One presents details of the BE formulation for primary torsion in coupled domains, including the discussion on the Krylov solvers embedded in the coupling algorithm. The general principles involved in the derivation of the preconditioned Krylov solvers are presented, although particular emphasis will be given in the applications to the short-recurrence methods as the BiCG (biconjugate gradient) and BiCGSTAB(*l*) (*l*-dimensional biconjugate gradient stabilized) solvers. Discontinuous boundary elements, essential to alleviate the modeling process of coupled domains, are also developed. In this respect, efficient (low-order) quadratures for integrating singular and nearly-singular fundamental kernels over the boundary elements are proposed. In addition, in order to accelerate the iterative solution process, the BE SBS matrix structure is used to form an efficient sparse incomplete LU factorization (SILU) preconditioner. Bars with complex composite patterns (e.g. with many different materials) are analyzed to attest the efficiency and robustness of the whole boundary-element technique.

.Keywords: Torsion problems; bars with generic composite cross-sections; generic subregioning technique; numerical quadratures for singular and nearly-singular integrals

1 Introdução

Em problemas práticos de engenharia, barras sujeitas a momento torçor estão presentes em diversos sistemas estruturas, sejam em estruturas de obras civis, como pontes, viadutos em trechos curvos, núcleos rígidos de edifícios, ou em outros setores, como em elementos de máquinas, estruturas da indústria naval e aeroespacial, etc. Uma forma de tratar do problema da torção primária é através da formulação da Saint-Venant, a qual converte o problema de elasticidade tridimensional em um problema de potencial bidimensional descrito pela equação diferencial parcial de Laplace. Esta por sua vez é convenientemente solucionada numericamente por meio do Método de Elementos de Contorno (MEC). Como no MEC o domínio do problema é reduzido em uma dimensão, verifica-se significativa redução do custo computacional, dado que para essa classe de problema, o cálculo dos coeficientes das matrizes envolve apenas integrais de linha. Sendo assim, apenas o contorno necessita ser discretizado, reduzindo, portanto, a ordem das matrizes, se comparado aos métodos de domínios como Método dos Elementos Finitos (MEF). Nesse sentido, diversas pesquisas visando estudar barras sujeitas a torção bem como aprimoramento do MEC, têm sido desenvolvida nas últimas décadas por diferentes autores.

Em 1989, Athanasiadis, [1] utilizou o M.E.C. para analisar barras sujeitas a torção a partir da formulação de Saint-Venant, onde apresentam-se detalhes de uma formulação indireta para obtenção das coordenadas do centro de torção em barras de seções quaisquer. Suas análises se limitavam a elementos estruturais homogêneos, prismáticos, cujas seções são compostas apenas por paredes espessas. Aproximadamente uma década mais tarde, diversas pesquisas relacionadas foram publicadas por Sapountzakis e seus colaboradores. Em Sapountzakis [2], uma estratégia baseada no MEC é desenvolvida para tratar da torção não uniforme em barras prismáticas de seção homogênea, a qual também utiliza uma estratégia indireta para determinação das coordenadas do centro de torção, sendo o cálculo do momento de inércia à torção e da constante de empenamento realizado através de integrais de domínio utilizando células de integração. Em Sapountzakis [3], estende-se essa formulação para seções heterogêneas, e em Sapountzakis [4], seções variáveis ao longo do eixo do elemento são consideradas, evidenciando-se que as tensões normais decorrentes de eventual restrição ao empenamento nos apoios, assim como as tensões de cisalhamentos secundárias, são bastante significativas.

A cerca do aprimoramento e aplicação do MEC, em 2003, Araújo et al. [5] apresentaram a primeira versão da BE SBS (BE *subregion-by-subregion* technique) baseada em solvers iterativos de Krylov, voltada para problemas de acústica dependente do tempo. No ano seguinte, Araújo et al. [6] ampliaram a formulação para problemas dinâmicos no domínio da frequência. Em 2006, Araújo et al. [7] desenvolveram uma versão destinada a análise de sólidos 3D, que considerava o solver J-BiCG (gradiente biconjugado com pre-condicionamento de Jacobi), evários algoritmos especiais de integração, para a avaliação de integrais singulares e quase-singulares, baseados na combinação da transformação cúbica de coordenadas de Telles e transformação de coordenadas polares triangulares foram implementados. Mais tarde, em 2008, buscando avaliar a contribuição para o aumento de resistência de materiais compósitos reforçados com nanotubos de carbono (CNTs), Araújo e Gray [8] aprimoraram os algoritmos de integração com uma estratégia analítica baseada no teorema de divergência de Stokes. Nessas análises, elementos descontínuos, imprescindíveis em problemas práticos, foram implementados. Em 2011, Araújo et al. [9], ainda estudando o comportamento dos (CNTs), aperfeiçoaram a técnica, com a implementação do solver BiCG-SILU, onde a matriz do sistema de equações tem seu condicionamento melhorado com a aplicação de uma fatoração LU incompleta, a partir dos blocos da diagonal principal gerados pela própria técnica BE SBS. Em 2013, Araújo et al [10], incorporaram às formulações o solver BiCGSTAB(*l*)-J, onde condicionamento da matriz global é melhorado com aplicação do pre-condicionamento de Jacobi, acelerando o processo de convergência. Por último, em 2019, buscando melhorar ainda mais a técnica, em Araújo et al [11], implementaram o solver BiCGSTAB(*l*)-SILU, onde pela primeira vez o pré-ondicionamento baseado na fatoração incompleta LU foi considerado com o solver BiCGSTAB(*l*). Além disso a técnica BE SBS foi adaptada para uma formulação bidimensional do MEC voltada para o problema da torção em barras de seção heterogênea. É importante esclarecer que a razão de tantos esforços dedicados ao aperfeiçoamento de solvers iterativos, se dá em decorrência de a matriz global do sistema de equações resultante do processo de sub-estruturção ser bastante esparsa. Em problemas envolvendo um número elevado de sub-regiões,

solvers iterativo derivados de Krylov permitem a resolução do sistema de equações sem a necessidade de montagem explícita da matriz global, propiciando grande economia de memória e tempo de processamento, pois as operações com os blocos de zeros são completamente evitadas.

Outro aspecto relevante, é a utilização de elementos descontínuos e a resolução de seções contendo domínios esbeltos. Ambos fatores implicam na presença de integrais quase-singulares. Por essa razão, algoritmos especiais de integração, baseados na transformação de coordenadas de Telles (cúbica), foram desenvolvidos para integrais de linha resultantes da aplicação do MEC a problemas 2D de torção.

Neste trabalho a técnica BE SBS é novamente testada em uma formulação bidimensional do MEC para análise de barras prismáticas de seção heterogêneas submetida a torção uniforme. As seções estudadas envolvem uma grande quantidade de sub-regiões ou de inclusões, e novas discussões a respeito do desempenho, eficiência e robustez dos algoritmos implementados são realizadas, demonstrando que eles são promissores e devem ser incorporados em um programa de pórtico espacial no futuro, permitindo análises mais fidedigna das estruturas reais do dia-a-dia da engenharia.

2 Problema de valor de contorno para seções genéricas

Na formulação de Saint-Venant, o problema de elasticidade tridimensional é convertido em um problema bidimensional descrito pela equação diferencial de Laplace (1), referenciada ao centro de torção. Tem-se

$$\nabla^2 \psi(xy) = 0, \tag{1}$$

sob a condições de contorno descrita pela equação (2),

$$p(\mathbf{x}) = \nabla \psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \psi}{\partial n} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}). \tag{2}$$

Entretanto quando a seção é heterogênea, assimétrica, o centro de torção é desconhecido. Então é adotado um sistema de referência global arbitrário $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$, paralelo ao sistema de referência com origem localizado no centro de torção XYZ . A figura 01 mostra uma seção heterogênea, assimétrica, referenciada aos dois sistemas de referências.

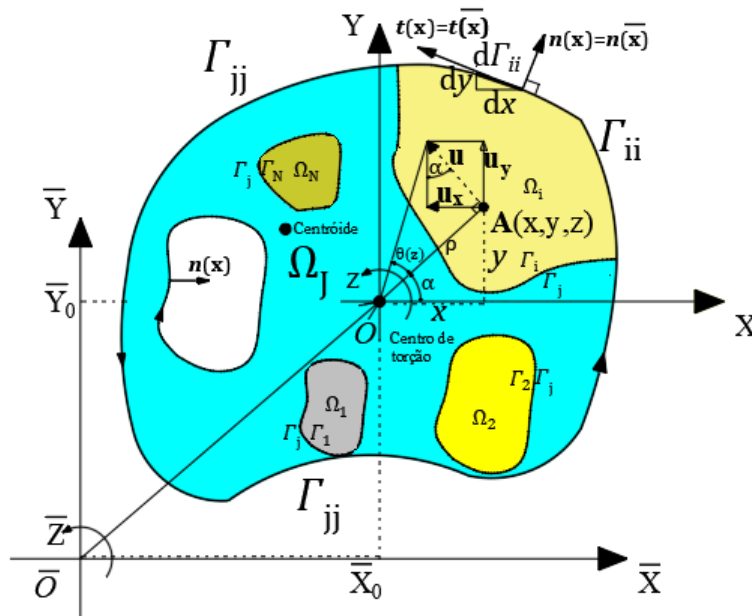


Figura 1: Componentes de deslocamentos de um ponto A(X,Y,Z) em uma seção arbitrária heterogênea.

As coordenadas em termos do sistema arbitrário são dada pelas equações (3) e escritas na forma ,

$$\begin{aligned}\bar{A} &\equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \equiv A \equiv (x, y, z), \\ z &= \bar{z}, \\ x &= \bar{x} - \bar{x}_0, \\ y &= \bar{y} - \bar{y}_0,\end{aligned}\tag{3}$$

e o campo de deslocamentos da equação (1) é reescrito conforme equações (4),

$$\begin{aligned}u_x &= -\theta' \bar{z}(\bar{y} - \bar{y}_0), \\ u_y &= \theta' \bar{z}(\bar{x} - \bar{x}_0), \\ u_z &= \theta' \psi(\bar{x} - \bar{x}_0, \bar{y} - \bar{y}_0),\end{aligned}\tag{4}$$

onde θ' corresponde taxa de rotação por unidade de comprimento e $\psi(\bar{x} - \bar{x}_0, \bar{y} - \bar{y}_0)$ é a função de empenamento escrita em termos do sistema de referência \bar{XYZ} . O problema de valor de contorno é então descrito pelas equações (5)

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{\psi} &= 0, \text{ em } \bar{x} \in \Omega_i, i = 1, ns, \\ \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} &= \bar{p}_{ii} = \bar{x}t, \text{ em } \bar{x} \in \Gamma_{ii},\end{aligned}\tag{5}$$

$$G_i \left[\bar{p}_{ij} - (\bar{x}t(\mathbf{x}))_{ij} \right] = G_j \left[\bar{p}_{ji} - (\bar{x}t(\mathbf{x}))_{ji} \right], \text{ em } \bar{x} \in \Gamma_{ij},$$

idêntico ao problema de valor de contorno descrito pela equação (1), sob as condições de contorno da equação (2). A equação (6), abaixo, estudada em [1] e [3], relaciona as funções de empenamento estabelecidas nos dois sistemas de referência. Tem-se

$$\bar{\psi} = \psi + \bar{y}_0 \bar{x} - x_0 \bar{y} + c,\tag{6}$$

sendo ψ referenciado no centro de torção, O , e $\bar{\psi}$ referenciado em um ponto qualquer \bar{O} .

3 Método dos Elementos de Contorno

O M.E.C. consiste basicamente em converter as equações diferenciais parciais que governam um problema em correspondentes equações integrais, envolvendo apenas valores de contorno. Com isso, apenas o contorno necessita ser discretizado, proporcionando uma significativa redução na complexidade da malha, bem como uma redução do tamanho do sistema de equações algébricas, fazendo com que o método se apresente bastante adequado para resolver o problema de valor de contorno descrito pelas equações (5). A conversão das equações descritas no domínio em integrais de contorno se dá por meio das relações de Green, sendo a respectiva integral de contorno expressa pela equação (7),

$$c(\xi) \bar{\psi}(\xi) + \oint p^*(\bar{x}, \xi) \bar{\psi}(\bar{x}) d\Gamma = \oint \psi^*(\bar{x}, \xi) \bar{p}(\bar{x}) d\Gamma,\tag{7}$$

onde \bar{x} é denominado ponto de campo e o ponto ξ é denominado ponto fonte. Os termos $\psi^*(\mathbf{x}, \xi)$, $p^*(\mathbf{x}, \xi)$ e $c(\xi)$ correspondem à solução fundamental, fluxo fundamental e o termo livre da integral respectivamente, cujas expressões para problemas de potencial em formulações bidimensionais são dadas pelas equações (8),

$$\begin{aligned}\psi^x(\bar{x}, \xi) &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \\ p^*(\bar{x}, \xi) &= \frac{\partial \psi^x(\bar{x}, \xi)}{\partial n(\bar{x})} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r_{,i} n_i}{r} \right),\end{aligned}\tag{8}$$

com $r = \|r\| = \|\mathbf{x} - \xi\|$, sendo a norma do vetor raio, compreendendo a distância entre o ponto de campo e o ponto fonte e $r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial \bar{x}_i} = \frac{r_i}{r}$, correspondente a derivada do raio em relação à \bar{x}_i .

3.1 Discretização do MEC

Devido à complexidade das seções utilizadas na prática, faz-se necessário subdividir o contorno em N segmentos menores denominados de elementos de contorno. A figura 2 apresenta uma típica malha de elementos de contorno, utilizando elementos parabólicos de três nós, onde os nós destacados delimitam o início e fim de cada elemento.

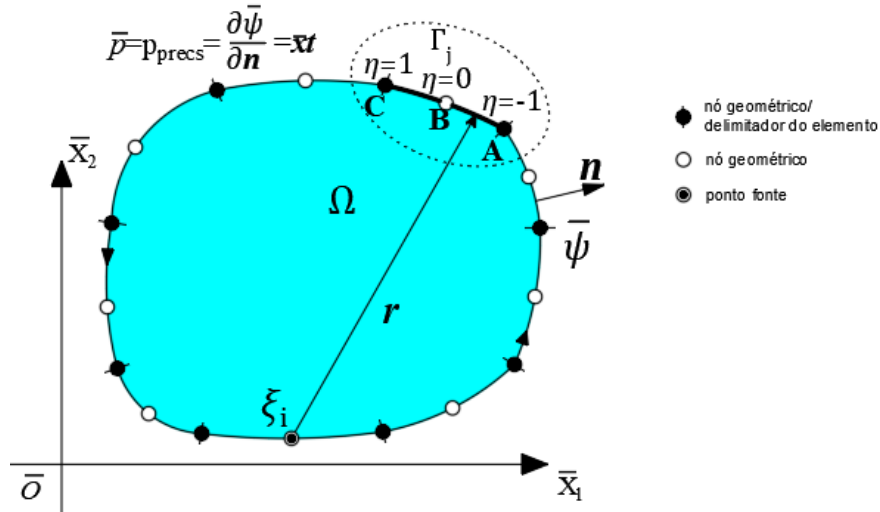


Figura. 2: Malha de Elementos de Contorno

Os seguimentos são interpolados por funções simples, chamadas de funções de forma. Em particular, nesse trabalho utilizou-se as funções Lagrangeanas de grau 2 (quadráticas). Deste modo, quando a equação integral (7) é discretizada, ela se apresenta conforme a equação (9),

$$c(\xi_i)\bar{\psi}(\xi_i) + \sum_{j=1}^N \oint p^*(\bar{x}, \xi_j) [h_A(\eta)\bar{\psi}_A^{(j)} + h_B(\eta)\bar{\psi}_B^{(j)} + h_C(\eta)\bar{\psi}_C^{(j)}] d\Gamma_j, \quad (9)$$

$$= \sum_{j=1}^N \oint \psi^*(\bar{x}, \xi) [h_A(\eta)\bar{p}_A^{(j)} + h_B(\eta)\bar{p}_B^{(j)} + h_C(\eta)\bar{p}_C^{(j)}] d\Gamma$$

sendo $h_A(\eta)$, $h_B(\eta)$ e $h_C(\eta)$ as funções de forma, equações (10),

$$h_A(\eta) = \frac{1}{2}\eta(\eta - 1),$$

$$h_B(\eta) = (1 - \eta)(1 + \eta), \quad (10)$$

$$h_C(\eta) = \frac{1}{2}\eta(\eta + 1).$$

por meio das quais, a geometria, o potencial e o fluxo são interpolados conforme equações (11),

$$\bar{x}_i(\eta) = h_A(\eta)\bar{x}_{iA}^j + h_B(\eta)\bar{x}_{iB}^j + h_C(\eta)\bar{x}_{iC}^j,$$

$$\bar{\psi}_i(\eta) = h_A(\eta)\bar{\psi}_{iA}^j + h_B(\eta)\bar{\psi}_{iB}^j + h_C(\eta)\bar{\psi}_{iC}^j, \quad (11)$$

$$\bar{p}_i(\eta) = h_A(\eta)\bar{p}_{iA}^j + h_B(\eta)\bar{p}_{iB}^j + h_C(\eta)\bar{p}_{iC}^j.$$

Em notação matricial, a equação (9) é reescrita conforme a equação (12),

$$H\bar{\psi} = G\bar{p}, \quad (12)$$

onde os coeficientes da diagonal da matriz \mathbf{H} resultam da integração de núcleos fortemente singulares, ou seja, trata-se da avaliação do problema de valor principal Cauchy. Na implementação computacional, esses coeficientes são calculados indiretamente pelo critério de corpo rígido (RBD)

Como no problema de valor de contorno referente à torção, equação (5), os fluxos normais são prescritos em todo o contorno livre, dispensa-se a permutação de colunas como ocorre nos demais problemas no âmbito do MEC. Deste modo, basta efetuar a multiplicação matriz-vetor do lado direito da equação (12) e obtém-se o sistema, da equação (13),

$$\mathbf{H}\bar{\psi} = \mathbf{B}. \quad (13)$$

Entretanto, como só há fluxos prescritos, o sistema 13 é singular. Para superar essa dificuldade, a singularidade é removida impondo-se valor nulo a uma componente qualquer do vetor potencial ($\bar{\psi}_i$) associados ao contorno livre o Γ_{ii} .

3.2 Elementos descontínuos

Em seções que apresentam contornos angulares, a necessidade de considerar a descontinuidade de fluxos é solucionada com a utilização de nós duplos. Esses nós dividem a mesma posição no sistema de referência global adotado e cada um deles pertencerá a um respectivo elemento. Entretanto, quando houver potencial prescrito ou interface entre materiais em pontos angulosos, haverá na Matriz \mathbf{H} , linhas linearmente dependentes, causando singularidades no sistema de equações. Para superar essa dificuldade na implementação computacional é empregado o chamado elemento descontínuo. Nesses elementos, usam-se pontos nodais situados em suas bordas para a interpolação da geometria (nós geométricos), porém adotam-se nós funcionais ligeiramente deslocados para seu interior para a aproximação das variáveis de campo (empenamento e fluxo), como é mostrado na figura 3.

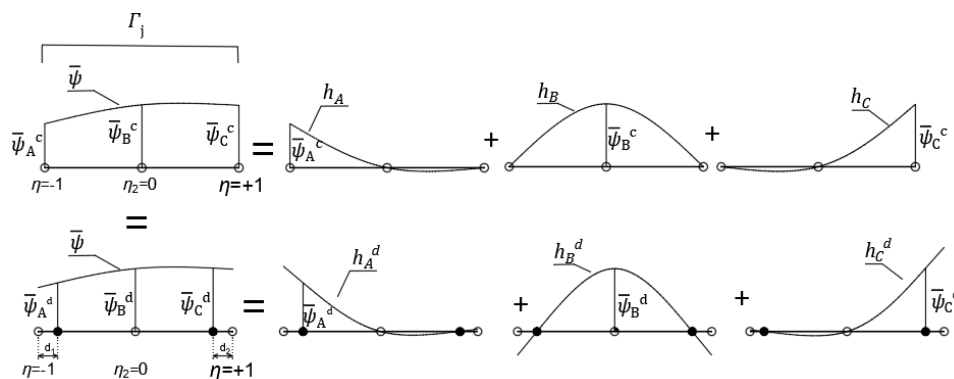


Figura 3. Atuação do elemento descontínuo.

É importante esclarecer que com a consideração de elementos descontínuos acrescentam-se nós funcionais a mais no modelo, e consequentemente equações adicionais são geradas no sistema de equações. Por esta razão, na implementação computacional, os elementos descontínuos são utilizados apenas quando necessário.

3.3 Aspectos da integração

As integrais quase singulares, que aparecem quando a norma do vetor raio das soluções fundamentais descritas nas equações (8) são pequenos ou tendem a zero, são calculadas usando a quadratura de Telles, que consiste em uma transformação cúbica de coordenadas, em que, dentro do elemento mapeado em coordenadas naturais, os pontos de Gauss são deslocados em direção a singularidade. Em particular neste trabalho, consideraram-se singularidades também sobre os nós funcionais ligeiramente deslocados para o interior dos elementos descontínuos. A figura 04 mostra a distribuição dos pontos de Gauss deslocados segundos as posições singulares adotadas nesse trabalho.

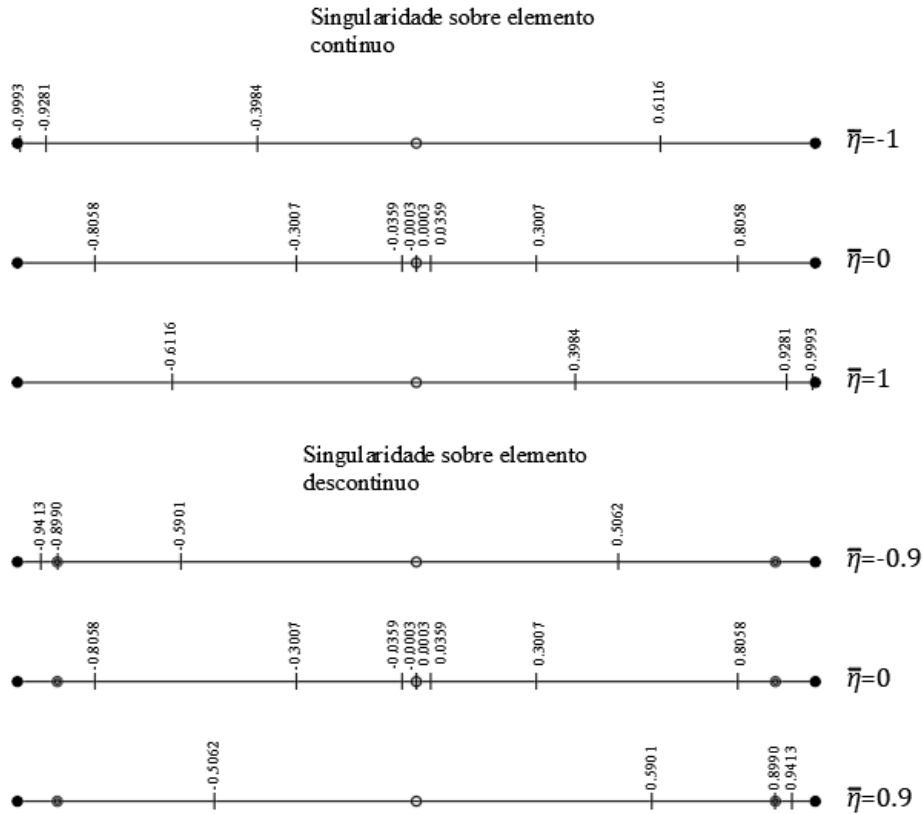


Figura 4. Distribuição dos pontos de Gauss nas quadraturas utilizadas

Outro aspecto importante consiste na subdivisão do domínio de integração em dois subdomínios quando a singularidade se situa no centro do elemento de contorno. Os coeficientes das matrizes H e G são calculados conforme equações(14),

$$h_{ij} = \oint_{-1}^1 p^*(\bar{x}, \xi_j) h_q(\eta) J^{sd} J^e(\eta) J^T(\gamma) d\gamma, \quad (14)$$

$$g_{ij} = \oint_{-1}^1 \psi^*(\bar{x}, \xi_j) h_q(\eta) J^{sd} J^e(\eta) J^T(\gamma) d\gamma,$$

onde J^{sd} é o jacobino da transformação associado aos subdomínios, que é igual 1.0 quando se tem um subdomínio e 0.5 quando se tem dois subdomínios, e o jacobiano da transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas naturais, equação (15),

$$J^e(\eta) = \sqrt{\left(\frac{d\bar{x}_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{x}_2}{d\eta}\right)^2}. \quad (15)$$

Já o jacobiano da transformação cubica de Telles é calculado pela expressão

$$J^T(\gamma) = \frac{3(\gamma - \bar{\gamma})^2}{1 + 3\bar{\gamma}^2}, \quad (16)$$

com γ sendo em coordenadas cubicas, a posição da singularidade.

3.4 Técnica de subestruturação genérica de elementos de contorno (BE SBS)

A técnica (BE SBS) é desenvolvida visando criar uma implementação computacional robusta, de tal maneira que se possa estudar seções de compósitos contendo um número genérico de materiais e inclusões. Dentre outros pontos a serem destacados, tem-se a independência na geração dos modelos de elementos de contorno (matrizes H_i e G_i) associados a cada material (sub-região) presente na seção e a busca automática das sub-regiões e nós/graus de liberdades acoplados. Além disso, faz uso de elementos descontínuos apenas onde é necessário, como ocorre na interface ilustrada na figura 6.

Para o problema específico da torção, sabendo que nas interfaces $[\bar{x}\bar{t}(\bar{x})]_{ij} = -[\bar{x}\bar{t}(\bar{x})]_{ij}$,

estabelece-se a relação de equilíbrio, equação (17),

$$\bar{p}'_{ij} = -\bar{p}'_{ji} + (G_i - G_j)\bar{q}_{ij}, \quad (17)$$

com \bar{p}'_{ij} e \bar{q}_{ij} expressos pelas equações (18),

$$\bar{p}'_{ij} = G_i \bar{p}_{ij} = G_i \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} \right)_{ij}, \quad \bar{q}_{ij} = [\bar{x} \bar{t}(\bar{x})]_{ij}. \quad (18)$$

Vetorialmente tem-se a equação (19):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{H}_{ij} \bar{\psi}_{ij} - \mathbf{G}'_{ij} \bar{p}'_{ij}) + \mathbf{H}_{ii} \bar{\psi}_{ii} + \sum_{j=i+1}^{ns} (\mathbf{H}_{ij} \bar{\psi}_{ij} + \mathbf{G}'_{ij} \bar{p}'_{ji}) \\ = \mathbf{G}_{ii} \bar{p}_{ii} + \sum_{j=i+1}^{ns} [(G_i - G_j) \mathbf{G}'_{ij} \bar{q}_{ij}], \quad i = 1, ns \end{aligned} \quad (19)$$

com $\mathbf{G}'_{ij} = \mathbf{G}_{ij}/G_i$.

A figura 5 mostra o aspecto de um sistema explícito de equações de uma seção contendo três materiais segundo a técnica BE SBS.

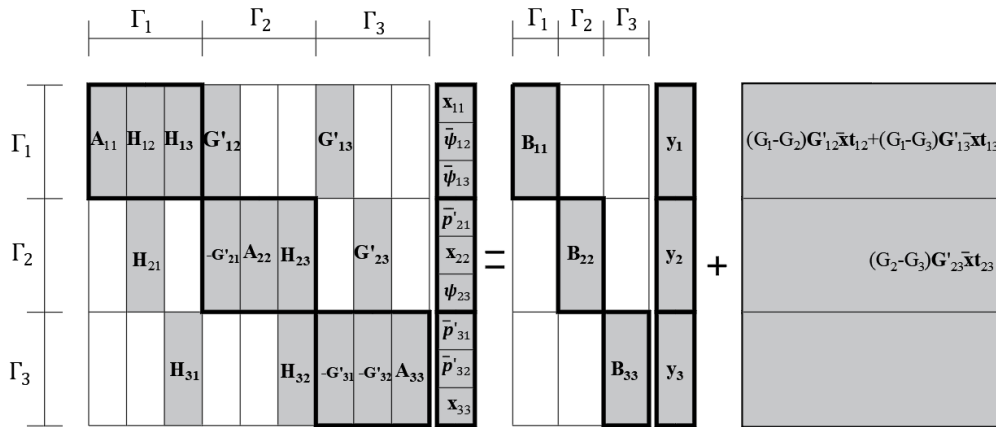


Figura 5. Formato de armazenando das submatrizes na matriz global.

Na figura 5, o bloco \mathbf{A}_{11} por exemplo, corresponde a parcela da matriz da primeira sub-região associado aos termos incógnitos, o bloco \mathbf{H}_{12} , correspondente a parcela da matriz \mathbf{H} da primeira sub-região que estão associados com o empenamento na interface com a sub-região 2 e assim por diante. O bloco \mathbf{B}_{11} corresponde a parte das submatrizes da primeira sub-região associada aos valores prescritos.

Note que na matriz explícita, há uma grande quantidade de blocos de zeros. E o emprego dos solver iterativos permitem dispensar as operações e o armazenamento de tais blocos.

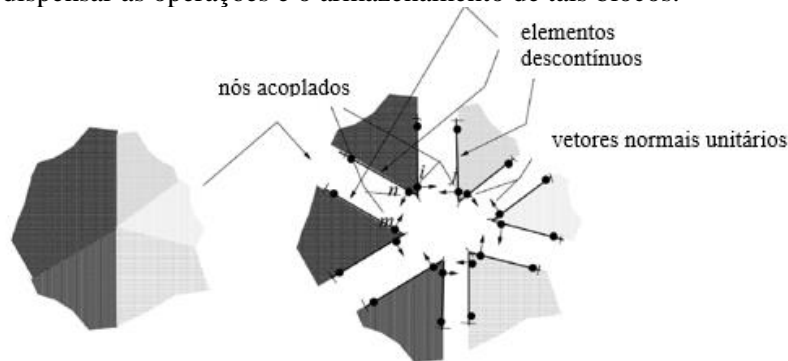


Figura 6. Interface contendo elementos descontínuos

3.5 Solvers Iterativos de Krylov

Aplicando solvers de Krylov preconditionados ao sistema de equações, equação (20),

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (20)$$

expressa-se o pseudo-resíduo na a i -ésima iteração conforme equação (21),

$$\delta_i = \bar{\psi}_i(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\delta_0 \in K_{i+1}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}, \delta_0), \quad (21)$$

sendo $K_{i+1}[(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}), \delta_0]$ do $(i + 1)$ o subespaço dimensional de Krylov associado a matriz $(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})$ e δ_0 e \mathbf{Q} é uma matriz de pre-condicionamento, Vorst [12]. Assim, o polinômio de redução do pseudo-resíduo acima, $\bar{\psi}_i$, é expresso pela equação (22),

$$\bar{\psi}_i(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}) = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^i \beta_k^{i-1}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^k, \quad (22)$$

onde os escalares $\beta_k^{(i-1)}$ são as componentes do pseudo-resíduo em relação à base do subespaço de Krylov $(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^k\delta_0, k = 1, \dots, i$.

3.5.1 Método BiCG

Este método foi desenvolvido por Fletcher[13], e tem como característica levar em conta 2 termos iterativos dados pelas expressões (28),

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \lambda_i \mathbf{p}_i \\ \mathbf{p}_i = \delta_i + \alpha_i \mathbf{p}_{i-1} \end{cases}, \quad (23)$$

onde, para um certo escalar γ_k^{i-1} , conforme equação (22), \mathbf{p}_i é o um vetor pesquisa dado pelas equações 24,

$$\begin{cases} \mathbf{p}_i = \phi_i(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\delta_0 \in K_{i+1}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}, \delta_0), \\ \phi_i(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\delta_0 = \mathbf{I} + \sum_{k=1}^i \gamma_k^{(i-1)}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^k, \end{cases} \quad (24)$$

e o parâmetro λ_i e α_i na formula iterativa são determinadas a partir das condições de ortogonalidade, dados pelas equações (25),

$$\begin{cases} \delta_i^{*T} \delta_j = 0 \\ \mathbf{p}_i^{*T} (\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}) \mathbf{p}_j = 0 \end{cases}, i \neq j, \quad (25)$$

sendo

$$\begin{cases} \delta_i^* = \bar{\psi}_i[(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^T]\delta_0^* \in K_{i+1}[(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^T, \delta_0^*], \\ \mathbf{p}_i^* = \phi_i[(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^T]\delta_0^* \in K_{i+1}[(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^T, \delta_0^*]. \end{cases} \quad (26)$$

Resulta então conforme [12] e Y. Saad [14], os parâmetros BiCG, dados nas equações (27),

$$\begin{cases} \lambda_i = \frac{\delta_i^{*T} \delta_i}{\mathbf{p}_i^{*T} (\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}) \mathbf{p}_i} \\ \alpha_i = \frac{\delta_i^{*T} \delta_i}{\delta_{i-1}^{*T} \delta_{i-1}} \end{cases} \quad (27)$$

3.5.2 O método BiCGSTAB e BiCGSTAB(l)

A ideia principal destes métodos consiste em calcular os parâmetros BiCG dado pela expressões (27), impondo uma condição adicional de minimização do pseudo-resíduo δ_j . Em particular no BiCGSTAB(l), o pseudo-resíduo, δ'_j e a pesquisa do vetor direção são dadas pelas equações (28)

$$\begin{aligned}\delta'_j &= \eta_j(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\bar{\psi}_j(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\delta_0, \\ \mathbf{p}'_{j-1} &= \eta_j(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\phi_{j-1}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\delta_0,\end{aligned}\quad (28)$$

onde o polinômio $\eta_j(\cdot)$, é conforme equação (29),

$$\eta_j(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}) = \mathbf{I} - \sum_{k=1}^l \omega_{kj}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})^k. \quad (29)$$

Os parâmetros ω_{kj} são determinados minimizando-se δ'_j no subespaço de Krylov l -dimensional. Note que na relação (28), o polinômio de minimização $\eta_j(\cdot)$ é aplicado ao pseudo-resíduo, $\bar{\psi}_j(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\delta_0$, e à direção de busca, $\phi_{j-1}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\delta_0$, do método BiCG. Pela aplicação então do método BiCGSTAB(l), os parâmetros BiCG nas equações (27) são recalculados conforme equações (30)

$$\begin{aligned}\lambda_{j+k} &= \frac{\delta_0^{*T} \eta_{j+k}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\delta_{j+k}}{\delta_0^{*T}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\eta_{j+k}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{p}_{j+k}}, \\ \alpha_i &= \frac{\delta_0^{*T} \eta_{j+k}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\delta_{j+k}}{\delta_0^{*T} \eta_{j+k}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A})\delta_{j+k-1}}.\end{aligned}\quad (30)$$

3.5.3 Pré-condicionadores

Uma vez que a razão de convergência dos solver iterativos é intimamente relacionada ao condicionamento espectral da matriz do sistema de equações, o pré-condicionamento tem, teroricamente, fundamental influencia na sua performance. Em geral, quando se trata de sistemas não simétricos, como é caso dos existentes na formulação do MEC, uma série de técnicas de pre-condicionamento tem sido discutida na literatura K. Chen[15], M. Benzi e T. Mirosla [16], U. Langer et al [17], [12] e [14]. Em geral, a matriz explícita dos métodos iterativos básicos, como os métodos de Jacobi, Gauss-Seidel ou de ILU (decomposição LU incompleta) podem ser usadas para construção de pré-condicionadores. Na técnica BE SBS, existem combinado diversos solvers, sendo estudado nesse artigo, o solver BiCG-J que combina o método BiCG com o pré-condicionemtno de Jacobi, o solver BiCG-SILU que combina o método BiCG com o pré-condicionamento baseado na fatoração LU, o BiCGSTAB(l)-J usa a esttatégia de suvisção combinado com o pre-condicionamento de Jacobi e o solver BiCGSTAB(l)-SILU que combina a estratégia de suavisação com pre-condicionamento (LU). Na BE SBS é chamado de fatoração LU incompleta, pois se aplica apenas nos blocos da diagonal da matriz global (vide figura 5 acima).

3.6 Determinação de centro de torção

Uma vez solucionado o sistema de equações referenciado em $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ obtendo-se $\bar{\psi}$ e $\bar{\mathbf{p}}'$, utilizando a equação 17 acima, calcula-se $\bar{\mathbf{p}}$ para o contorno de cada sub-região, e então as coodenadas \bar{x}_0, \bar{y}_0 do centro de torção são obtidas por meio do sistema equações (31), também utilizado por Sapountzakis [3],

$$\begin{aligned}a_{\bar{x}\bar{x}}\bar{x}_0 - a_{\bar{x}\bar{y}}\bar{y}_0 - a_{\bar{x}0}c &= -a_{\bar{x}\bar{\psi}} \\ a_{\bar{x}\bar{y}}\bar{x}_0 - a_{\bar{y}\bar{y}}\bar{y}_0 - a_{\bar{y}0}c &= -a_{\bar{y}\bar{\psi}}, \\ a_{\bar{x}0}\bar{x}_0 - a_{\bar{y}0}\bar{y}_0 - a_{00}c &= -a_{\bar{\psi}0}\end{aligned}\quad (31)$$

onde os coeficientes do sistema, equação (31) são dados nas equações (32),

$$\begin{aligned}a_{\bar{x}\bar{x}} &= \sum_{i=1}^{n\ mat} E_i I_{\bar{x}\bar{x}}^i, & a_{\bar{y}\bar{y}} &= \sum_{i=1}^{n\ mat} E_i I_{\bar{y}\bar{y}}^i, & a_{00} &= \sum_{i=1}^{n\ mat} E_i \Omega_i = 0, & a_{\bar{\psi}0} &= \sum_{i=1}^{n\ mat} E_i M_{s\bar{\psi}}^i, \\ a_{\bar{x}\bar{y}} &= \sum_{i=1}^{n\ mat} E_i I_{\bar{x}\bar{y}}^i, & a_{\bar{y}0} &= \sum_{i=1}^{n\ mat} E_i M_{s\bar{y}}^i, & a_{\bar{x}\bar{\psi}} &= \sum_{i=1}^{n\ mat} E_i I_{\bar{y}\bar{\psi}}^i, & a_{\bar{x}\bar{y}} &= a_{\bar{y}\bar{x}}, \\ a_{\bar{x}0} &= \sum_{i=1}^{n\ mat} E_i M_{s\bar{x}}^i, & a_{\bar{y}0} &= \sum_{i=1}^{n\ mat} E_i M_{s\bar{y}}^i, & a_{\bar{y}\bar{\psi}} &= \sum_{i=1}^{n\ mat} E_i I_{\bar{x}\bar{\psi}}^i.\end{aligned}\quad (32)$$

As propriedades geométricas presentes nas expressões acima envolvem integrais de domínio, as quais por sua vez são transformadas em integrais de contorno, de modo que as malhas de contorno já existentes podem ser utilizadas. Tem-se, portanto as equações (33),

$$\begin{aligned}
 A^i &= \Omega^i = \int d\Omega_i = \oint \bar{x}n_x d\Gamma, & I_{\bar{x}\bar{x}}^i &= \int \bar{y}^2 d\Omega_i = \oint \bar{x}\bar{y}^2 n_x d\Gamma, \\
 I_{\bar{x}\bar{y}}^i &= \int \bar{x}\bar{y} d\Omega_i = \oint \bar{x}^2 \bar{y} n_x d\Gamma, & I_{\bar{y}\bar{y}}^i &= \int \bar{x}^2 d\Omega_i = \oint \bar{x}^2 \bar{y} n_y d\Gamma, \\
 M_{\bar{s}\bar{x}}^i &= \int \bar{y} d\Omega_i = \oint \bar{x}\bar{y} n_y d\Gamma, & M_{\bar{s}\bar{y}}^i &= \int \bar{x} \Omega_i = \oint \bar{x}\bar{y} n_x d\Gamma, \\
 I_{\bar{y}\bar{\psi}}^i &= \int \bar{y}\bar{\psi} d\Omega_i = \oint \left[\left(\frac{1}{2} y^2 n_y \right) \bar{\psi} - \left(\frac{1}{6} y^3 \right) \bar{p} \right] d\Gamma, \\
 I_{\bar{x}\bar{\psi}}^i &= \int \bar{x}\bar{\psi} d\Omega_i = \oint \left[\left(\frac{1}{2} x^2 n_x \right) \bar{\psi} - \left(\frac{1}{6} x^3 \right) \bar{p} \right] d\Gamma, \\
 M_{\bar{s}\bar{\psi}}^i &= \int \bar{\psi} d\Omega_i = \oint \left[(x n_x) \bar{\psi} - \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \bar{p} \right] d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Uma vez determinada as coordenadas do centro de torção, é então realizada a transformação das grandezas, obtendo-se o empenamento e os fluxos no contorno de cada sub-região através das equações (34).

$$\begin{aligned}
 \psi &= \bar{\psi} - \bar{y}_0 \bar{x} + \bar{x}_0 \bar{y} - c \\
 p &= \bar{p} - \bar{y}_0 n_x + \bar{x}_0 n_y
 \end{aligned} \tag{34}$$

Conhecendo empenamento e os fluxos no contorno de cada sub-região, calculam-se os deslocamentos e as derivadas cartesianas nos pontos internos pela equação integral. As tensões nos pontos internos através das expressões (35) são dadas por

$$\tau_{xz} = G_i \theta'(z) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right), \tau_{yz} = G_i \theta'(z) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right), \tag{35}$$

sendo que no contorno, as derivadas cartesianas são das pela equação (40),

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t^T \\ n^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 1 & d\psi(\eta) \\ J(\eta) & d\eta \\ \mathbf{x}^T \mathbf{t} & \end{Bmatrix}, \tag{36}$$

com $J(\eta)$ denotando o jacobiano da transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas naturais.

4 Aplicações

Exemplo 01. Trata-se de uma viga estudada por Sapountzakis [3]. No presente estudo, a viga é submetida a um momento torçor $Mt = 500\text{kN}\cdot\text{L}$. A seção transversal é composta de três diferentes materiais em contato como mostra a figura 7-a). Os módulos de elasticidade transversal de cada domínio são $G_1 = 100 \times 10^9 \text{N/L}$, $G_2 = 150 \times 10^9 \text{N/L}$ e $G_3 = 50 \times 10^9 \text{N/L}$, com o mesmo coeficiente de Poisson para os três materiais, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.2$. A malha de elementos de contorno é mostrada na figura 7-b), onde o domínio Ω_1 e domínio Ω_3 possuem 128 nós geométricos e 64 elementos de contorno quadráticos cada um, o domínio Ω_2 possui 56 nós geométricos e 28 elementos quadráticos. São utilizados elementos descontínuos em toda extensão curva do modelo e junto aos cantos de cada sub-região.

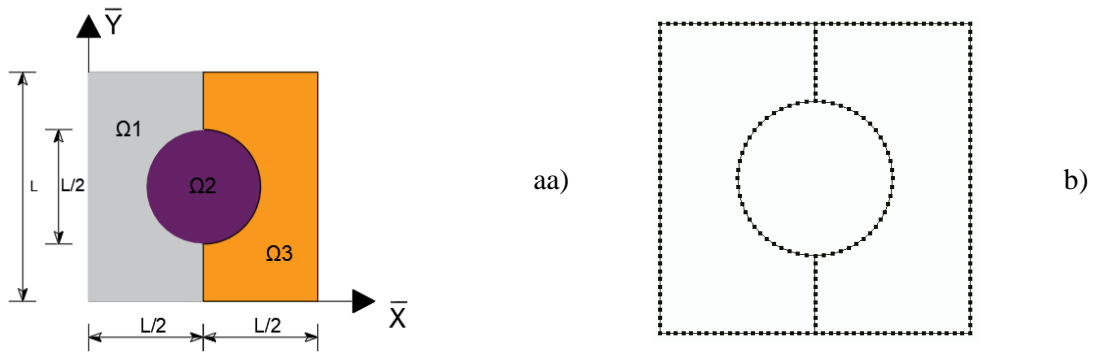


Figura 7. Modelo de compósito estudado no exemplo 01

Com a finalidade de atestar do código desenvolvido, confrontam-se os resultados obtidos com os de Sapountzakis [3]. As grandezas avaliadas são o momento inércia a torção $I_t = \sum_{i=1}^{ns} (G_i/G_0) I_{tj}$, tomando G_0 como o módulo de elasticidade do domínio Ω_3 , $G_0 = G_3 = 50 \times 10^9 \text{ N/L}$. As grandezas são calculadas de forma adimensional, onde $\bar{I}_t = I_t/L^4$, a tensão máxima adimensional, ($\bar{\tau}_{max} = \tau_{m\acute{a}x}/G_3\theta'L$) com $\bar{\tau}_{max}$ correspondente ao máximo valor de $\sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$ avaliados em N/L^2 . É importante esclarecer que esses valores dependem da relação entre os módulos de elasticidade dos materiais presentes na seção, o parâmetro ($\alpha = G_1/G_3 = 2$) e o parâmetro $\beta = G_2/G_3 = 3$. Os resultados obtidos com BE SBS mostrados na tabela 1, foram obtidos com o solver direto (LU), a integração foi realizada com 6 pontos de integração ($n_{pi}=6$)

Tabela 1. Comparação dos resultados da BE SBS com valores divulgados na literatura (exemplo 01)

\bar{I}_t		$\bar{\tau}_{max}$		ψ_{max}/L^2	
BE SBS	Sapountzakis	BE SBS	Sapountzakis	BE SBS	Sapountzakis
0.2107	0.2106	1.2606	1.2583	0.04755	0.0478

O empenamento e a distribuição tensões de cisalhamento $\sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$ na seção, em N/L^2 , são mostrados nas figuras 8 e 9 respectivamente.

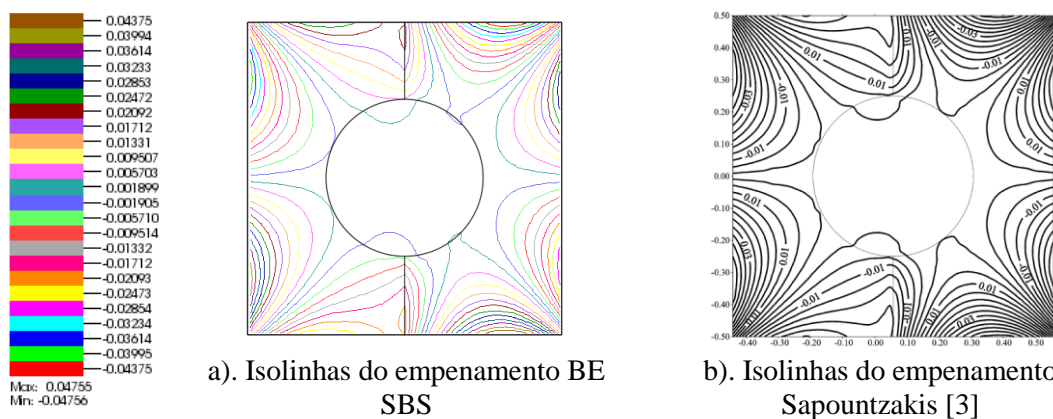


Figura 8. Resposta do empenamento ao longo do compósito do exemplo 01

Os resultados são bastante semelhantes. As pequenas divergências observadas se devem ao fato de a técnica BE SBS utilizar elementos parabólicos isoparamétricos e os algoritmos especiais de integração descritos acima, enquanto Sapountzakis [3] utiliza elementos superparamétricos constante e integração baseada na quadratura Gauss padrão. Observando a figura 8, nota-se bastante semelhança nos valores de empenamento obtido via técnica BE SBS e a metodologia adotada por Sapountzakis, atestando os resultados da BE SBS.

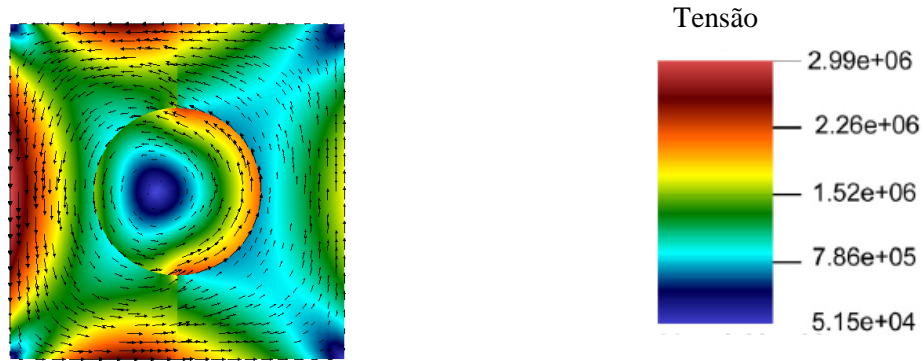


Figura 9. Distribuição dos fluxos de tensões ao longo da seção transversal do exemplo 01

Observando a figura 9, notam-se os fluxos de tensões rodeando o centro de torção, que em relação ao sistema de referencia $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ possui as coordenadas $\bar{X}_0 = 0.4430/L$ e $\bar{Y}_0 = 0.5000/L$, em concordância com o esperado.

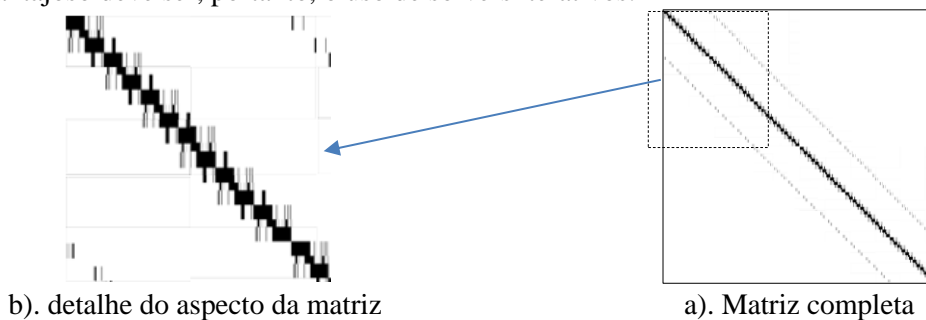
Exemplo 02. Visando expor os algoritmos desenvolvidos à problemas envolvendo compósitos de alta complexidade e demonstrar sua robustez, elaborou-se a seção com 108 sub-regiões resultante do agrupamento da seção estudada acima, também estudada em [11], conforme é ilustrado na figura 10-a). A malha utilizada, mostrada na figura 10-b), também é resultante do agrupamento da malha usada no exemplo anterior. Levando em conta os graus de liberdades acrescentados em decorrência do uso dos elementos descontínuos, o modelo possui 14328 graus de liberdades gerando um sistema de equações acoplado de 205,29 milhões de coeficientes.



a). Seção transversal do compósito estudado b). Malha acoplada de elementos de contorno

Figura 10. Seção complexa com 108 sub-regiões do exemplo 02.

Na figura 11 é mostrado a disposição das submatrizes (faixas em preto) do sistema de equações global acoplado. Nela é possível observar o quão esparsa é o sistema de equações acoplado (98.11%) e o quão vantajoso deve ser, portanto, o uso de solvers iterativos.



b). detalhe do aspecto da matriz

a). Matriz completa

Figura 11. Distribuição das matrizes das sub-regiões no sistema de equações acoplado do exemplo 02.

A figura 12 mostra o empenamento ψ/L e a distribuição do módulo das tensões de cisalhamento,

em N/L^2 , ao longo da seção do compósito.

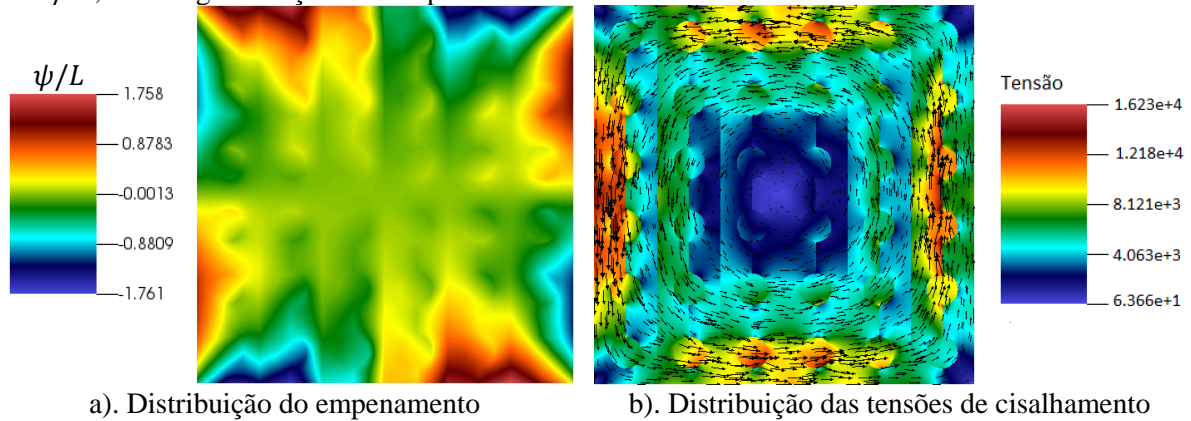


Figura 12. Resposta do compósito contendo 108 sub-regiões do exemplo 02

A tabela 2 compara o tempo de processamento e o espaço de memória necessários para resolver o sistema de equações do presente compósito utilizando o solver direto baseado na decomposição LU, com o solver iterativo BiCGSTAB(l)-SILU, adotando o parâmetro $l=5$ e tolerância para admitir a convergência ($tol= 1 \times 10^{-7}$).

Tabela 2. Comparação do desempenho dos solver iterativo com solver direto do exemplo 02

Memória Ram utilizada (Mbytes)		Tempo (seg.)	
BiCGSTAB(5)-SILU	LU	BiCGSTAB(5)-SILU	LU
46.43	1597.31	2.64	162.50

Nota-se que o solver BiCGSTAB(l)-SILU é bastante vantajoso se comparado com o solver direto, pois utilizou 34 vezes menos memória e 61 vezes menos tempo de processamento.

A tabela 3 compara os resultados a respeito de grandezas fundamentais que dependem da precisão do solver utilizado e nota-se que as divergências são insignificantes entre o solver direto, o solver BiCGSTAB(5)-SILU com ($tol= 1 \times 10^{-7}$).

Tabela 3. Resposta obtidas com solver iterativo e solver direto para o exemplo 02

\bar{X}_0/L		$\tau_{m\acute{a}x}/L$		$\psi_{m\acute{a}x}/L$		\bar{I}_t	
BiCG	LU	BiCG	LU	BiCG	LU	BiCG	LU
STAB(5)	LU	STAB(5)	LU	STAB(5)	LU	STAB(5)-	LU
- SILU		- SILU		- SILU		SILU	
2.9281	2.9281	16263.58	16263.57	1.7551	1.7551	146.76	146.76

A tabela 4 compara a performance dos solver BiCGSTAB(5)-J com o solve BiCGSTAB(5)-SILU em relação ao tempo de processamento e precisão em função da tolerância de convergência admitida. A precisão é avaliada comparando-se os valores da grandeza fundamental $\tau_{m\acute{a}x}/L$, que depende da eficiência da formulação como um todo.

Tabela 4. Respostas dos solvers iterativos para o exemplo 02

tol	Tempo (seg.)		$\tau_{m\acute{a}x}/L$	
	BiCGSTAB(l)-J	BiCGSTAB(l)-SILU	BiCGSTAB(l)-J	BiCGSTAB(l)-SILU
1×10^{-5}	0.44	2.34	51100.33	16263.89
1×10^{-6}	0.80	2.61	65495.87	16263.66
1×10^{-7}	1.61	2.64	16263.16	16263.58
1×10^{-9}	1.70	3.11	16263.57	16263.57
1×10^{-11}	1.86	2.98	16263.57	16263.57

Nota-se que para o problema estudado, convergência foi alcançada com a tolerância 1×10^{-7} para todos os solvers, coerentemente, o tempo de processamento aumenta com a diminuição da tolerância.

Isso se dá pelo fato de quando menor for a tolerância, maior o número de interação para alcançar a convergência.

Exemplo 03. Nesse problema visa-se testar os algoritmos de integração e os solvers, submetendo a BE SBS para tratar de uma seção contendo domínios esbeltos conforme as partes de aço da figura 13. A seção consiste em uma seção caixão aberta, estudada por Sapountzakis [18], onde a placa de concreto possui módulo de elasticidade transversal ($G_{conc}=12.5$ GPa) e os perfis são feitos de aço de módulo de elasticidade transversal de ($G_{aço}=87.5$ GPa), o coeficiente de Poisson para ambos os materiais são os mesmos, ($\nu_{aço} = \nu_{conc} = 0.2$).

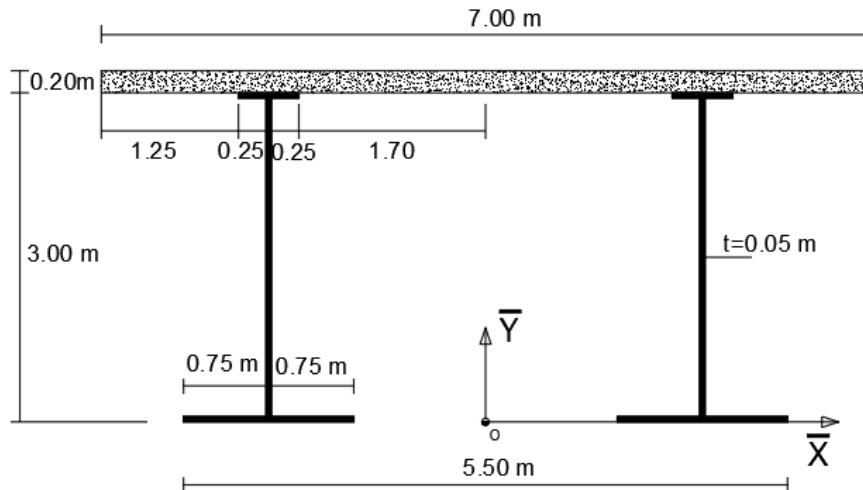


Figura 13. Seção transversal do exemplo 03

O aspecto da malha de elementos de contorno acoplada é apresentado na figura 14-a). Onde a parte de concreto possui 236 nós geométricos e 118 elementos parabólico e as duas partes de aço possuem 168 nós geométricos 84 elementos quadráticos cada. E na figura 14-b) mostra o sparcidade da matriz acoplada, de (63.20%) resultante da malha adotada.

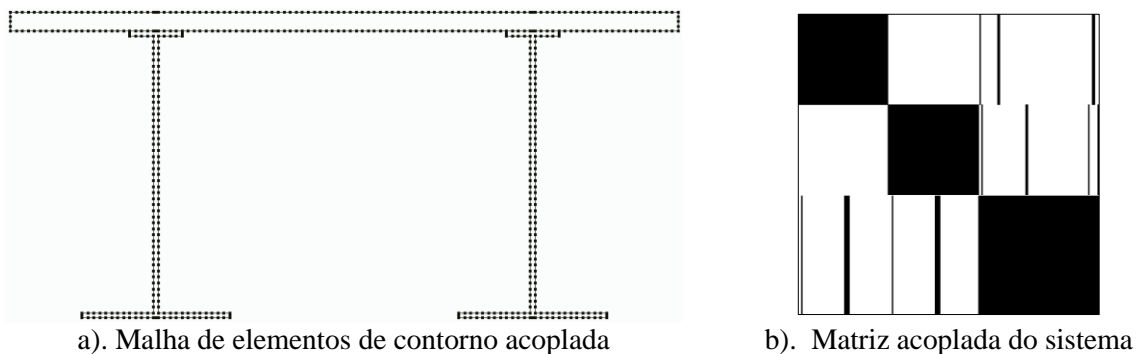


Figura 14. Malha de elementos de contorno acoplada para o exemplo 03

A performance dos solvers é mostrada na tabela 5, fixando a tolerancia em $tol=1e-6$, o paramento de estabilização em $l=5$.

Tabela 5. Comparação do desempenho dos solver iterativo com solver direto do exemplo 03

Memória Ram utilizada (Mbytes)		Tempo (seg.)	
BiCGSTAB(5)-J	LU	BiCGSTAB(5)-J	LU
2.1643	5.3531	0.02	0.03

E possível notar que a divergência entre os solver iterativo e solver diretos é insignificante quando se compara o tempo de processamento, fato que se deve a pouca esparsidade da matriz global

acoplada, como pode ser visto na figura 14-b). Entretanto quando se avalia o consumo de memória, verifica-se que a eficiência do solver iterativo é vantajoso em relação ao solver direto baseado em decomposição LU.

O desempenho dos principais solvers iterativos presentes na BE SBS são confrontados na tabela 6, onde o número de multiplicação matriz veta (nmv) e o tempo em segundos para a resolução do sistema de equações são comparados para o exemplo 2.

Tabela 6. Camaparação dos solvers implementados na BE SBS para o exemplo 03

tol	BiCG-J		BiCG-SILU		BiCGSTAB(5)-J		BiCGSTAB(5)-SILU	
	nmv	Tempo	nmv	Tempo	nmv	Tempo	nmv	Tempo
1e-4	148	0.02	102	0.03	110	0.02	70	0.03
1e-5	164	0.02	108	0.03	120	0.02	70	0.02
1e-6	174	0.03	120	0.05	130	0.02	70	0.03
1e-7	202	0.02	124	0.05	140	0.02	80	0.03
1e-9	214	0.03	136	0.05	150	0.02	100	0.05
1e-11	240	0.03	150	0.05	180	0.02	100	0.03

Analisando os resultados, todos os solvers, apresentaram excelente desempenho no quesito tempo de processamento.

Para testar a eficiência dos algoritmos de integração, calculou-se a posição do centro de torção \bar{Y}_0 , o empenamento máximo $\psi_{m\acute{a}x}$, usando 4, 5, 6 e 7 pontos de Gauss (npi) e compararam-se com Sapountzakis[18]. Para padronizar, usou-se o solver direto LU em todas as análises desse problema, e os resultados são apresentados na tabela 7.

Tabela 7. Resultados do exemplo 03

npi	\bar{Y}_0		$\psi_{m\acute{a}x}$	
	BE SBS	Sapountzakis	BE SBS	Sapountzakis
4	4.3114		6.8528	
5	4.0381		6.9337	
6	4.3833	4.3480	6.9464	6.78465
7	4.3595		6.9163	

Pode-se notar que com npi=4, as grandezas avaliadas foram satisfatórias e se apresentam bastante próximas dos valores divulgados em [18], demonstrando a eficiência dos algoritmos de integração desenvolvidos e embutidos na técnica BE SBS. O empenamento ψ é mostrado na figura 15.

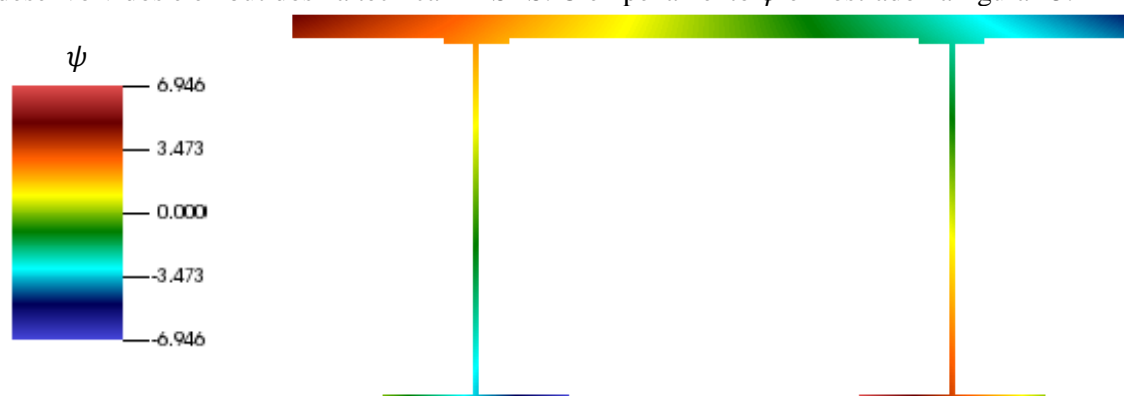


Figura 15. Resposta do empenamento na seção transversal estudada no exemplo 03

A distribuição de tensão de cisalhamento em N/m² calculadas levando em conta um momento torçor (Mt = 500kNm) é mostrada na figura 16.

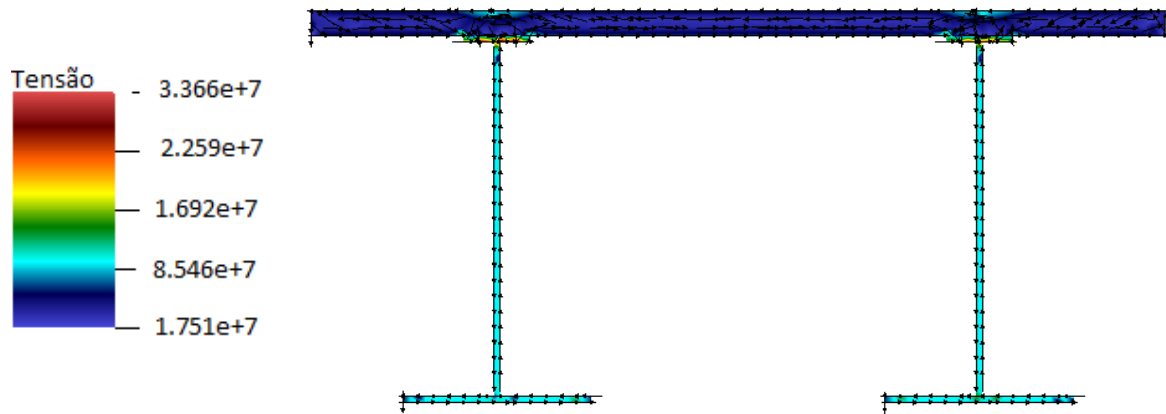


Figura 16. Distribuição do módulo da tensão de cisalhamento da seção estudada no exemplo 03

Exemplo 4. Para verificar mais um vez a robustez e eficiência dos algoritmos implementados, modificou-se a seção do exemplo anterior, incluindo na placa mais 36 barras de aço de 32 mm de diâmetro com as mesmas propriedades físicas dos perfis, o modelo é mostrado na figura 17.

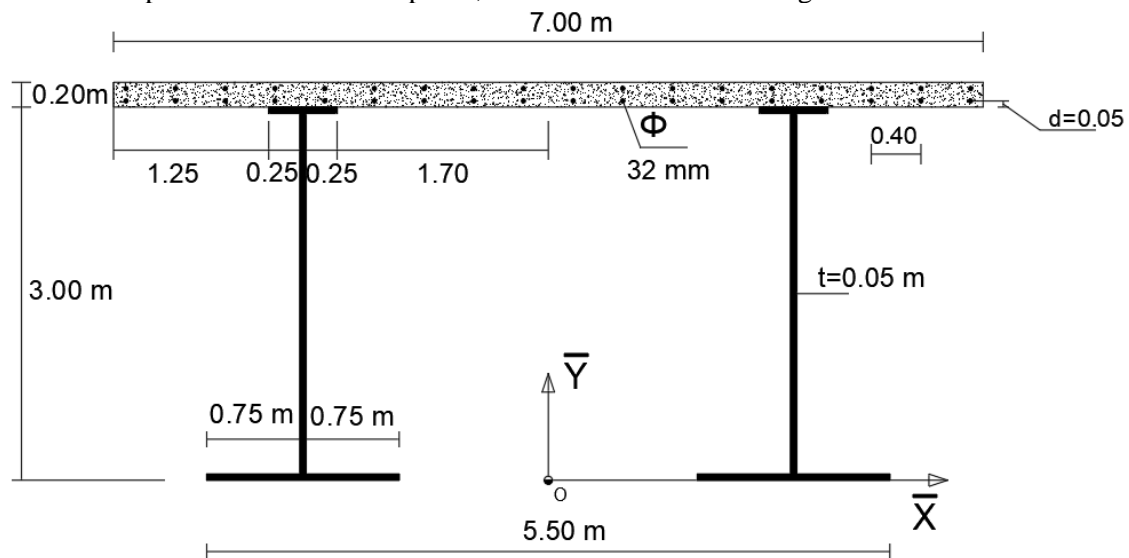


Figura 17. Modelo da seção estudada no exemplo 04

O aspecto da malha de elementos de contorno é mostrada na figura 18-a), onde a placa de concreto é modelada com 458 nós geométricos e 229 elementos quadráticos de ter nós, os dois perfis possuem 236 nós geométricos e 118 elementos parabólicos, as barras de aço foram modeladas com 8 nós e 4 elementos. Nos contornos curvos (ao redor das barras) nos cantos de cada sub-região utilizou-se elementos descontínuos. Na figura 18-b) é mostrada a matriz global acoplada, com esparsidade de 63%, resultante da malha adotada. Na tabela 8, é comparado a performance do solver iterativo BiCGSTAB(1)-SILU, com $l=5$ e $tol=1e-6$ com o solver direto.

Tabela 8. Comparação do desempenho dos solver iterativo com solver direto para o exemplo 04

Memória Ram utilizada (Mbytes)		Tempo (seg.)	
BiCGSTAB(5)-SILU	LU	BiCGSTAB(5)-SILU	LU
7.1691	23.0884	0.14	0.48

Os resultados indicam que a performance dos solver iterativos é vantajosa tanto em relação ao tempo de processamento, quanto para o consumo de memória utilizado na análise. A divergência aumentou em relação ao exemplo anterior, isso se dá em decorrência do maior número de sub-regiões envolvidas na análise e da maior ordem do modelo.

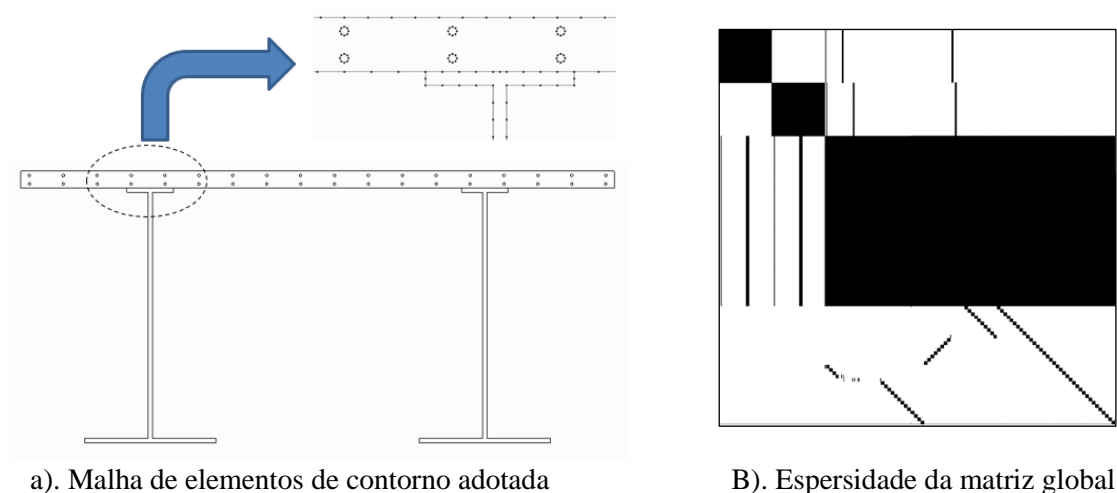


Figura 18. Malha de elementos de contorno adotada para o exemplo 04

A performance dos solvers novamente comparada em relação ao exemplo 4, onde parâmetros como tempo de processamento em segundos e o número de multiplicação matriz vetor são avaliados.

Tabela7. Performance dos solvers para o exemplo 04

tol	BiCG-J		BiCG-SILU		BiCGSTAB(5)-J		BiCGSTAB(5)-SILU	
	nmv	Tempo	nmv	Tempo	nmv	Tempo	nmv	Tempo
1e-4	776	0.45	40	0.09	140	0.08	42	0.12
1e-5	784	0.50	52	0.09	330	0.20	42	0.11
1e-6	924	0.59	56	0.14	350	0.20	52	0.14
1e-7	962	0.59	66	0.14	700	0.38	52	0.11
1e-9	1060	0.81	90	0.17	770	0.45	52	0.12
1e-11	1310	0.81	96	0.19	930	0.56	62	0.14

Verifica-se melhor desempenho do solver BiCGSTAB(5)-SILU em relação aos demais em tolerâncias mais exixtens para admição da convergência.

A figura 19 mostra o empenamento da seção estudada no exemplo 04.

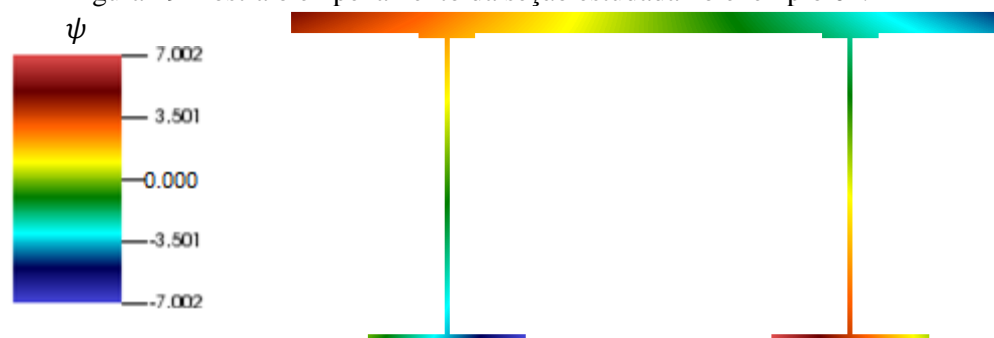


Figura 19. Empenamento da seção estudada no exemplo 04

A distribuição das tensões de csialhamento dadas em N/m^2 é mostrada na figura 19, calculadas levando em conta um momento torçor de $M_t = 500kNm$.

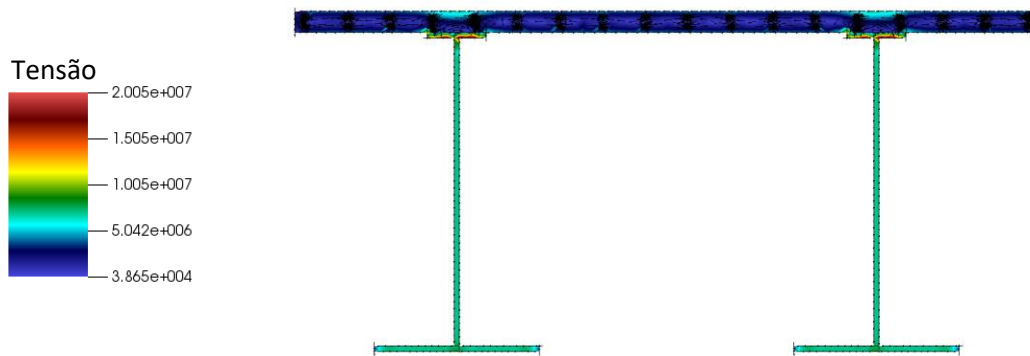


Figura 19. Distribuição das tensões de cisalhamento para o exemplo 04

5 Conclusão e considerações finais

Nos exemplos 01 e 03, verifica-se que os resultados obtidos com a presente formulação concordam muito bem com os apresentados na literatura já estabelecida, o que atesta a precisão da presente formulação. Em especial no exemplo 03 e no exemplo 04, em decorrência da esbelteza das sub-regiões envolvidas, uma grande quantidade de coeficientes das matrizes do MEC resultam de integração de núcleos quase-singulares, de modo que a boa concordância com resultados obtidos na literatura demonstra a eficiência dos algoritmos de integração desenvolvidos.

No exemplo 02, ficou evidenciada a robustez do código desenvolvido, apresentando ótimo desempenho na análise de seções de alta complexidade, contendo grande número de sub-regiões e de detalhes geométricos. O emprego dos solvers iterativos de Krylov, que possibilitam a resolução do sistema de equações sem a montagem explícita da matriz global, trouxe fantástica redução do tempo de processamento e enorme economia de memória em comparação ao solver direto. É importante notar, que quando maior o número de sub-regiões, mais vantajoso se torna utilizar os solvers iterativos, visto que a tendência da esparsidade é aumentar conforme se aumenta o número de sub-regiões.

A cerca dos pre-condicionadores, no que se refere ao tempo de processamento, não é possível chegar a uma conclusão se o de Jacobi, ou o de fatoração LU é o mais eficiente, visto que no exemplo 02, o BiCGSTAB(1)-J apresentou melhor desempenho, enquanto que no exemplo 04, o solver BiCGSTAB(1)-SILU apresentou melhor desempenho. Entretanto, observando a tabela 4 do exemplo 02, verifica-se que a precisão do BiCGSTAB(1)-SILU forneceu resultados mais precisos, mesmo adotando uma tolerância maior.

Todos esses fatos, demonstram que a técnica BE-SBS é robusta e deve ser considerada no desenvolvimento de programas gerais baseados no MEC, além disso, os algoritmos desenvolvidos, também podem ser utilizados para a determinação da matriz de rigidez de elementos estruturais envolvendo seções complexas, se mostrando essa, mais uma aplicação da BE SBS.

Agradecimentos

Os autores desse trabalho agradecem a Universidade Federal de Ouro Preto por oferecer o programa de pós-graduação em Engenharia Civil (PROPEC) do qual fazem parte. Agradecem também as instituições CAPES e CNPq por fomentar educação de nível superior no País. Além disso, o primeiro autor faz um especial agradecimento a Universidade do estado de Mato Grosso por cede-lo durante o período do curso de doutorado.

Referências

- [1] Athanasiadis, G. *Direkte und indirekte Randelementmethoden zur Bestimmung der Lage des Schubmittelpunktes beliebig geformter Staquerschnitte*. Forschung Im Ingenieurwesen Bd. 55 (1989) Nr.2.
- [2] E.J. Sapountzakis. *Solution of non-uniform torsion of bars by an integral equation method*. Computer and Structures 77(2000) 659-667.
- [3] E.J. Sapountzakis. *Nonuniform torsion of multimaterial composite bars by the boundary element method*. Computers and Structures 79(2001) 2805-2816.
- [4] E.J. Sapountzakis and V.G. Mocos. *Nonuniform torsion of bars of variable cross section*. Computer and Structures 82 (2004) 703-715.
- [5] F.C. Araújo, D.R. Alberto and C. Dors. *Analysis of 3D time-dependent acoustic problems via a generic BE substructuring algorithm based in iterative solvers*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 27(2003) 705-716.
- [6] F.C. Araújo, C. Dors, C.J. Martins and W.J. Mansur. *New developments on BE/BE multi-zone algorithms based on Krylov solvers – applications to 3D frequency-problems*. J. Braz. Soc. Mech. Sci & Eng. 26(2004) 231-248.
- [7] F.C. Araújo, K.I. Silva and J.C.F. Telles. *Generic domain decomposition and iterative solvers for 3D BEM problems*. International Journal For Numerical in Engineering. 68 (2006) 448-472
- [8] F.C. Araújo and L. J. Gray. *Evaluation of effective material parameters of CNT-reinforced composites via 3D BEM*. Com. Mod. Eng Sci 24(2008) 633-645
- [9] F.C. Araújo, E.F. DAZEVEDO and L.J. Gray. *Constructing efficient substructure-based preconditioners for BEM systems of equations*. Engineering Analysis with Boundary Elements 35(2011) 517-526.
- [10] F.C. Araújo, E.F. DAZEVEDO, L.J. Gray and R. Degenhardt. *A BE-SBS based solver for decomposition in BE methods*. Engineering Analysis with Boundary Elements 37 (2013) 1267-1275.
- [11] F.C. Araújo, M.J. Hillesheim and D. Soares. *Revisiting the BE SBS algorithm and applying it solve torsion problems in composite bars: Robustness and efficiency study*. Engineering Analysis with Boundary Elements 107(2019) 12-24
- [12] v. Vorst HA. *Iterative Krylov methods for large linear systems*. Cambridge University Press, 2003.
- [13] R. Fletcher. *Conjugate gradient methods for indefinite systems*. In Lecture Notes in Mathematics, 506. Berlin: Springer-Verlag (1976) 73-89
- [14] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. Philadelphia: Society for industrial and Applied Mathematics (SIAM); 2003
- [15] K. Chen. *Matrix preconditioning techniques and applications*. Cambridge, UK; Cambridge University Press; 2005.
- [16] M. Benzi and T.A. Miroslav. *A sparse approximate inverse preconditioner for monosymmetric linear systems*. SIAM J Sci Computer 19(3)9(1998) 68-94
- [17] U. Langer, D. Pusch and S. Reitzinger. *Efficient preconditioners for boundary element matrices based on grey-box algebraic multigrid methods*. Int J Numer Methods Eng 58(13):19(2003) 37-53
- [18] E.J. Sapountzakis and V.G. Mocos. *3-D beam element of composite cross section including warping and shear deformation effects*. Computers and Structures 85(2007) 102-116