

ANÁLISE DE DESEMPENHO DE ALGUMAS FUNÇÕES DE BASE RADIAL COM A TÉCNICA DE INTERPOLAÇÃO DIRETA PARA CALCULAR FREQUÊNCIAS NATURAIS EM PROBLEMAS ACÚSTICOS TRIDIMENSIONAIS

João Paulo Barbosa

jpbarbosa@ifes.edu.br

Instituto Federal do Espírito Santo – IFES Campus São Mateus - Rodovia BR 101 Norte – Km 58 – Bairro Litorâneo - 29.932-540, São Mateus, ES – Brazil

Carlos Friedrich Loeffler

Luciano de Oliveira Castro Lara

carlosloeffler@bol.com.br

castrolar@hotmai.com

Programa de Pós Graduação da Universidade Federal do Espírito Santo – PPGEM/UFES – Centro Tecnológico – Av. Fernando Ferrari, 540 – Bairro Goiabeiras – 29.075 – 910, Vitoria, ES – Brazil

Abstract. Direct Interpolation Boundary Element Method (DIBEM) has been an effective alternative to other techniques aimed at transforms domain integrals in boundary integrals since it solves problems modeled by non-adjoint differential operators. The DIBEM was successfully applied to two-dimensional problems involving the solution of Poisson, Helmholtz, and Diffusion-advection equations. The reason for its better performance is based, above all, on the fact that the approximation is given by on the use of radial functions whose mathematical model is more similar to an interpolation procedure, compared to other techniques. Intended to further improve the knowledge about the particularities of DIBEM, in this work, an extension of the technique to the three-dimensional eigenvalue problems was done, focusing on the performance analysis of the various classic radial basis functions, widely used in two-dimensional problems. Some radial functions have already been used satisfactorily in the solution of three-dimensional problems, but in this work, the tests are performed with a broader spectrum of radial functions. To evaluate the accuracy of the results, the natural frequencies are calculated numerically and comparison with the available analytical solutions.

Keywords: Boundary Element Method, Radial Basis Function, Helmholtz Equation, Calculation of natural frequencies.

1 Introdução

A obtenção da forma integral inversa clássica do Método dos Elementos de Contorno (MEC) não é imediata quando a equação diferencial de governo é composta por operadores não auto-adjuntos. Assim, a representação desejada somente em termos de integrais de contorno deve ser alcançada através de alguma metodologia auxiliar. Neste sentido, o desenvolvimento de formulações do MEC fundamentadas na aproximação de certas parcelas do modelo matemático como uma sequência de funções de base radial (FBR) [1,2] tem sido um dos principais meios para se chegar a essa forma inversa e, ao mesmo tempo, expressá-la apenas em termos de integrais de contorno. Estas FBR alcançaram atualmente um progresso teórico destacável, motivado, sobretudo, por aplicações junto às técnicas denominadas "Meshless", originalmente desenvolvidas a partir do Método dos Elementos Finitos [3,4].

Entretanto, historicamente o uso das funções radiais no MEC antecedeu em vários anos as aplicações nos Meshless [5], particularmente devido ao surgimento da formulação com Dupla Reciprocidade (MECDR) em 1983, com Nardini e Brebbia [6]. Através da escolha de FBR que sejam descritas por operadores auto-adjuntos, as integrais de domínio são convertidas em duas integrais de contorno usando o Teorema da Divergência. Além disso, o uso das FBR mostrou-se uma ferramenta auxiliar importante por permitir a utilização de uma solução fundamental mais simples em problemas correlatos mais elaborados e, conseqüentemente, atender a uma gama mais ampla de aplicações. Assim, por exemplo, os problemas escalares como os casos transientes, de valor característico, de resposta dinâmica e os casos em que há presença de fontes ou ações de domínio, anteriormente solucionáveis apenas com métodos dispendiosos e relativamente complexos [8], puderam ser resolvidos usando uma solução fundamental estacionária. Contudo, para se transformar as integrais de domínio em integrais de contorno usando as FBR é necessário impor internamente certo número de pontos base ou de interpolação para representar as propriedades dentro do domínio; a ausência desses pontos, comumente chamados de pólos, evita um desempenho numérico superior.

Muitas críticas norteadas por aspectos operacionais foram feitas às FBR clássicas, que possuem um suporte pleno e são tradicionalmente utilizadas no MECDR. Isto porque nestas funções um ponto base interage com todos os demais. Entre os avanços notáveis, destaca-se a geração das funções de base radial compactas (FBRC) [9,10]. Tais funções apresentam um valor específico de raio, denominado suporte, que superado impõe valores nulos à função. Um ponto base relaciona-se apenas com os mais próximos, porque acima de certo valor de raio - o denominado suporte - os resultados são iguais a zero, implicando em matrizes esparsas nas quais a diagonal é dominante e em ganhos no custo do processamento computacional. Além disso, as principais FBRC são geradas de acordo com rigorosas regras matemáticas, procurando algumas qualidades como positividade e simetria radial. Mostram-se, então, particularmente vantajosas nos casos em que a matriz de interpolação é composta de um grande número de pontos base e poderia ser mal condicionada. De fato, testes computacionais mostraram que muitas funções de base radial completa tornam-se inadequadas com o MECDR em certas aplicações. Alguns estudos indicam a falta de convergência quando essas funções radiais clássicas são usadas no MECDR em conjunto com procedimentos iterativos [11].

Neste contexto, contudo, deve ser enfatizado que o uso de funções radiais no MECDR difere do procedimento de interpolação simples, pois trabalha com duas funções primitivas a partir da função de interpolação original [12], gerando matrizes auxiliares que multiplicam as matrizes clássicas H e G do MEC e podem produzir efeitos numéricos prejudiciais adicionais [11,13].

Com relação às FBR clássicas, muitos testes numéricos mostraram que o desempenho usando o MECDR é fortemente afetado por muitos fatores, como a geometria, as condições de contorno e a distribuição da fonte no domínio [14]. O desempenho de uma dada função radial em problemas bidimensionais pode ser completamente diferente se o domínio for tridimensional [15,16].

Recentemente, uma técnica alternativa que também utiliza FBR foi proposta para superar esses problemas: é o Método de Elementos de Contorno de Interpolação Direta (MECID), cujo modelo matemático é mais semelhante a um procedimento de interpolação, uma vez que se aproxima o núcleo completo da integral de domínio, incluindo a solução fundamental. O MECID foi aplicado com sucesso a problemas escalares envolvendo a solução da equação de Poisson [17] e da Equação de Helmholtz [18], ambos usando funções radiais clássicas; no entanto, ele ainda continua sendo testado por meio de

novas aplicações, como os problemas difusivo-advectivos e os problemas de propagação de ondas acústicas.

Possuindo uma estrutura matemática mais simples, o MECID é uma técnica que já mostrou ser mais versátil e robusta que o MECDR, pois apresenta menores imprecisões e instabilidades numéricas, uma vez que a transformação para eliminar a integral de domínio é composta por uma única matriz. Há evidências de que os problemas do MECDR estão relacionados à construção das já mencionadas duas matrizes auxiliares de interpolação. Assim, a MECID é uma técnica mais semelhante a um procedimento de interpolação clássica.

Por outro lado, testes numéricos recentes mostraram que muitas funções radiais de base compacta de alta ordem, quando utilizadas no MECID com suporte pleno, são instáveis ou tem baixíssima precisão [19]; também algumas das funções clássicas já foram empregadas satisfatoriamente na solução de problemas tridimensionais. Porém, neste trabalho são feitos testes com um espectro mais amplo de funções e, visando aprimorar ainda mais o conhecimento sobre as particularidades destas funções na MECID, faz-se a uma extensão desta técnica aos problemas de Helmholtz tridimensionais, com foco na análise de desempenho, algo ainda não pesquisado.

Escolheu-se o problema do autovalor associado por permitir uma avaliação precisa do desempenho do modelo numérico, através da comparação dos valores das frequências calculadas com valores obtidos por uma referência segura, além de ser um problema de particular interesse em dinâmica. A comparação de desempenho é realizada considerando-se os resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos, utilizando malhas refinadas e também através de soluções analíticas disponíveis.

2 Formulação integral da MECID

Considerando procedimentos matemáticos bem conhecidos no contexto do MEC, tem-se a forma integral da Equação de Helmholtz dada pela seguinte expressão [20]:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma = \frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega \quad (1)$$

Na Eq. (1), $u(X)$ é o potencial escalar e $q(X)$ é sua derivada normal; reciprocamente, ω é a frequência associada; e k é a velocidade de propagação das ondas acústicas. O coeficiente $c(\xi)$ depende da posição do ponto ξ em relação ao domínio físico $\Omega(X) + \Gamma(X)$, e se o ponto está localizado no limite $\Gamma(X)$, também depende de sua suavidade [7]. Na Eq. (1) a solução fundamental tridimensional $u^*(\xi, X)$ e sua derivada normal $q^*(\xi, X)$ referentes a problemas de Laplace ou Poisson [7] são usadas, ou seja:

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (2)$$

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{\cos(r, n)}{4\pi r^2}; \quad \cos(r, n) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}| |\vec{n}|} \quad (3)$$

Então, para que as operações matemáticas usuais do MEC sejam mantidas, a abordagem básica do operador Laplaciano é mantida. Enquanto que o núcleo completo da integral de domínio, usando o MECID, é diretamente interpolado usando funções de base radial.

Na abordagem do MECID é necessário evitar a singularidade na solução fundamental, produzida pela coincidência entre posições de pontos fonte e pontos campo, uma vez que um procedimento de interpolação direta é executado. Assim, é necessária a seguinte estratégia de regularização:

$$\frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega = \frac{\omega^2}{k^2} \left[\int_{\Omega} [u(X) - u(\xi)]u^*(\xi; X)d\Omega \right] + \frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} u(\xi)u^*(\xi; X)d\Omega \quad (4)$$

O núcleo completo da primeira integral de domínio no lado direito da Eq. (4) é interpolado diretamente usando um conjunto de funções de base radial F^i , como mostrado a seguir:

$$\left[\int_{\Omega} [u(X) - u(\xi)] \mu^*(\xi; X) d\Omega \right] \approx \int_{\Omega} \xi \alpha^i F^i(X^i; X) d\Omega \quad (5)$$

Usando uma função de base radial primitiva, é possível transformar a integral de domínio em uma integral de contorno facilmente:

$$\int_{\Omega} \xi \alpha^i F^i(X^i; X) d\Omega = \int_{\Omega} (\xi \alpha^i \psi_{,j}^i(X^i; X)) d\Omega = \int_{\Gamma} (\xi \alpha^i \psi_{,j}^i(X^i; X) n_j(X)) d\Gamma = \xi \alpha^i \int_{\Gamma} \eta^i(X^i; X) d\Gamma \quad (6)$$

O argumento da função de base radial é composto da distância euclidiana $r(X^i, X)$, que caracteriza as posições dos pontos base X^i em relação aos pontos genéricos do domínio X . Após o processo de discretização, esses pontos X são utilizados para gerar os pontos nodais, em que o potencial $u(X)$ é calculado. Para cada ponto fonte ξ , a interpolação dada pela Eq. (5) corresponde à varredura de todos os pontos X^i em relação aos pontos de domínio X , ponderados pelos coeficientes $\xi \alpha^i$. Assim, esses coeficientes podem ser obtidos resolvendo-se um sistema de equações algébricas, como mostrado adiante.

A segunda integral de domínio no lado direito da Eq. (4) pode ser escrita como uma integral de contorno usando o Tensor de Galerkin como mostrado na Eq. (7):

$$\frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega = \frac{\omega^2}{k^2} u(\xi) \int_{\Gamma} G_{,i}^*(\xi; X) n_i d\Gamma \quad (7)$$

Em problemas tridimensionais, a derivada normal é dada pela seguinte equação:

$$G_{,i}^*(\xi; X) n_i(X) = \xi P^X = \frac{1}{4\pi r} r_i n_i \quad (8)$$

Portanto, considerando as operações matemáticas anteriores, neste ponto a equação integral governante é dada por:

$$c(\xi) u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X) q^*(\xi; X) d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X) u^*(\xi; X) d\Gamma = \frac{\omega^2}{k^2} \left[\xi \alpha^i \int_{\Gamma} \eta^i(X^i; X) d\Gamma \right] + \frac{\omega^2}{k^2} u(\xi) \int_{\Gamma} G_{,i}^*(\xi; X) n_i d\Gamma \quad (9)$$

O procedimento para avaliação numérica das integrais anteriormente apresentadas é muito simples e bem conhecido:

$$\begin{aligned} H_{11}u_1 + \dots + H_{1n}u_n - G_{11}q_1 - \dots - G_{1n}q_n &= \frac{\omega^2}{k^2} \left[\alpha^1 N_1 + \alpha^2 N_2 + \dots + \alpha^m N_m \right] \\ H_{21}u_1 + \dots + H_{2n}u_n - G_{21}q_1 - \dots - G_{2n}q_n &= \frac{\omega^2}{k^2} \left[\alpha^1 N_1 + \alpha^2 N_2 + \dots + \alpha^m N_m \right] \\ \vdots & \\ H_{n1}u_1 + \dots + H_{nn}u_n - G_{n1}q_1 - \dots - G_{nn}q_n &= \frac{\omega^2}{k^2} \left[\alpha^1 N_1 + \alpha^2 N_2 + \dots + \alpha^m N_m \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Este procedimento resulta em uma expressão matricial, que já considera a existência de pólos internos, o que também funciona como pontos fonte, como mostra a seguinte equação:

$$\begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & \cdots & H_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \cdots & G_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \frac{\omega^2}{k^2} \begin{pmatrix} {}^1\alpha^1 & \cdots & {}^1\alpha^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {}^n\alpha^1 & \cdots & {}^n\alpha^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_m \end{pmatrix} + \frac{\omega^2}{k^2} \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \frac{\omega^2}{k^2} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \frac{\omega^2}{k^2} \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} \quad (11)$$

O procedimento detalhado da matriz requerido para a determinação de ${}^\xi\alpha^i$ é exibido a seguir. Considerando uma matriz diagonal ${}^\xi\Lambda$ relacionada à solução fundamental, a seguinte relação é válida:

$$[{}^\xi\alpha] = [F]^{-1}[{}^\xi\Lambda][F]\alpha = [F]^{-1}[{}^\xi\Lambda][u] \quad (12)$$

Substituindo Eq. (12) na Eq. (11) resulta:

$$A_\xi = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & \cdots & N_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{11} & \cdots & F^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F^{n1} & \cdots & F^{nn} \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} {}^\xi\Lambda^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {}^\xi\Lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} {}^\xi\Lambda^1 u_\xi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {}^\xi\Lambda^n u_\xi \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & \cdots & S_n \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} {}^\xi\Lambda^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {}^\xi\Lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} {}^\xi\Lambda^1 u_\xi & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {}^\xi\Lambda^n u_\xi \end{pmatrix} \right\} \quad (13)$$

Usando a Eq. (7) a seguinte equação é alcançada:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\int_1^1 P^1 d\Gamma_1 + \int_1^1 P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_1^1 P^n d\Gamma_n] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [\int_1^2 P^1 d\Gamma_1 + \int_1^2 P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_1^2 P^n d\Gamma_n] & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [\int_1^n P^1 d\Gamma_1 + \int_1^n P^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_1^n P^n d\Gamma_n] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (14)$$

O sistema de matriz final pode ser escrito como mostrado na Eq. (15), onde nas submatrizes são enfatizados os nós de contorno e os pólos internos:

$$\begin{pmatrix} H_{cc} & 0_{ci} \\ H_{ic} & I_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ u_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{cc} & 0_{ci} \\ G_{ic} & 0_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_c \\ q_i \end{pmatrix} = \frac{\omega^2}{k^2} \begin{pmatrix} (A_1 + Z_c) \\ \dots \\ (A_n + Z_i) \end{pmatrix} = \frac{\omega^2}{k^2} \begin{pmatrix} M_{cc} & M_{ci} \\ M_{ic} & M_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ u_i \end{pmatrix} \quad (15)$$

O arranjo do sistema matricial dado pela Eq. (12) em uma forma adequadamente generalizada para a solução de autovalor é dada com detalhes em trabalhos anteriores [17, 18]. Deve-se ressaltar que as matrizes não são simétricas e a matriz de inércia é construída usando bases radiais. Assim, uma subrotina escrita na linguagem FORTRAN baseada na redução de Hessenberg foi usada para determinação

de autovalores. É possível obter valores complexos e negativos para as frequências mais altas, o que fornece uma idéia da precisão exibida pelo procedimento.

3 Funções de base radial

No trabalho pioneiro de Nardini e Brebbia [6], esses autores listam quatro possíveis tipos de FBR: distância euclidiana simples, funções polinomiais, a constante 1 e funções seno e cosseno. Neste trabalho, excluíram-se as funções trigonométricas, pois raramente são usadas. No citado artigo, os autores mencionados escolheram a função $F^j = 1 + r$ e ainda hoje é comum encontrar esta função em diversas aplicações [14]. Já a função radial de placa fina foi incluída aqui, pois é uma das FBR mais usadas atualmente e teve bom desempenho nas aplicações precedentes da MECID.

A Tabela 1 mostra as FBR que são usados neste trabalho.

Tabela 1. Funções clássicas de base radial.

Funções de Base Radial		Primitivas
r	$F^j = r$	$\Psi_{,i}^j = \left(\frac{r^2}{4}\right)r_{,i}$
r ³	$F^j = r^3$	$\Psi_{,i}^j = \left(\frac{r^4}{6}\right)r_{,i}$
r ² lnr	$F^j = r^2 \ln r$	$\Psi_{,i}^j = \left(\frac{r^3}{25}(5 \ln r - 1)\right)r_{,i}$
1+r	$F^j = 1+r$	$\Psi_{,i}^j = \left(\frac{r}{3} + \frac{r^2}{4}\right)r_{,i}$

As FBRC mais utilizadas são as funções de Wendland e Wu. Essas funções são construídas objetivando importantes propriedades matemáticas, como suavidade e positividade. O grau de continuidade das derivadas é um dos mais importantes parâmetros que a definem [21]. Existem muitas FRBC; as funções aqui escolhidas são das simples. Nota-se que, de acordo com o usualmente apresentado, as funções vêm escritas com um parâmetro adimensional de controle δ .

A Tabela 2 mostra as FBRC de Wendland e a Tabela 3 mostra as FBRC de Wu, ambas usadas neste trabalho. Muitas outras FBRC podem ser encontradas na literatura; no entanto, como mencionado anteriormente, testes realizados para resolver problemas de Poisson [22] mostraram que funções de alta ordem apresentam problemas numéricos, provavelmente devido ao efeito da transformação de contorno que existe no modelo MECID.

Tabela 2. Funções de Wendland de suporte compacto.

Funções de Base Radial		Primitivas
wl 1	$\Phi_{1,0} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^1$	$\Psi_{,i}^j = \left[\frac{r}{3\delta} - \frac{r^2}{4\delta}\right]r_{,i}$
wl 2	$\Phi_{3,0} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^2$	$\Psi_{,i}^j = \left[\frac{r}{3\delta} - \frac{r^2}{2\delta} + \frac{r^3}{5\delta^2}\right]r_{,i}$
wl 3	$\Phi_{5,0} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^3$	$\Psi_{,i}^j = \left[\frac{r}{3\delta} - \frac{3r^2}{4\delta} + \frac{3r^3}{5\delta^2} - \frac{r^4}{6\delta^3}\right]r_{,i}$
wl 4	$\Phi_{3,1} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[1 + \frac{4r}{\delta}\right]$	$\Psi_{,i}^j = \left[\frac{r}{3\delta} - \frac{2r^3}{\delta^2} + \frac{10r^4}{3\delta^3} - \frac{15r^5}{7\delta^4} + \frac{r^6}{2\delta^5}\right]r_{,i}$

As duas funções de Wu de suporte compacto utilizadas nesse trabalho e suas primitivas são mostradas na Tabela 3. Foram escolhidas devido a seus resultados para problemas bidimensionais.

Tabela 3. Funções de Wu de suporte compacto.

	Funções de Base Radial	Primitivas
wu	$\Phi_{3,3} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^4 \left[16 + \frac{29r}{\delta} + \frac{20r^2}{\delta^2} + \frac{5r^3}{\delta^3}\right]$	$\Psi_{,i}^j = \left(\frac{16r}{3\delta} - \frac{35r^2}{4\delta} + \frac{35r^4}{6\delta^3} - \frac{21r^6}{8\delta^5} + \frac{r^8}{2\delta^7}\right) r_{,i}$
wuc	$\Phi_{2,3} = \left[1 - \frac{r}{\delta}\right]_+^5 \left[8 + \frac{40r}{\delta} + \frac{48r^2}{\delta^2} + \frac{25r^3}{\delta^3} + \frac{5r^4}{\delta^4}\right]$	$\Psi_{,i}^j = \left(\frac{8r}{3\delta} - \frac{72r^3}{5\delta^2} + \frac{35r^4}{2\delta^3} - \frac{63r^6}{8\delta^5} + \frac{27r^8}{10\delta^7} - \frac{5r^{10}}{12\delta^9}\right) r_{,i}$

4 Simulações numéricas

4.1 Primeiro exemplo: vibração livre de uma barra na forma de cubo

O primeiro exemplo consiste de uma estrutura homogênea na forma de um cubo em vibração livre, preso na face y - z , onde $x = 0$, como mostrado na Fig. 1. A condição da análise de vibração livre é dada pela aplicação de condições de contorno do tipo natural nas outras faces.

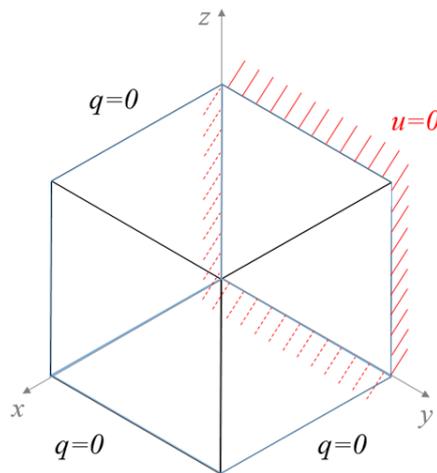


Figura 1: Geometria e condições de contorno para o primeiro exemplo.

Três diferentes malhas compostas com elementos triangulares foram usadas nas simulações da MECID como mostrado na Tabela 4:

Tabela 4. Quantidade de pontos nodais e elementos em cada malha do exemplo tridimensional homogêneo da Equação de Helmholtz.

Malhas	Elementos	Pontos no contorno	Pontos internos	Total de pontos
Malha 1	432	294	398	692
Malha 2	768	486	995	1481
Malha 3	3072	1734	1867	3601

O modelo escalar tridimensional capta frequências de vibração livre associadas aos modos axiais, distorcionais e torcionais da barra. Estes últimos não são descritos nas soluções analíticas apresentadas na literatura especializada; por essa razão tomou-se a solução numérica pelo Método dos Elementos

Finitos como referência, considerando uma malha composta por 95.033 elementos e 21.952 pontos nodais.

No cálculo do erro relativo, toma-se como valor de medida o módulo da diferença entre os valores numéricos e analíticos, dividido pelo valor analítico.

Para o cálculo dos autovalores, uma vez que as matrizes não são simétricas, foi usado o algoritmo de Hessenberg, que determina inicialmente os autovetores para depois determinar as frequências naturais associadas, de forma que o modelo discreto empregado é de fundamental importância para representar com precisão determinadas configurações modais, sobretudo as mais intrincadas.

Nesse contexto, devem-se ressaltar as peculiaridades da interpolação com funções de base radial: algumas funções têm mais dificuldade que outras na representação de certas configurações modais; a distribuição da nuvem de pontos internos interpolantes interfere na precisão, bem como sua quantidade. Contudo, há ainda outros problemas: a identificação de frequências mais altas por inspeção no formato do modo correlacionado torna-se muito difícil, especialmente no que diz respeito aos modos não axiais.

Inicialmente, utiliza-se a malha menos refinada. Os resultados das frequências calculadas numericamente para todas as funções são apresentados na Fig. 2. Percebe-se que muitas delas apresentaram desempenho muito ruim. Mesmo as funções de Wendland e Wu não funcionaram bem. Inicialmente, pensou-se que a possível razão desse comportamento insatisfatório estivesse no uso das primitivas dessas funções; todavia, testes recentes em duas dimensões com o procedimento de integração radial (MIR) [23] associado com o MECID apresentaram o mesmo resultado. Na realidade, o uso da função primitiva acompanhada de suficiente refinamento da nuvem de pontos internos produz resultados equivalentes aos obtidos com a integração radial direta para malhas mais refinadas [24, 25].

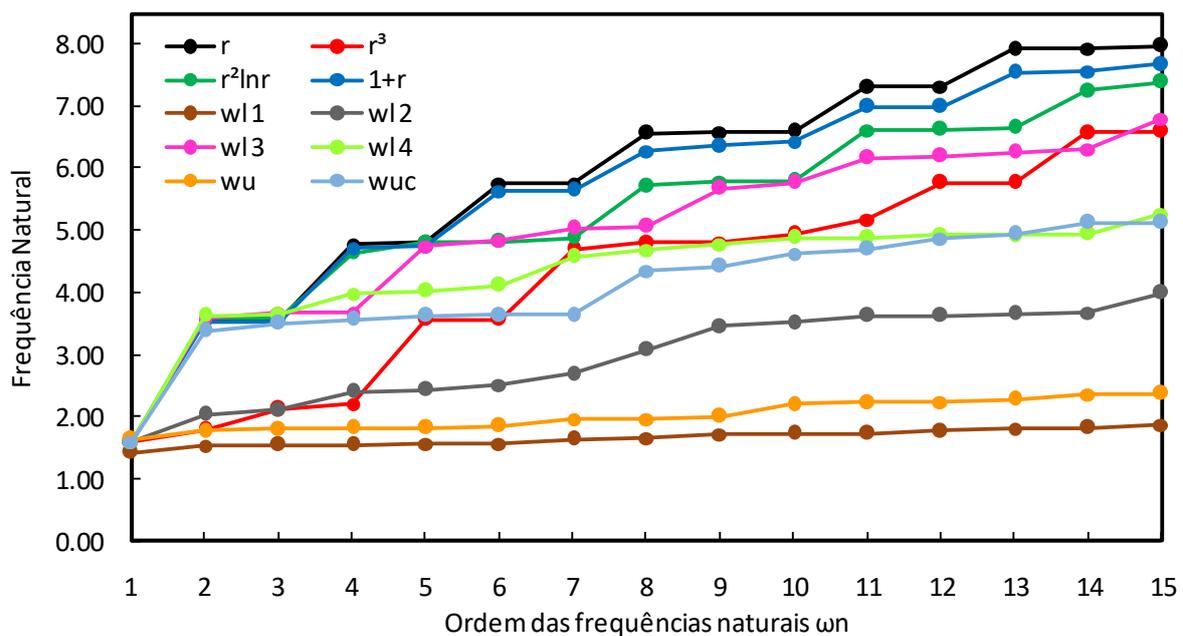


Figura 2: Resultados das frequências naturais para vibração livre em um cubo utilizando todas as funções de base radial para a malha 1.

Nos gráficos que se seguem, foram calculados os erros relativos da MECID comparativamente ao MEF na determinação das frequências exclusivamente para as funções que mostraram bons resultados, ou seja, comportando-se de modo que o valor das frequências naturais aumente adequadamente e monotonicamente crescente com seu ordenamento no espectro. Assim, nas Figs. 3, 4 e 5 são apresentadas as diferenças relativas para as diferentes malhas mostradas na Tabela 4.

Pode-se observar que o erro cometido no cálculo das catorze primeiras frequências se reduz com o refinamento da malha de contorno e com a inserção de um número maior de pontos de interpolação no interior. Embora a função radial simples apresente os menores erros até a décima terceira frequência, a função de placa fina mostrou-se mais regular. Com estas funções, pode-se observar que o refinamento

da malha diminuiu a magnitude da curva de erro relativo do MECID sobre praticamente toda a faixa de frequência examinada. Os resultados podem ser considerados bons dentro da faixa examinada.

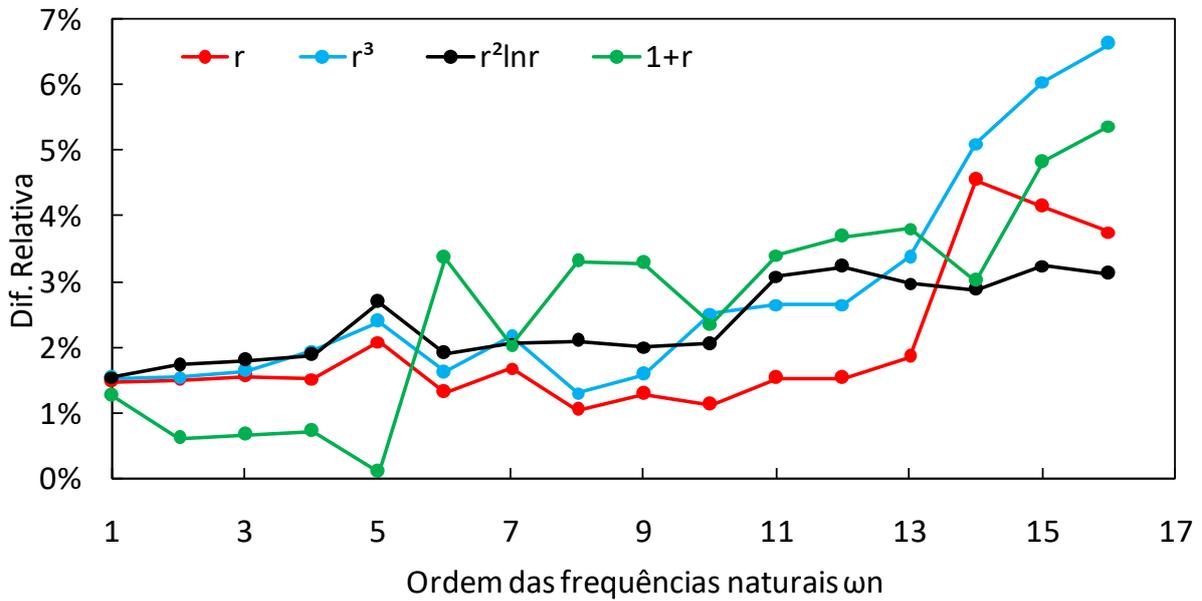


Figura 3: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando as funções de base radial clássica para a malha 1.

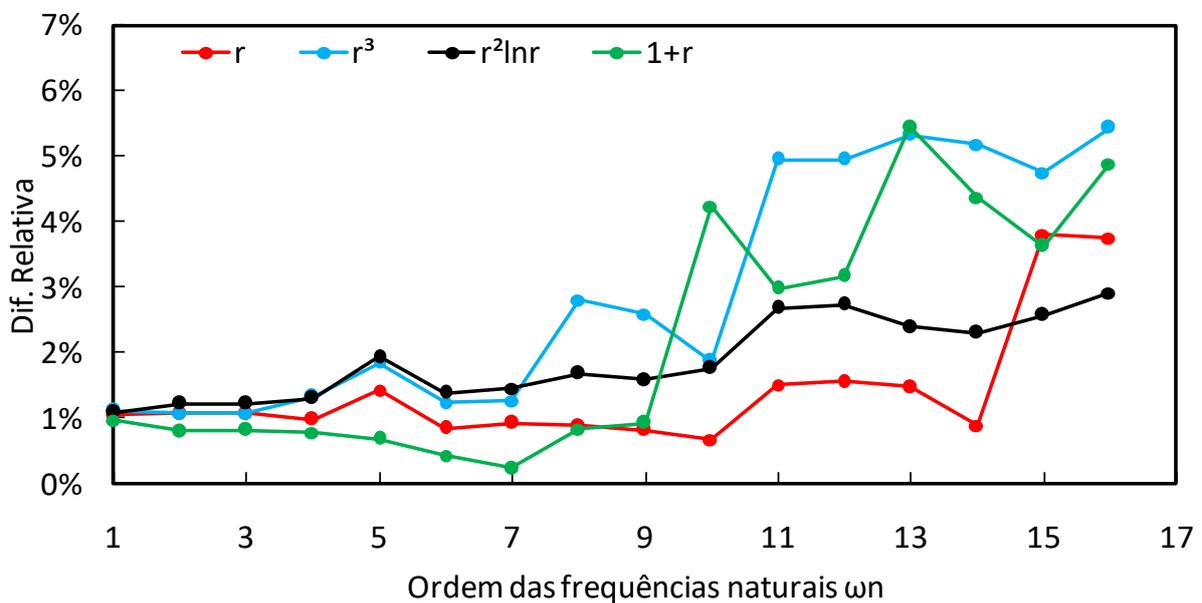


Figura 4: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando as funções de base radial clássica para a malha 2.

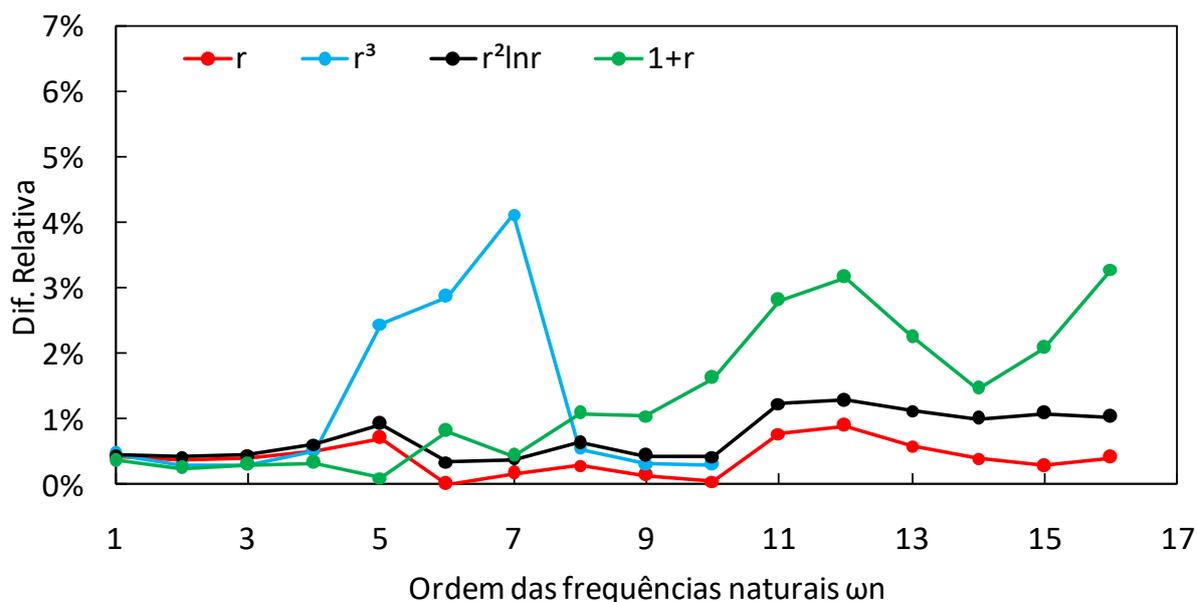


Figura 5: Curva percentual de erro para frequências naturais calculadas usando as funções de base radial clássica para a malha 3.

As demais funções não foram tão eficientes. Observa-se que a função radial $F^j=r^3$ não gerou valores acima da décima frequência na malha mais rica. Nota-se também que a função radial $F^j=1+r$ é a que tem um desempenho mais irregular e uma diferença relativa maior considerando a malha mais refinada.

Conforme previamente apontado, nota-se que algumas distribuições dos pontos interpolantes no domínio não se ajustam bem à determinação de certas frequências. O aumento destes pontos tende a melhorar o resultado global, mas localmente pode favorecer a representação de certos modos mais do que outros. Tal fenômeno já pode ser observado em simulações anteriores, em duas dimensões [26].

Contrariando as expectativas, os valores de erro para as duas primeiras frequências não são sempre menores do que para o grupo de frequências imediatamente mais altas. Isto também foi identificado em simulações bidimensionais. Ainda não foi possível identificar com precisão o motivo desse fenômeno numérico.

Ressalta-se ainda que os resultados obtidos pela MECDR em três dimensões acusaram um comportamento mais restrito e distinto das FBR, segundo Bueno [15]. Nas aplicações reportadas por este autor, a função radial simples não funcionou bem; a radial cúbica apresentou erros enormes; a função radial $F^j=1+r$ teve desempenho razoável enquanto a função radial $F^j=1+r^3$ mostrou os melhores resultados.

Uma digressão sobre a física do problema é pertinente. Como mencionado, os problemas escalares ou acústicos tridimensionais em vibração livre captam frequências associadas aos modos axiais, modos de torção, lateral e distorção. Além disso, a identificação de uma determinada frequência mais alta por inspeção no modo correlacionado é difícil, especialmente no que diz respeito aos modos não axiais. Caso contrário, os modos axiais são fáceis de identificar por inspeção visual da configuração modal. Assim, a qualidade da solução numérica no MECID para frequências axiais pode ser verificada facilmente usando valores analíticos, como mostrado na Tabela 5.

Tabela 5. Resultados da malha 3 e valores analíticos para modos axiais.

O número da frequência axial	A posição da frequência axial em um intervalo	Resultados do MECID $F^j=r^2 \ln(r)$	Resultados Analíticos	Erro (%)
1	1	1,577940	1,570796	0,4548%
2	4	4,741190	4,712389	0,6112%
3	8	7,903880	7,853982	0,6353%
4	15	11,114890	10,995574	1,0851%
5	22	14,311060	14,137167	1,2300%

Como esperado, a precisão da aproximação dos modos axiais pela MECID é superior àquela apresentada na curva de erro dada pela Fig. 5, uma vez que os modos não axiais são fortemente dependentes da disposição dos pontos internos interpolantes.

4.2 Segundo exemplo: vibração livre em uma haste cônica

Neste exemplo, as frequências axiais naturais em uma barra com espessura variável são calculadas. A Fig. 6 mostra o recurso geométrico para solução desse problema usando o modelo escalar e as condições de contorno aplicadas. A equação diferencial para este problema, assumindo que há uma variação gradual da seção na direção x , é dada por Graff [27]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\omega^2}{k^2} u \tag{16}$$

Pode-se observar que a Eq. (16) é semelhante ao problema de transferência de calor de condução com simetria circunferencial em um tubo cilíndrico [28], substituindo a direção x pela direção radial. Condições nulas de derivadas normais devem ser aplicadas em superfícies laterais e internas para garantir a simetria circunferencial. Assim, o problema da barra física pode ser tratado numericamente como se fosse uma fatia curva de um tubo. No entanto, além dos modos de vibração axial relacionados a uma barra, existem também modos de torção, lateral e distorção.

Neste exemplo foram usadas somente as funções bem sucedidas no exemplo anterior. Adianta-se que a simulação deste caso é bem mais difícil do que o anterior em diversos quesitos, sobretudo devido a maior sensibilidade numérica gerada pelos elementos em menor número usados na face menor e também pelo fato dos elementos de contorno serem planos.

A quantidade de pontos nodais e elementos nas malhas 1 e 2, com a variação do ângulo θ , utilizadas na simulação são apresentadas na Tabela 6.

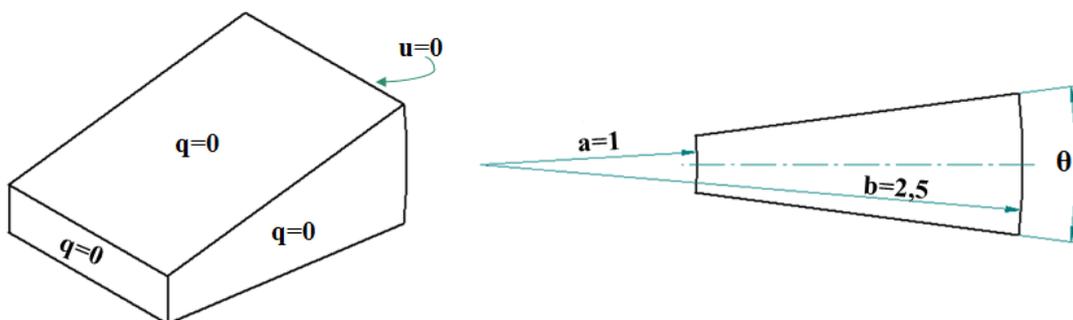


Figura 6: Geometria e condições de contorno para o exemplo tridimensional da haste cônica homogênea da Equação de Helmholtz.

Tabela 6. Quantidade de pontos nodais e elementos nas malhas 1 e 2 do exemplo tridimensional da haste cônica homogênea da Equação de Helmholtz.

Malhas	Elementos	Pontos no Contorno	Pontos internos	Total de Pontos
Malha 1: 6°	1740	1036	621	1657
Malha 2: 6°	3122	1785	1492	3277
Malha 1: 10°	2013	1180	661	1841
Malha 2: 10°	3654	2059	1439	3498
Malha 1: 15°	1756	1038	686	1724
Malha 2: 15°	3112	1766	1453	3219

Nesse caso é difícil fazer uma comparação de resultados levando em conta somente os valores obtidos por outros métodos numéricos, mesmo se for utilizado o MEF com uma malha refinada, pois existem muitas frequências com valores próximos entre si. Intrincados modos laterais de distorção e torção estão presentes. Assim, verificou-se que os resultados numéricos do MEF e do MEC podem ser semelhantes, mas relacionados a diferentes modos de vibração, devido aos erros de discretização. No entanto, as frequências axiais podem ser detectadas por inspeção visual dos modos correlacionados.

Assim, aqui são comparados apenas os valores referentes às frequências naturais axiais, pois valores analíticos também podem ser razoavelmente estimados [29]. A solução analítica considera as seções retas sempre permanecendo planas e, deste modo, para valores grandes do ângulo θ não podem ser usados. Aqui o ângulo máximo foi tomado em 15° e a relação b/a escolhida foi 2,5.

O comportamento do modelo numérico é muito sensível. Os valores das frequências naturais axiais ficam mais destacados quando o ângulo θ é igual a 15°, apesar da configuração modal destes ser mais influenciada pelas distorções na seção reta. No entanto, usando este ângulo maior, a precisão numérica se reduz comparativamente ao ângulo de 6°. Contudo, os ângulos menores produzem configurações eminentemente distorcionais e laterais com valores de frequências mais baixos, pois a estrutura fica mais delgada; assim, os valores axiais passam a ocupar posições bem mais altas na escala hierárquica de frequências, o que também dificulta a análise.

Na Fig. 7 e Fig. 8, observam-se os resultados das malhas 1 e 2 respectivamente, para as 4 funções de base radial clássica com o variação do ângulo θ , conforme indicado na Tabela 6.

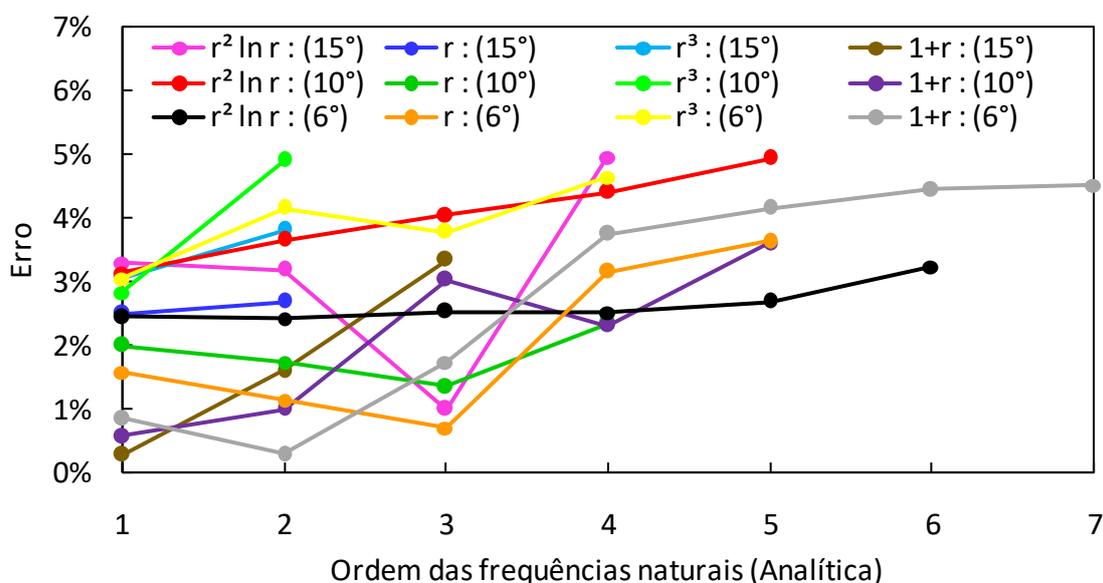


Figura 7: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas usando a malha 1.

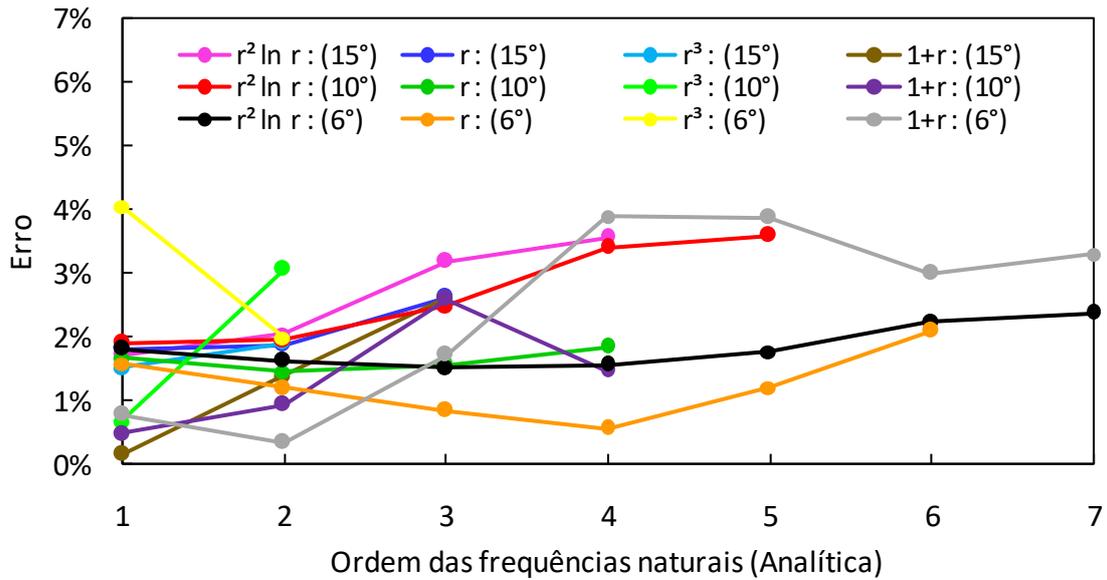


Figura 8: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas usando a malha 2.

Neste caso a função radial simples não foi muito eficiente, sobretudo quando o ângulo θ é igual a 15° . A melhor função foi sua forma estendida $1+r$. A função de placa fina teve um comportamento bastante razoável.

Na Fig. 9 e Fig. 10 mostra-se a precisão do modelo no cálculo das frequências axiais considerando as duas melhores funções nesse caso para a malha mais refinada. Os números que acompanham cada curva indicam a posição no intervalo de frequências calculado numericamente. Como discutido anteriormente, a variação angular interfere diretamente na ordem das frequências que são calculadas, fazendo com que a posição na faixa de frequências varie; no entanto, essa ordem também é alterada devido a uma posição diferente de pontos de interpolação dentro de cada malha relacionada ao ângulo θ .

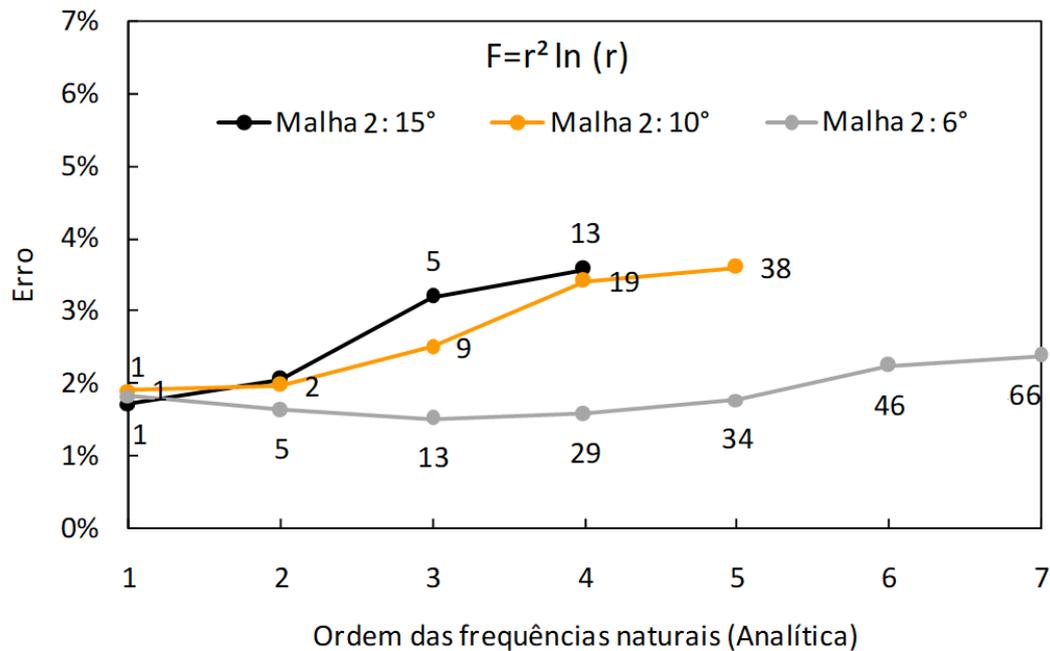


Figura 9: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas usando a função de base radial de placa fina ($F^1=r^2 \ln(r)$), tendo os valores analíticos como referência.

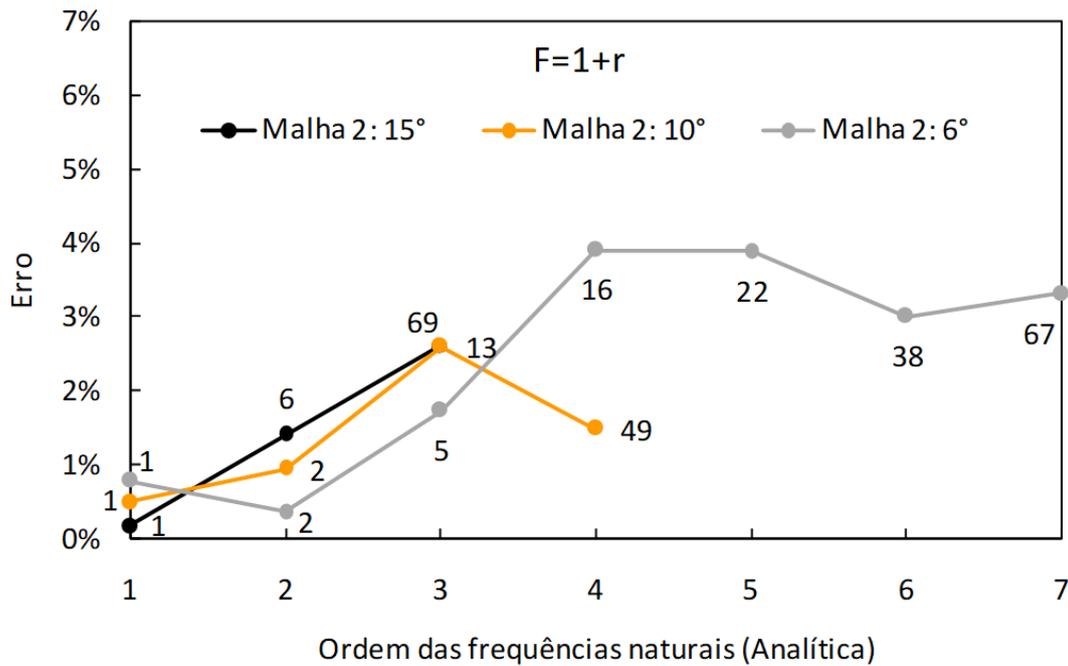


Figura 10: Curva percentual de erro para frequências axiais naturais calculadas usando a função de base radial ($F^i=1+r$), tendo os valores analíticos como referência.

5 Conclusões

Não obstante as maiores dificuldades numéricas e a precisão mais reduzida com relação aos resultados já obtidos pela MECID na simulação dos problemas de Helmholtz homogêneos bidimensionais, a análise tridimensional aqui realizada pode ser considerada satisfatória.

Num problema tridimensional os elementos triangulares utilizados aqui pelo MEC foram compostos por superfícies planas. Desta forma, um cubo elementar demanda minimamente seis faces para discretizar. Como ocorre em qualquer estudo relacionado à dinâmica, requer-se uma quantidade bem mais elevada de graus de liberdade, comparativamente aos casos em duas dimensões. Ressalta-se que com o refinamento da malha, as diferenças relativas foram reduzidas e apresentaram um comportamento monótono.

A versatilidade da modelagem com a MECID não deve ser ignorada. Ao permitir resolver o problema de autovalor na forma clássica, usando uma solução fundamental mais simples, resultam diversas vantagens operacionais, além da avaliação mais criteriosa da sua robustez. O padrão da precisão dos resultados obtidos pela MECID comparativamente a outros métodos discretos em análises tridimensionais, sabidamente mais custosas e difíceis, não é destoante. Tal desempenho da MECID se destaca ainda mais quando se comparam os resultados da MECID com outras formulações do MEC na solução de problemas de Helmholtz, como a MECDR e o MIR.

A precisão da MECID nos dois problemas aqui apresentados não foi a mesma; foi comparativamente pior no segundo exemplo, uma vez que os valores de erro percentual médio foram maiores. No entanto, a discretização das bordas laterais curvas implica em dois problemas numéricos adicionais: primeiro, diferentes tamanhos de elementos de contorno devem ser usados para cada borda; segundo, há também o erro cometido na representação da geometria curva, uma vez que os elementos usados são planos.

Cabe ressaltar que o comportamento das funções radiais se modifica com relação aos casos bidimensionais. A função radial de placa fina continuou fornecendo os melhores resultados gerais, seguido da função radial simples. Contudo, a função radial cúbica não apresentou bons resultados. O acréscimo de uma constante à função radial simples melhorou os resultados no segundo exemplo, embora no primeiro não tenha mostrado nenhuma vantagem. As funções de Wendland e Wu

continuaram não apresentando o desempenho mostrado nas aplicações com diversas formulações do tipo *meshless*. Não mais se pode justificar esse mau desempenho pela introdução da função radial primitiva auxiliar, que permite a aplicação do Teorema da Divergência, pois resultados similares foram obtidos usando o método de integração radial (MIR).

Em síntese, pode-se afirmar que o nível de precisão alcançado foi bastante razoável, o que credencia o modelo descrito para aplicações relacionadas à resposta no tempo, próximo passo no desenvolvimento da MECID.

Referências

- [1] M. D. Buhmann. Radial basis function: Theory and implementations. *Cambridge: University Press*, pp. 259, 2003.
- [2] S. A. Sarra. Integrated multiquadric radial basis function approximation methods. *Computers & mathematics with applications*, 5, pp. 1293-1296, 2006.
- [3] S. N. Atluri, T. L. Zhu. New Concepts in meshless methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, pp. 537-556, 2000.
- [4] J. G. Wang, G. R. Liu. A Point interpolation meshless method based on radial basis functions. *International journal for numerical methods in engineering*, 54, pp. 1623-1648, 2002.
- [5] R. Shaback and H. Wendland. Using compactly supported radial basis functions to solve partial differential equations, in: C.S. Chen, C.A. Brebbia and D.W. Pepper (Eds.), *Boundary Element Technology XIII*, Wit Press, Southampton, Boston, pp.311-324, 1999.
- [6] D. Nardini, C. A. Brebbia. Transient Dynamic Analysis by the Boundary Element Method. In: C.A. Brebbia ed, *Proceedings of BEM V*, pp. 719-730, 1983.
- [7] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel. *Boundary Element Techniques*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.
- [8] P. W. Partridge, C. A. Brebbia, and L. C. Wrobel. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method*. Computational Mechanics Publications and Elsevier, London, 1992.
- [9] H. Wendland. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Adv. in Comput. Math.*, 4, pp. 389-396, 1995.
- [10] M. Floater and A. Iske. Multistep scattered data interpolation using compactly supported radial basis functions. *J. Comput. and Applied Mathematics*, 73, pp. 65-78, 1996.
- [11] A. H. D. Cheng, D. L. Young, C. C. Tsai. Solution of Poisson's equation by iterative DRBEM using compactly supported, positive definite radial basis function. *Eng. Analysis with Boundary Elements*, 24, pp. 549 - 557, 2000.
- [12] S. R. Karur, P. A. Ramachandran. Radial basis function approximation in the dual reciprocity method. *Mathematical and Computer Modelling*, 20, 7, pp. 59-70, 1994.
- [13] M. A. Golberg, C.S. Chen. The Theory Of Radial Basis Functions Applied to the BEM For Inhomogeneous Partial Differential Equations. *Boundary Element Communication*, v.5, pp. 57-61, 1994.
- [14] P.W. Partridge. Approximation Functions in the Dual Reciprocity Method. *Boundary Element Communication*, v. 8, pp.1-4, 1997.
- [15] F. R. Bueno, P. W. Partridge. A Study Of Dual Reciprocity for Three Dimensional Models Applied to the Solution Of Pennes Bioheat Equation. In: *Proceedings of XII BETEQ*, Albuquerque and Aliabadi Edit., Brasília, pp. 182-189, 2011.
- [16] F. R. Bueno, P. W. Partridge, An Inverse Model for Locating Skin Tumours in 3D Using The Genetic Algorithm with the Dual Reciprocity Boundary Element Method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 10, pp. 1061-1079, 2013.
- [17] C. F. Loeffler, A. L. Cruz, A. Bulcão. Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 50, pp. 97-108, 2015.
- [18] C. F. Loeffler, H. M. Barcelos, W. J. Mansur, A. Bulcão. Solving Helmholtz Problems using Direct Radial Basis Function Interpolation with the Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 61, pp. 218-225, 2015.

- [19] C. F. Loeffler, A. Frossard, L. O. C. Lara. Testing complete and compact radial basis functions for solution of eigenvalue problems using the boundary element method with direct integration, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 19:2, pp. 117-128, 2018.
- [20] C. A. Brebbia, S. Walker. *Boundary Element Techniques in Engineering*. Newnes-Butterworths. London, UK, 1980.
- [21] S. Zhu. Compactly Supported Radial Basis Functions: How and Why?, eprints.maths.ox.ac.uk/1561/1/finalOR57.pdf, 2012.
- [22] C. F. Loeffler, L. Zamprogno, W. J. Mansur, A. Bulcão. Performance of Compact Radial Basis Functions in the Direct Interpolation Boundary Element Method for Solving Potential Problems. *Comp. Methods and Eng. and Sciences*, 113, pp. 387-412, 2017.
- [23] X. W. Gao. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 26, pp. 905–916, 2002.
- [24] A. J. Santos, F. O. Netto, L. S. Campos, C. F. Loeffler. Comparação da Eficiência Computacional na Resolução de Problemas de Helmholtz Usando as Formulações do Elemento de Contorno de Base Radial Direta e Indireta e o Elemento de Contorno Usando Solução Fundamental Dependente de Frequência. In: *XIII SIMMEC 2018 - Vitória - ES*, 2018. Disponível em: <<https://www.doity.com.br/anais/xiiisimmec2018/trabalho/69043>>. Acesso em: 11/07/2019.
- [25] L. S. Campos, C. F. Loeffler. Testing the Accomplishment of the Radial Integration Method With the Direct Interpolation Boundary Element Technique For Solving Helmholtz Problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2019. No prelo.
- [26] J. P. Barbosa, C. F. Loeffler. Application of Boundary Element Method Superposition Technique for Solving Natural Frequencies in Piecewise Homogeneous Domains. *Computers and mathematics with applications*, 2019. No prelo.
- [27] K. F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*. Reprint of the Oxford: The Clarendon Press, 1975.
- [28] I. N. Sneddon. *Elements of Partial Differential Equations*. McGraw-Hill Singapore, 1957.
- [29] A. Bulcão, C. F. Loeffler. Comportamento dos Autovalores na Vibração Livre de Barras de Seção Variável, *Anais do V Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional*, volume único, pag. 107-113, PUC/Rio, Rio de Janeiro, 1998.