

APPLYING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD TO ANALYZE STEADY-STATE HEAT CONDUCTION IN GENERIC MULTIMATERIAL HEAT EXCHANGER TUBES

Maicon J. Hillesheim
Lidianne P. Pinto Mapa
Francisco C. de Araújo

¹*Universidade do Estado do Mato Grosso, Ph.D. student at Universidade Federal de Ouro Preto, maicon@unemat-net.br*

²*M.Sc. student at Universidade Federal de Ouro Preto, lidianne.pinto@aluno.ufop.edu.br*

³*Professor at Universidade Federal de Ouro Preto, dearaujofc@gmail.com*

Abstract. The determination of the temperature distribution in exchanger tubes of arbitrary geometric shapes, under different boundary conditions of temperature and normal fluxes, allows for their optimized design. In this paper, we apply the Boundary Element Method (BEM) to carry out two-dimensional analysis of steady-state heat transfer in exchanger tubes with cross sections of any shapes, and having walls that may present any type of prescribed boundary values (temperature, normal flux or convective condition). For simulating heat exchangers constituted of multimaterials, the generic boundary-element subregion-by-subregion (BE SBS) technique is applied. In this technique, the global matrix resulting from coupling the many domains available is not explicitly assembled. Instead of that, Krylov solvers are applied to the iterative solution of the global system of equations by taking into account the separate contributions of the systems stated for each independent subdomain. A very important step in this strategy is the inclusion of discontinuous boundary elements, which are fundamental for the simulation of sharp corners inside interface boundaries or at outer boundaries with prescribed temperature values. To cope with the quasi-singular and singular integrals involved in the BE models, the Telles cubic coordinate transformation is applied to derive efficient (low-order) quadratures. They are particularly relevant for dealing with the quasi-singular integrals resulting from the use of discontinuous boundary elements. Comparisons with the ANSYS software are considered in the validation/efficiency discussion of the strategy proposed.

Keywords: Steady-state heat conduction; 2D multimaterial exchangers; cross-sections of any shape; numerical quadratures for singular and nearly-singular integrals; the boundary-element subregion-by-subregion (BE SBS) technique

1 Introdução

Os trocadores de calor são dispositivos que permitem a troca de calor entre fluidos de diferentes temperaturas, propiciam melhora na eficiência, reduzem custos e tamanhos dos sistemas possuindo diversas geometrias de tubo sendo aplicados a diferentes condições de fluxo.

A geometria dos tubos de trocadores de calor de aplicações como radiadores (Wang et al. [1]), processos químicos (Zheng et al. [2]), refrigeradores (Belaid e Hireche [3]), ar condicionado (Wang et al. [4]), usinas de energia (Arie, Shooshtari e Ohadi [5]) e componentes eletrônicos (Gillot, Bricard e Schaeffe [6]) influencia em sua eficiência. Radiadores de tubos envolvendo partes planas e curvas na seção, por exemplo, possibilitam maior taxa de transferência de calor e menor queda de pressão no lado do ar, comparados aos tubos circulares (Alosious et al. [7]). Nas aplicações, esses dispositivos podem atuar na conversão e recuperação de energia, no aquecimento, resfriamento, evaporação, condensação, etc., possibilitando reduzir as irreversibilidades dos sistemas.

É necessário constantemente inovar as geometrias dos tubos de acordo com as aplicações específicas (Moharana e Khandekar [8]). Várias técnicas são realizadas para aumentar a taxa de transferência de calor, entre elas, aumento da área de transferência de calor e o uso de superfícies estendidas como aletas, com o intuito de reduzir a resistência à transferência de calor. As características dos fluidos são fatores decisivos para a escolha da geometria. Incrustações aumentam a resistência à transferência de calor e à passagem de fluido. Han [9] analisou trocadores de calor de feixe de tubos de seções circulares e elípticas sob diferentes arranjos e observou que tubos de seções elípticas em arranjo escalonado propiciam redução significativa de taxas de deposição de partículas.

Os tubos trocadores de calor são frequentemente fabricados de cobre, aço ou alumínio, sendo necessário a utilização de outras camadas de materiais afim de propiciarem proteção e o isolamento térmico. As configurações de multicamadas são amplamente utilizadas nas indústrias automotivas, espacial, química e nuclear (Biswas Singh e Bindra [10]). Cada camada de material deve resistir à temperatura requerida e ao ambiente propiciado, possibilitando economia de energia e de custo. De acordo com Li and Lai [11], as multicamadas de materiais propiciam maior proporção de resistência por peso, baixo custo, etc., propriedades que não são obtidas utilizando apenas um material.

Os polímeros são exemplos de materiais que podem ser agregados afim de propiciar proteção aos trocadores. T'Joen et al. [12] descrevem polímeros aplicados que resistem a ambientes diversos. Para o isolamento térmico, de acordo com Gori et al. [13], as propriedades dependem do tipo, espessura e ordenação dos materiais utilizados. Vale ressaltar que existem geometrias críticas para a ocorrência de isolamento.

Frequentemente na literatura encontra-se o interesse em determinar com precisão temperaturas e fluxos de calor de tubos trocadores de calor de geometrias arbitrárias e/ou com multimateriais. Hu et al. [14] analisaram a transferência de calor em estado estacionário em multimateriais com trincas por meio de uma abordagem simplética para o estudo da singularidade do fluxo de calor analítico e para o estudo numérico do modelo de elementos finitos. Um elemento singular analítico simplético foi proposto e soluções numéricas de fatores generalizados de intensidade de fluxo foram solucionados. Li e Lai [11] apresentaram um conjunto de soluções analíticas clássicas explícitas derivadas do método da transformada de Laplace para a transferência de calor em um cilindro oco com duas camadas de materiais sob condições de contorno diversas. Li, Davidson e Mantell [15] analisaram a transferência de calor em tubos poliméricos de seção transversal lenticular e oval, seções que podem reduzir a queda de pressão de fluxos externos, considerando modelos de tubo circular nos quais as aletas foram acrescentadas originando as seções transversais. A transferência de calor por convecção foi melhorada para o tubo de formato oval com número de Reynolds no intervalo $2000 < Re < 20$ e número de Biot $Bi < 0,3$. Morahana e Das [16] realizaram análises de convergência do método da colocação de contorno e de um método unidimensional aproximado denominado setorial em transferência de calor em tubos excêntricos e/ou isolados excentricamente. Rana e Jena [17] demonstraram que os perfis de temperatura em estado estacionário em geometrias arbitrárias, considerando material homogêneo, pode ser eficientemente obtido pelo Método de Elementos de Contorno (BEM). Seguindo essa temática de pesquisa, nesse trabalho é desenvolvida uma formulação bidimensional do Método dos Elementos de

Contorno (MEC) voltada para análise de transferência de calor no regime permanente com multimateriais sob condições de contorno de convecção, temperatura prescrita e fluxo constante.

No contexto do Método dos Elementos de Contorno, quando a análise envolve problemas de multimateriais, invariavelmente tem-se a necessidade de uma estratégia de subestruturação. Nesse trabalho é empregada a técnica de subestruturação genérica BE-SBS, que se aplica para modelar sólidos heterogêneos compostos por um número qualquer de materiais. É importante salientar que a característica da técnica BE SBS de possibilitar a modelagem de um número qualquer de materiais, com diferentes coeficientes de condutividade térmica, confere-lhe uma grande robustez, já que essas características são comuns em problemas práticos da engenharia. Além disso, como a técnica se baseia em decomposição de domínio, o sistema de equações resultante é bastante esparsa, e por essa razão, solvers iterativos são especialmente relevantes, posto que dispensam a necessidade de montagem explícita da matriz global do sistema acoplado. Desse modo, a operação com os grandes blocos de zeros podem ser excluídas durante a resolução do sistema de equações, resultando em grande economia de memória e tempo de processamento. Algoritmos especiais de integração baseados na transformada de coordenadas cúbica de Telles [18] foram implementados, aumentando a eficiência e precisão da análise em modelos contendo sólidos esbeltos. Elementos descontínuos também foram implementados na técnica BE SBS e empregados somente onde necessário, de modo a não aumentar desnecessariamente a ordem do sistema de equações. Exemplos numéricos apresentados na literatura técnica e/ou analisados com programas comerciais (e.g. ANSYS) são apresentados para demonstrar a eficiência e robustez do código desenvolvido.

2 Descrição do problema

A distribuição de temperatura θ e de fluxo p em multimateriais é investigada em seções arbitrárias. São consideradas condições de contorno de fluxo constante em Γ_1 , temperatura prescrita em Γ_2 e troca de calor por convecção em Γ_3 , conforme ilustra a Figura 1, em que Γ se refere a um contorno de borda livre.

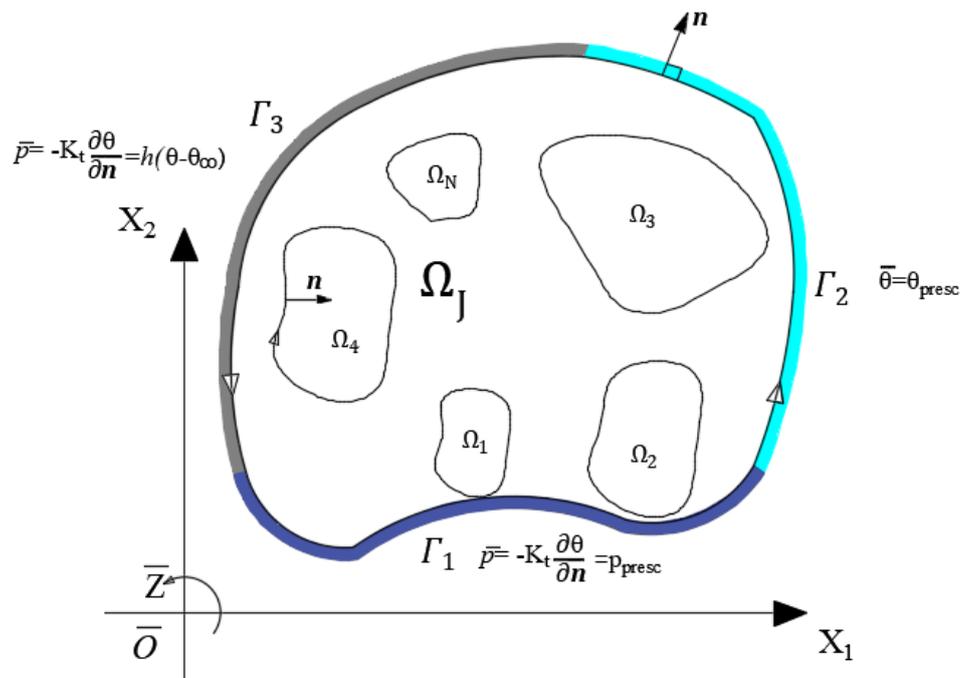


Figura 1: Representação da descrição do problema

Para o desenvolvimento foram realizadas as seguintes considerações: i) Condutividade térmica constante no material; ii) Não há geração interna de calor; iii) Regime permanente; iv) Bidimensional.

A equação de Laplace descreve a transferência de calor em estado estacionário de materiais com a condutividade térmica constante. Em análises bidimensionais essa equação é representada em coordenadas cartesianas conforme equação (1),

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

onde θ é a temperatura e as condições de contorno estão descritas pela figura 1.

3 Método dos Elementos de Contorno

Na formulação do MEC, o problema descrito por uma equação diferencial parcial definida ao longo de todo o domínio é convertido em um problema descrito por uma equação integral, escrita em termos do contorno. Essa característica confere diversas vantagens em relação ao Método dos Elementos Finitos (MEF), como geração de malhas mais simplificadas já que apenas o contorno precisa ser discretizado, eliminação do erro de interpolação do problema ao longo do domínio interno e redução da quantidade de graus de liberdade do modelo. A equação integral é obtida por meio das identidades de Green e tem o aspecto da equação (2),

$$c(\xi)\theta(\xi) + \oint p^*(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) d\Gamma = \oint \theta^*(\mathbf{x}, \xi) p(\mathbf{x}) d\Gamma, \quad (2)$$

onde \mathbf{x} é denominado ponto de campo e o ponto ξ é denominado ponto fonte. Os termos $\theta^*(\mathbf{x}, \xi)$, $p^*(\mathbf{x}, \xi)$ e $c(\xi)$ correspondem à solução fundamental, fluxo fundamental e o termo livre da integral, respectivamente, em que para os problemas de potencial envolvendo a equação diferencial de Laplace, e formulações bidimensionais são dados nas equações (3), (4) e (5),

$$\theta^*(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad (3)$$

$$p^*(\mathbf{x}, \xi) = \frac{\partial \theta(\mathbf{x}, \xi)}{\partial n(\bar{\mathbf{x}})} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r_i n_i}{r} \right), \quad (4)$$

$$c(\xi) = \begin{cases} \text{contorno suave:} & c(\xi) = 1/2 \\ \text{canto:} & c(\xi) = 1/4 \\ \text{ponto interno:} & c(\xi) = 1.0 \\ \text{ponto externo:} & c(\xi) = 0.0 \end{cases}, \quad (5)$$

com $r = \|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{x} - \xi\|$, sendo a norma do vetor raio, compreendendo a distância entre o ponto de campo e o ponto fonte e $r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{r_i}{r}$, correspondente a derivada do raio em relação à x_i .

3.1 Implementação numérica

A figura 2 ilustra uma geometria arbitrária com o contorno subdividido com N elementos parabólicos de três nós, onde os nós destacados delimitam o início e o fim de cada elemento. No MEC, os elementos são representados por funções de forma Lagrangiana, equações (7), e em particular nesse trabalho, usa-se os elementos isoparamétricos, isso significa que a geometria e as variáveis de campo (temperatura e fluxos) são interpoladas pelas mesmas funções de forma.

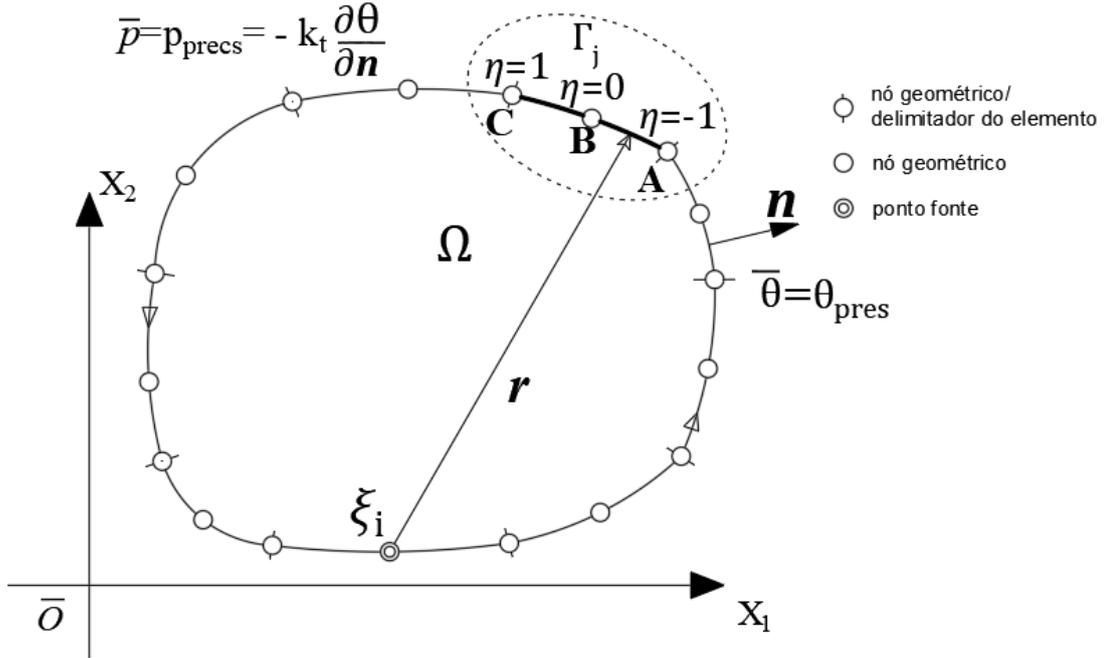


Figura 2: Malha de elementos de contorno

A equação integral (2) escrita para para o i -ésimo elemento de contorno se apresenta conforme equação (6):

$$c(\xi_i)\theta(\xi_i) + h_{i1}\theta_1 + h_{i2}\theta_2 + \dots + h_{ii}\theta_i + \dots + h_{iN}\theta_N = g_{i1}p_1 + g_{i2}p_2 + \dots + g_{ii}p_i + \dots + g_{iN}p_N, i = 1, N, \quad (6)$$

sendo os coeficientes $h_{ij} = \oint p^*(\mathbf{x}, \xi_j)h_q(\eta)d\Gamma_j$ associados aos potencial e $g_{ij} = \oint \theta^*(\mathbf{x}, \xi_j)h_q(\eta)d\Gamma_j$ associado aos fluxos, com $h_q(\eta)$ designando as funções de forma de grau dois, em que q varia de 1 até 3, pontos de interpolação, conforme equações (7):

$$\begin{aligned} h_1(\eta) &= \frac{1}{2}\eta(\eta - 1), \\ h_2(\eta) &= (1 - \eta)(1 + \eta), \\ h_3(\eta) &= \frac{1}{2}\eta(\eta + 1). \end{aligned} \quad (7)$$

Posicionando o ponto fonte em cada um dos nós e integrando sobre os elementos, são construídas as matrizes do MEC. Quando montadas, elas possuem o aspecto da equação (8),

$$\begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & h_{12} & \dots & h_{1i} & \dots & h_{1N} \\ h_{21} & \hat{h}_{22} & \dots & h_{2i} & \dots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \dots & h_{Ni} & \dots & \hat{h}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1i} & \dots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2i} & \dots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N1} & g_{N2} & \dots & h_{Ni} & \dots & g_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix}, \quad (8)$$

ou, matricialmente conforme equação (9),

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{G}\mathbf{p}. \quad (9)$$

Os coeficientes da diagonal da matriz \mathbf{H} resultam da integração de núcleos fortemente singulares, ou seja, existem no sentido de valor principal de Cauchy, e são calculados indiretamente pelo critério de potencial constante, análogo ao critério de deslocamento de corpo rígido (RBD).

As condições de contorno são introduzidas fazendo permutações das colunas das matrizes expressas na equação (8). O processo consiste em passar para o lado esquerdo as colunas associadas as variáveis incógnitas e passar para o lado direito as colunas associadas a valores prescritos. Fazendo o produto matriz vetor do lado direito tem-se o sistema de equações dado pela equação (10),

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}. \quad (10)$$

3.1.1 Condição de contorno de convecção

Para contorno que houver a condição de convecção, ocorre como descrito na equação (11),

$$p(\mathbf{x}) = k_t \frac{\partial \theta}{\partial n}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})(\theta_\infty - \theta(\mathbf{x})), \text{ se } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \quad (11)$$

substituiu-se-a na equação (2) resultando na expressão (12),

$$\begin{aligned} c(\xi)\theta(\xi) + \oint_{\Gamma} p^*(\mathbf{x}, \xi) \theta(\mathbf{x}) d\Gamma + \oint_{\Gamma_3} [\theta^*(\mathbf{x}, \xi) h(\mathbf{x})] \theta(\mathbf{x}) d\Gamma = \\ = \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \theta^*(\mathbf{x}, \xi) p(\mathbf{x}) d\Gamma + \oint_{\Gamma_3} \theta^*(\mathbf{x}, \xi) [h(\mathbf{x}) \theta_\infty] d\Gamma. \end{aligned} \quad (12)$$

Considerando o coeficiente de convecção $h(\mathbf{x})$ constante no contorno Γ_3 , e fazendo $\bar{p}_{i3} = [h(\mathbf{x})u_\infty]$ como condição de contorno prescrita para o i -ésimo nó em Γ_3 , matricialmente, o sistema de equações do MEC tem a forma do sistema de equações (13):

$$\begin{array}{c|ccc|c} & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \\ \hline \Gamma_1 & \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} + \mathbf{G}_{13}^h & \bar{\theta}_1 \\ \Gamma_2 & \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} + \mathbf{G}_{23}^h & \bar{\theta}_2 \\ \Gamma_3 & \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} + \mathbf{G}_{33}^h & \bar{\theta}_3 \end{array} = \begin{array}{c|ccc|c} & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \\ \hline & \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \mathbf{G}_{13} & \bar{\mathbf{p}}_1 \\ & \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \mathbf{G}_{23} & \bar{\mathbf{p}}_2 \\ & \mathbf{G}_{31} & \mathbf{G}_{32} & \mathbf{G}_{33} & \bar{\mathbf{p}}_3 \end{array}, \quad (13)$$

com \mathbf{G}_{i3}^h sendo os coeficientes da matriz \mathbf{G} calculados modificando-se a solução fundamental para $^h\theta^*(\mathbf{x}, \xi) = h(\mathbf{x})\theta^*(\mathbf{x}, \xi)$. É importante esclarecer que na implementação computacional as submatrizes \mathbf{G}_{i3}^h são armazenadas diretamente na matriz \mathbf{H} de cada sub-região.

3.1.2 Técnica de subestruturação genérica de elementos de contorno (BE SBS)

Quando no modelo ocorre a presença de diversos materiais, ou seja o modelo possui vários domínios Ω , como ilustra a Figura 3, há necessidade de utilização da técnica BE SBS como já mencionado.

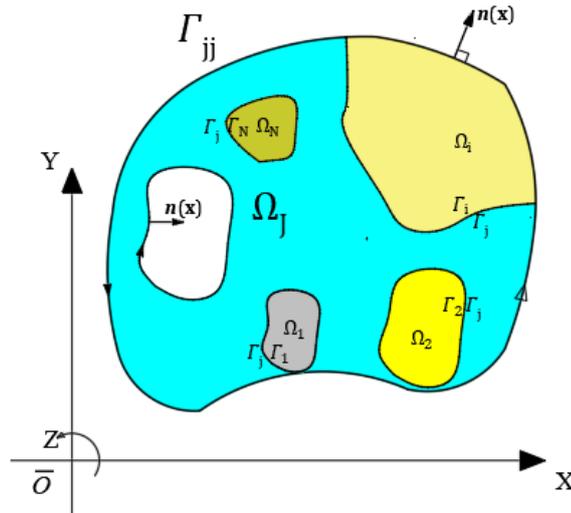


Figura 3: Seção arbitrária com sub-regiões.

Nesse caso, como observa-se na Figura 3, cada sub-região pode ter contorno de interface (Γ_i / Γ_j) ou contorno pertencente a borda livre, chamado de (Γ_{jj}), sendo que nesse contorno (Γ_{jj}), pode haver condições de temperatura prescrita, condições de fluxo prescrito, ou condições de convecção.

Na técnica BE-SBS procede-se montando independentemente os subsistemas de equações (8), levando em conta, quando presentes, as condições de convecção como descrito em 3.2.1. Uma vez montados os subsistemas, é realizado o acoplamento considerando as condições de interface descritas nas equações (14),

$$\begin{aligned} \theta_{ij} &= \theta_{ji}, \\ p_{ij} &= -p_{ji}, \end{aligned} \tag{14}$$

sendo no contorno externo, as condições de contorno mantêm-se as descritas na Figura 01.

Uma vez que a técnica BE SBS foi desenvolvida com foco na robustez, ela possui um sistema de busca automático para identificar quais as sub-regiões que estão acopladas, e dentro de cada interface, identificam-se os graus de liberdades acoplados. A técnica BE-SBS conta ainda com elementos descontínuos. Esses elementos interpolam a geometria a partir dos nós de extremidades e as variáveis de campo a partir de nós ligeiramente deslocados para seu interior (nós funcionais). Sua finalidade é simular as discontinuidades de fluxos existentes nos cantos das interfaces conferindo maior precisão ao algoritmo. A Figura 4 ilustra um exemplo de uma interface, onde esses elementos são empregados.

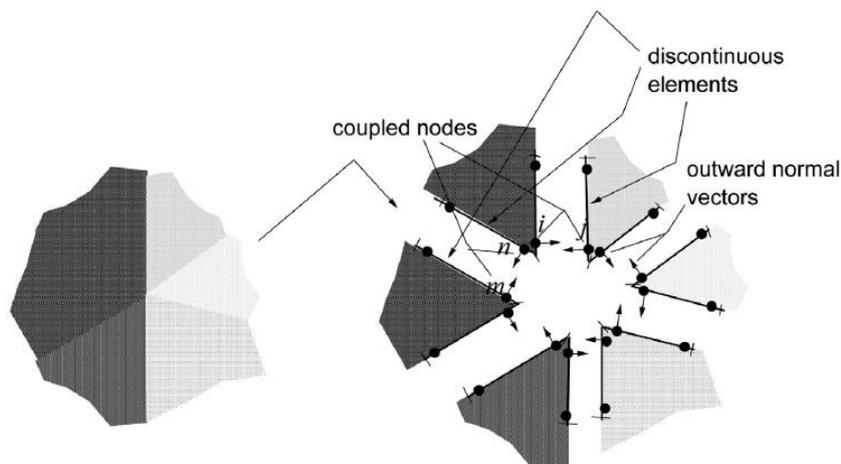


Figura 4: Interface contendo elementos descontínuos

Isso se dá em virtude de cantos vivos ilustrados na Figura 4 requererem nós duplos para tratar eventuais descontinuidades dos fluxos, no entanto quando há temperatura prescrita nesses locais ocorre linhas linearmente dependentes no sistema de equações, assim os elementos descontínuos ao deslocar os nós a partir dos quais são interpolados as variáveis de campo, ligeiramente para o seu interior, removem essa singularidade possibilitando a solução do sistema de equações.

Uma vez estabelecida as condições de interface e montados os subsistemas de cada sub-região, tem a possibilidade de montar a matriz global acoplada. A Figura 5 apresenta um sistema de equações global montado explicitamente para um problema envolvendo três materiais diferentes.

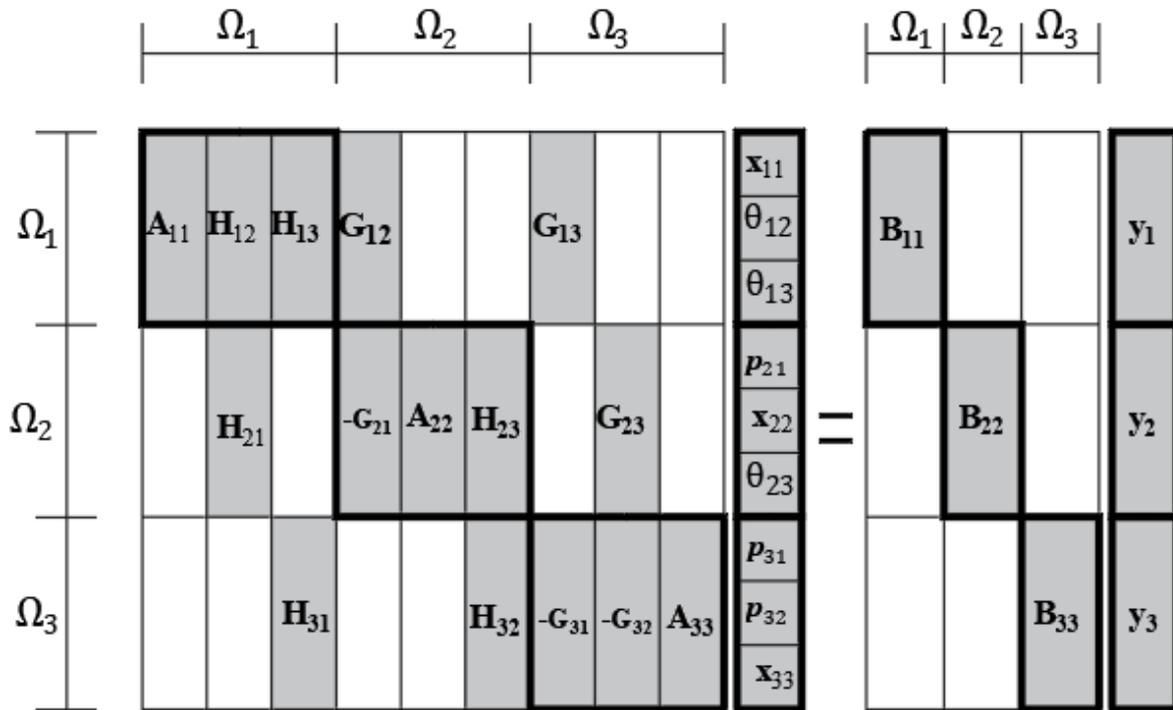


Figura 5: Sistema de equações para três sub-regiões.

O bloco A_{11} ilustrado da Figura 5, por exemplo, corresponde a parcela da matriz da primeira sub-região associado aos termos incógnitos, o bloco H_{12} , por exemplo, correspondente a parcela da matriz H da primeira sub-região que estão associada a temperatura na interface com a sub-região 2 e assim por diante. O bloco B11 corresponde a parte das submatrizes da primeira sub-região associada aos valores prescritos, que podem ser temperatura, fluxo ou a condição de convecção.

A cerca da resolução do sistema de equações, existem diversas variantes de solvers iterativos derivados dos processos de Krylov implementados na técnica BE SBS. Os mais recentes são o BiCG-J (Gradiente Biconjugado), proposto por Fletcher [19], combinado com o pre-condicionamento de Jacobi (J) e aquele baseado na fatoração LU incompleta esparsa (SILU) e o método BiCGSTAB(l) (Gradiente Biconjugado Estabilizado l-dimensional; Sleijpen e Fokkema [20]), com (l) podendo ser entendido como o grau do polinômio usado para suavizar a solução residual da iteração corrente, também combinado com os pre-condicionamento de Jacobi e SILU [21]. A explicação para fatoração incompleta se dá em decorrência da aplicação da decomposição LU apenas na diagonal destacada da matriz do sistema acoplado de equações (vide Figura 5). A ideia da fatoração da diagonal se deve ao fato de solvers iterativos ter a taxa de convergência atrelada ao condicionamento da matriz do sistema de equações. Desse modo, a aplicação da fatoração LU visa acelerar o processo de convergência. É importante esclarecer que, o uso dos solvers descritos permite a resolução do sistema de equações sem a necessidade da montagem explícita da matriz global. Essa característica é bastante vantajosa, pois evita a necessidade de armazenamento e operações com os grandes blocos de zeros existentes na esparsa matriz do sistema de equações resultante do processo de paralelização, conferindo grande robustez e eficiência a técnica BE SBS.

3.1.3 Aspectos da integração

Na formulação do MEC, em decorrência da natureza das expressões das soluções fundamentais, o cálculo dos coeficientes das matrizes envolve a avaliação de integrais que podem ser fracamente singulares, ou quase-singulares. Para superar essa dificuldade, algoritmos especiais de integração baseados na transformação cubica de coordenadas de Telles [18] foram desenvolvidos. Esses algoritmos em suma, deslocam os pontos de integração dentro do elemento de contorno, mapeado em coordenadas naturais, em direção a posição das possíveis singularidades. A Figura 6 mostra a posição dos pontos de Gauss para uma quadratura de número de pontos de integração igual a 4.

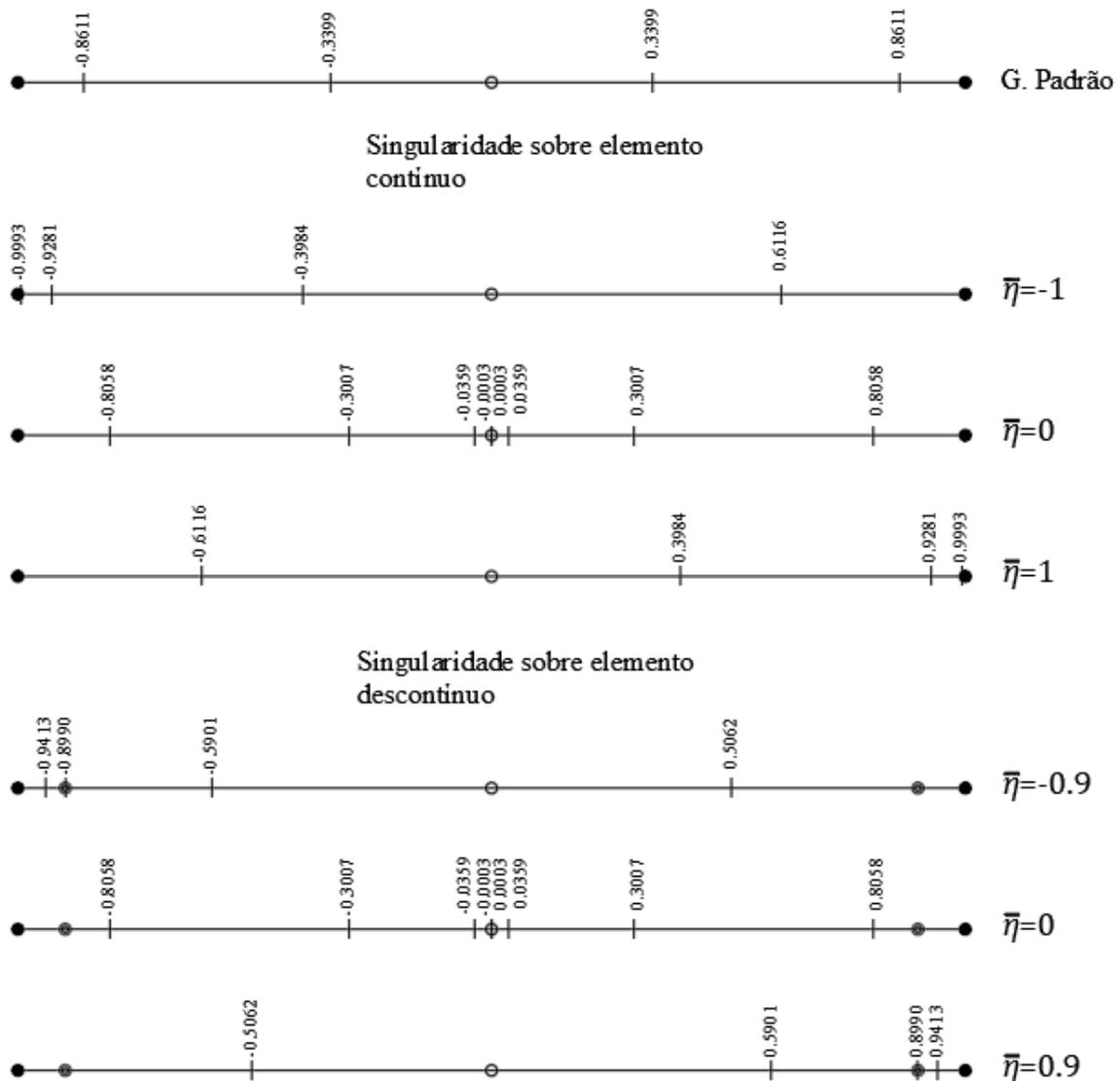


Figura 6: Distribuição dos pontos de Gauss nas quadraturas utilizadas

4 Aplicações

Exemplo 01. No primeiro exemplo é analisado um tubo trocador de calor também estudado por Rana e Jena [17]. A seção do tubo possui formato quadrangular e tem a dimensão externa a_o com o dobro da dimensão interna a_i , o material empregado é homogêneo e possui o coeficiente de condutividade $K_t = 2.024 \text{ W/m.K}$. A borda interna do tubo possui temperatura prescrita de 400 K e a borda externa está sob condição de convecção, onde a temperatura ambiente é $\theta_\infty = 300 \text{ K}$ e o meio possui um coeficiente de convecção $h = 50 \text{ W/m}^2\text{K}$. Para resolver o problema de valor de contorno, na técnica BE SBS, utilizou-se a malha de elementos de contorno apresentada na Figura 7 com 240 nós geométricos e 120 elementos quadráticos de 3 nós. Para simular as discontinuidades de fluxos, usou-se elementos descontínuos nos cantos. Como resultado, é apresentado na Figura 8 (a) a distribuição de temperatura ao longo da seção. A Figura 8 (b) apresenta o resultado obtido por Rana e Jena [17].

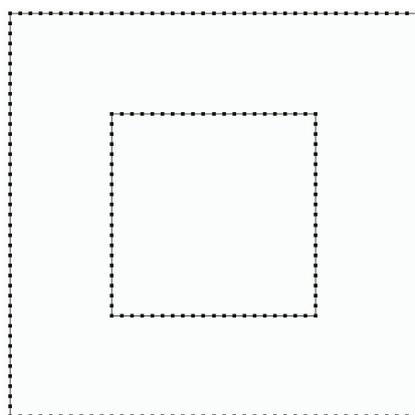


Figura 7: Malha de elementos de contorno para o tubo quadrangular

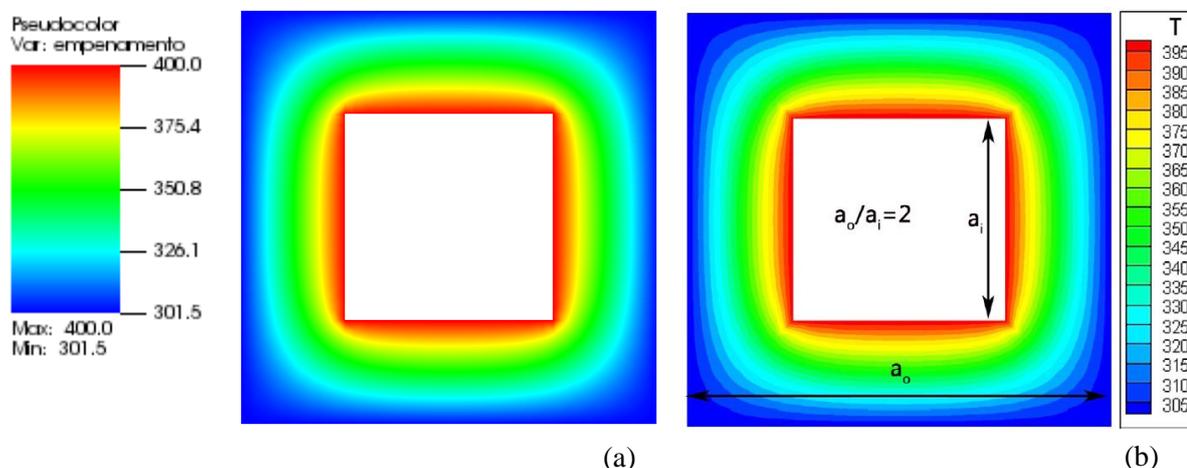


Figura 8: Distribuição de temperatura na seção transversal do tubo trocador de calor obtida no presente trabalho (a) e obtida por Rana e Jena [17] (b).

Observando as Figuras 8 (a) e (b) é possível observar que o perfil de temperatura obtido (Figura 8 (a)) apresenta concordância com o disponível na literatura, atestando a assertividade da implementação desenvolvida.

Exemplo 02. Com a finalidade de atestar a robustez do código desenvolvido, nesse exemplo, estuda-se um tubo trocador de calor de aço com 36 aletas de cobre, resultando em um modelo com 37 sub-regiões (36 aletas mais o tubo). O tubo possui diâmetro externo $d_e = 48.3 \text{ mm}$ e o diâmetro interno $d_i = 44.94 \text{ mm}$ e as aletas bastante esbeltas com 0.83 mm de espessura e 25.0 mm de largura. A

temperatura interna do tubo é fixada em $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ e a parte externa está exposta à um líquido com temperatura $\theta_{\infty} = 22^{\circ}\text{C}$, com coeficiente $h = 50\text{ W/m}^2\text{ }^{\circ}\text{C}$. Para o coeficiente de condutividade térmica do aço foi adotado $K_i = 50,2\text{ W/m}^{\circ}\text{C}$ e para o cobre $K_i = 385\text{ W/m}^{\circ}\text{C}$. A malha do modelo é mostrada na Figura 9, tendo no tubo, 560 nós geométricos e 280 elementos parabólicos, e nas aletas, 56 nós geométricos e 28 elementos parabólicos de três nós. Em todo os contornos curvos e nos cantos, foram empregados elementos descontínuos, resultando em um modelo com 3216 graus de liberdade. A origem do sistema de coordenadas se encontra no centro do tubo.

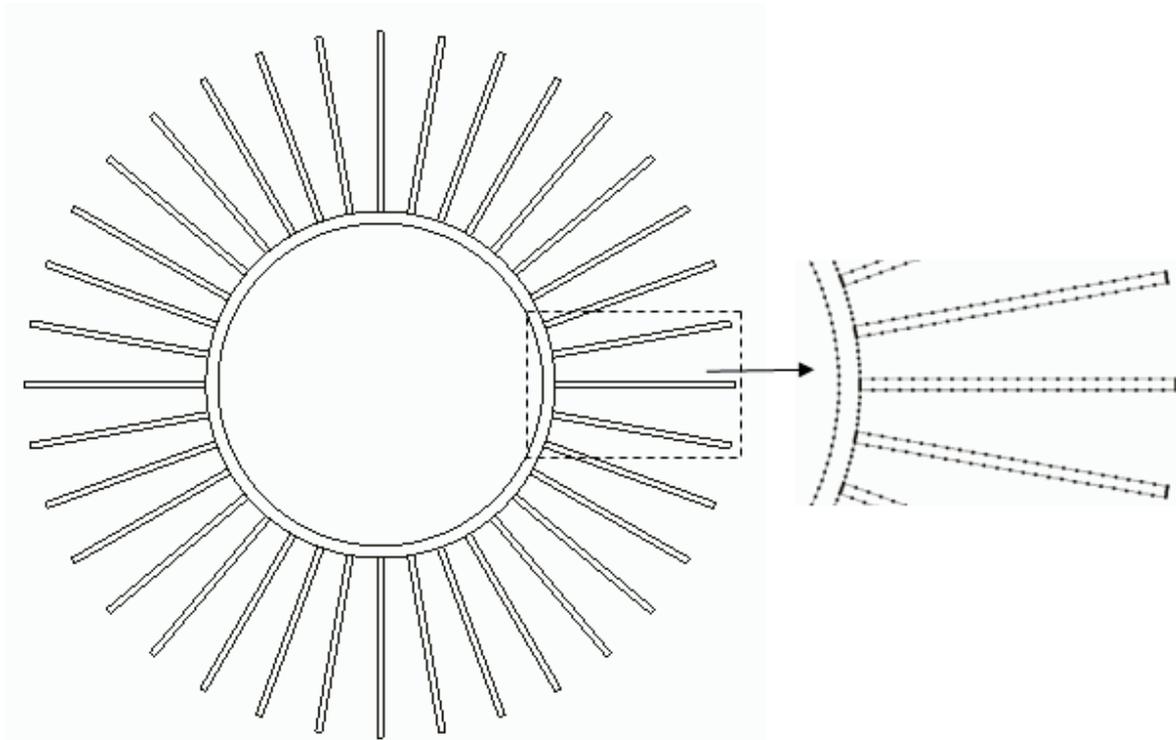


Figura 9: Malha de elementos de contorno para o tubo aletado.

Um aspecto importante que pode ser observado nessa malha, é o fato de as sub-regiões envolvidas possuírem geometria bastante esbelta, essa característica, exige bastante eficiência dos algoritmos de integração, pois nesses casos há um grande número de coeficientes das matrizes do MEC resultante da integração de elementos próximos ao ponto fonte fazendo com que o integrando seja quase-singular.

Para atestar os resultados obtidos com a presente formulação, comparam-se a distribuição de temperatura ao longo da seção do trocador obtida com a técnica BE SBS e com o software comercial Ansys. Na Figura 10 é apresentada a distribuição de temperatura em graus Celsius obtida com técnica BE SBS e na Figura 11 é mostrado a distribuição de temperatura obtida com o Ansys. Além da

distribuição de temperatura, compara-se também o fluxo total $\left[k_i \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2} \right]$ em W/m^2 . Na figura

12, observa-se os resultados de fluxo total da técnica BE SBS e na Figura 13 mostra-se os resultados obtidos com o Ansys. As figuras mencionadas foram geradas utilizando 6 pontos de integração e o sistema de equações foi resolvido com o solver BiCGSTAB(3)-SILU, com tolerância para admissão da convergência $\text{tol} = 1 \times 10^{-7}$. Com relação a malha utilizada pelo Ansys, o modelo possui 42865 nós e 11893 elementos quadráticos.

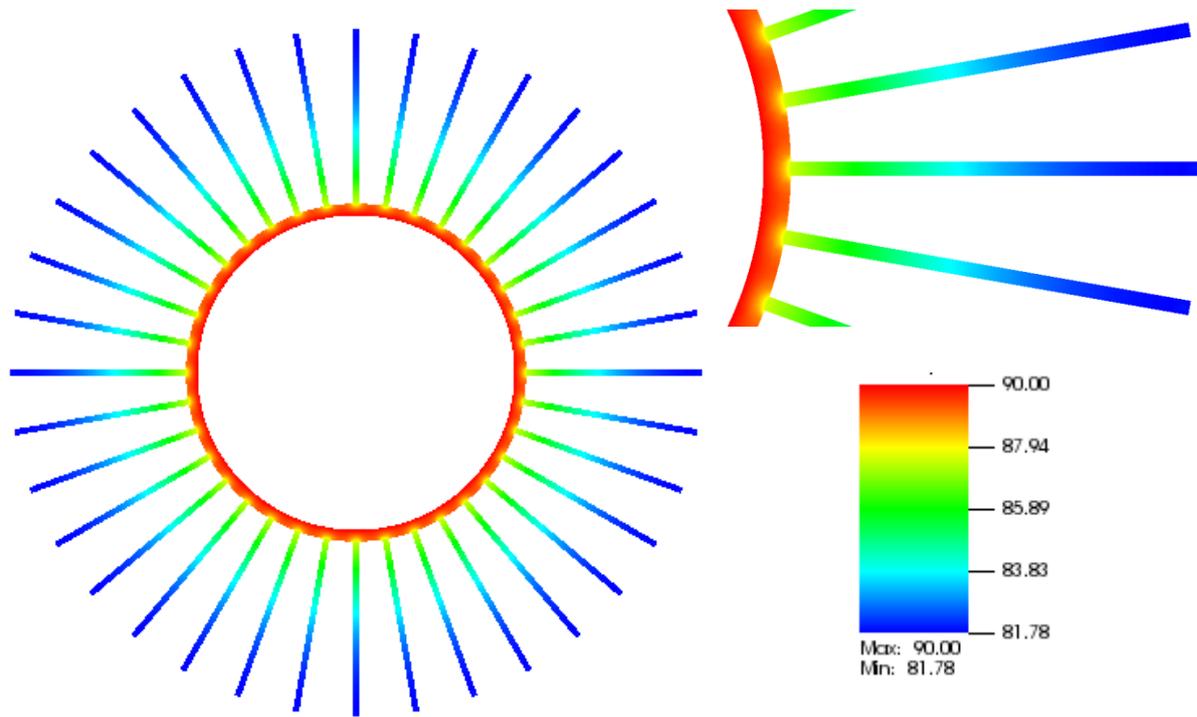


Figura 10: Distribuição de temperatura obtida pela técnica BE SBS para o exemplo 02

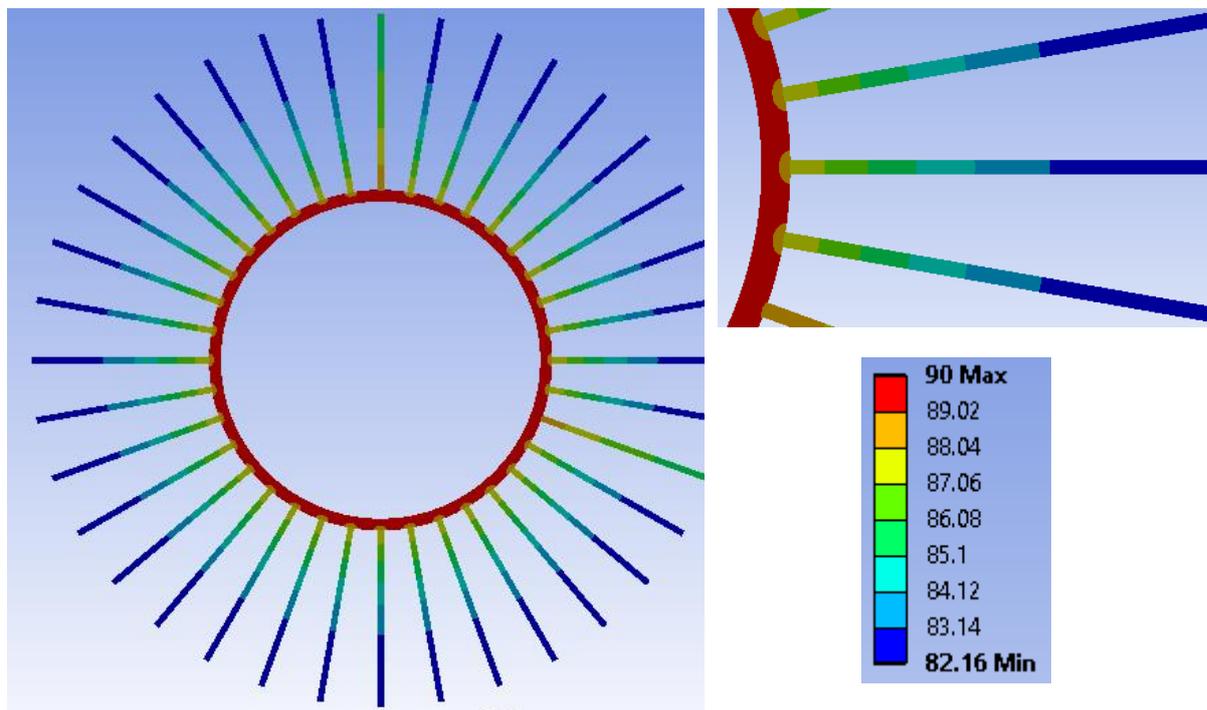


Figura 11: Distribuição de temperatura obtida via software Ansys para o exemplo 02.

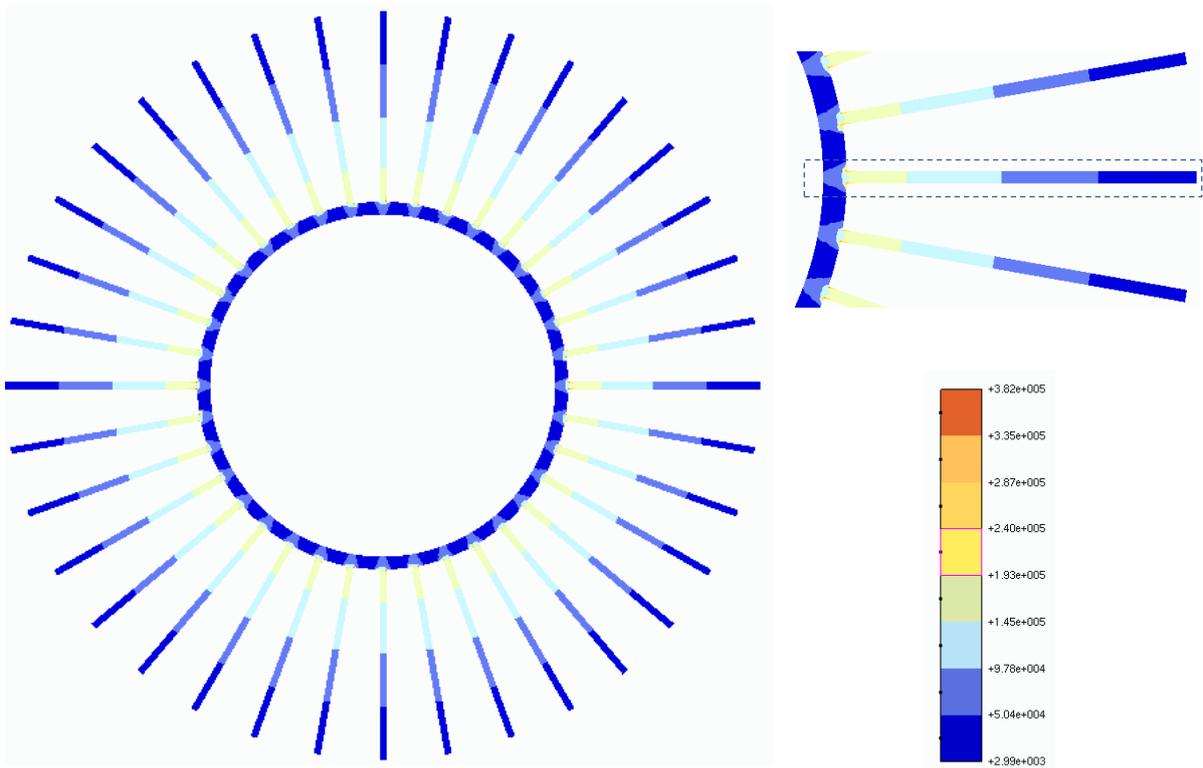


Figura 12. Resposta do fluxo obtido com a técnica BE SBS

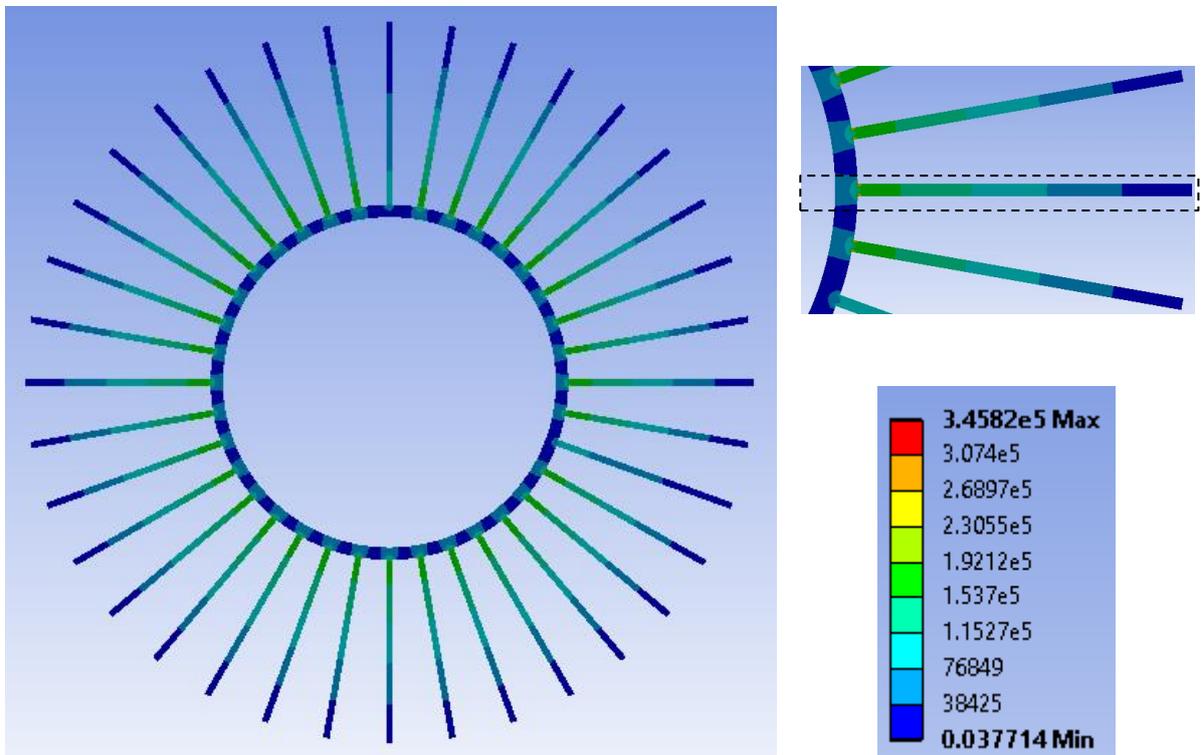


Figura 13. Resposta do fluxo obtido com o Ansys.

Observando o aspecto das Figuras 12 e 13, verifica-se que no resultado obtido com a técnica BE SBS somente nos cantos de contato entre as aletas e tubo não ocorreu convergência dos resultados.

A tendência do fluxo é o infinito nesses locais, não havendo correspondência com o Ansys. Para facilitar a visualização, comparou-se a resposta dos fluxos na linha média da aleta com relação ao Ansys, conforme destacado na Figura 14.

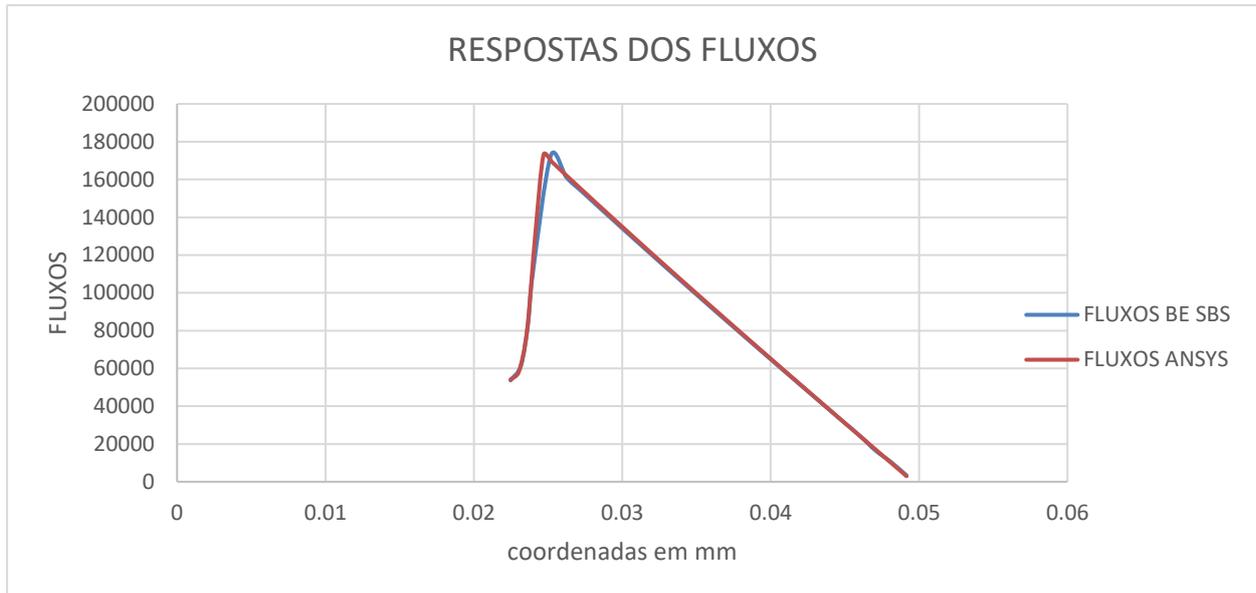


Figura 14. Visualização gráfica da resposta do

Observando o gráfico da Figura 14, verifica-se novamente a aproximação dos valores de fluxo obtidos com a técnica BE SBS e o software Ansys, atestando, portanto, os presentes resultados.

Outro aspecto importante é que, em decorrência da natureza da montagem da matriz global em estratégias baseadas em subestruturação, a matriz do sistema de equação resultante, é bastante esparsa quando se tem um número grande de sub-regiões envolvidas no modelo. Nesse sentido, a Figura 15 ilustra a disposição das submatrizes (faixas em preto) na matriz global para o tubo aletado, mostrando o quão esparsa é o sistema de equações (89%), e portanto, o quão vantajoso é o uso de solvers iterativos com relação ao custo computacional, visto que esse não operam com os grandes blocos de zeros.

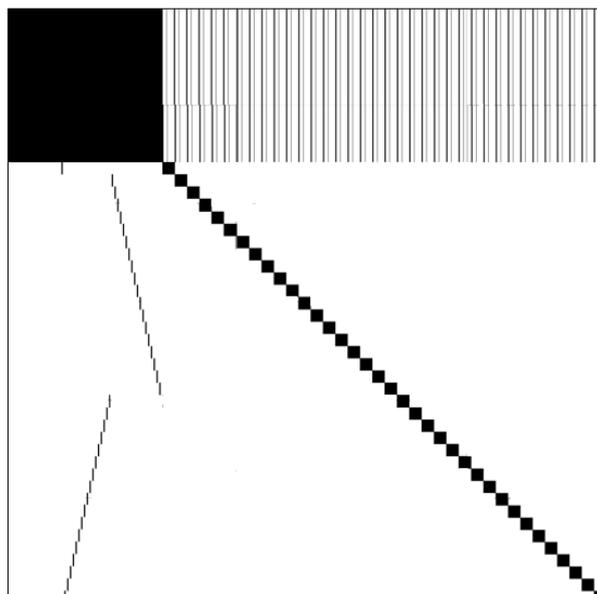


Figura 15: Matriz esparsa do sistema de equações acoplado para o tubo aletado.

Na Tabela 1, é apresentado a quantidade de memória Ram e tempo de processamento usando o solver BiCGSTAB(l)-SILU em comparação com um solver direto baseado na decomposição LU. É importante salientar que a eficiência de BiCGSTAB(l)-SILU é diretamente influenciada pelo parâmetro (l) e pela tolerância adotada para admitir a convergência, sendo fixado, portanto, para os resultados da Tabela 1, a $tol=1 \times 10^{-6}$ e $l=5$.

Tabela 1: Parâmetros comparativos dos solvers.

Ram usada (Mbytes)		Tempo de processamento(segundos)	
LU	BiCGSTAB(l)-SILU	LU	BiCGSTAB(l)-SILU
92.1167	19.7391	3.56	0.16

A tabela 1 confirma o que já era previsto, o uso do solver iterativo permitiu a técnica BE SBS utilizar 4.66 vezes menos memória e gastar 22.25 vezes menos tempo para resolver o sistema de equações, demonstrando o quão vantajoso para essa natureza de problema é o uso dos solvers iterativos.

Uma vez que existem vários solvers iterativos implementados na técnica BE SBS, é testado o desempenho quanto ao tempo de processamento em função da tolerância para admitir a convergência, como sabido, quanto menor a tolerância, maior o número de iterações necessárias para alcançar a resposta e maior a precisão da resposta também, assim é mostrado a temperatura mínima em cada análise. Os resultados são apresentados na tabela 2. O parâmetro de estabilização para os solver BiCGSTAB(l)-J e BiCGSTAB(l)-SILU adotado foi 3.

Tabela 2. Desempenho dos solver iterativos empregados na técnica BE SBS

Tol	BiCG-J		BiCG-SILU		BiCGSTAB(3)-J		BiCGSTAB(3)-SILU	
	Tempo	θ_{min}	Tempo	θ_{min}	Tempo	θ_{min}	Tempo	θ_{min}
1×10^{-4}	0.02	40.2	0.12	81.8	0.02	-28.9	0.14	81.8
1×10^{-5}	0.12	81.8	0.14	81.8	0.08	77.7	0.14	81.8
1×10^{-6}	0.14	81.7	0.12	81.8	0.09	82.1	0.12	81.8
1×10^{-7}	0.16	81.8	0.12	81.8	0.14	81.8	0.14	81.8
1×10^{-9}	0.25	81.8	0.14	81.8	0.56	81.8	0.14	81.8

Verifica-se na tabela 2 que a convergência entre os solvers em relação a temperatura mínima, foi alcançada com uma tolerância de 1×10^{-7} , e com um tempo de processamento de 0.12 segundos pelo solver BiCG-SILU. Com isso é importante perceber necessária atenção a despeito da tolerância adotada quando se utiliza solvers iterativos, dado que para uma tolerância muito alta, os resultados se apresentaram inadequados. Além disso, pode-se observar que solver BiCGSTAB(l)-SILU alcançou a convergência mesmo com uma tolerância mais elevada.

5 Conclusões

Este trabalho apresentou análises de transferência de calor descritas pela equação de Laplace para problemas bidimensionais, com aplicações específicas voltado as para trocadores de calor de seções arbitrárias, utilizando o Método de Elementos de Contorno. Os resultados obtidos foram comparados com os apresentados na literatura ou obtidos no software Ansys.

Nos exemplos apresentados pôde-se observar que as distribuições de temperatura foram precisas mesmo se tratando de seções com geometrias complexas em que houve necessidade de se utilizar elementos descontínuos para tratar de forma rigorosa as descontinuidades de fluxos. A transformada cúbica de Telles, adotada no processo de integração dos núcleos quase-singulares e fracamente singulares, também foi uma ferramenta importante para a obtenção de resultados precisos como acontece nas sub-regiões esbeltas do exemplo 02.

Ademais, a técnica BE SBS se mostrou robusta e eficiente em conjunto com os solvers iterativos implementados, possibilitando acoplar um grande número de materiais e seções com geometrias quaisquer de forma automática. Por fim, como vê-se e pode-se inferir, o emprego de solvers iterativos

também possibilita grande redução da memória necessária para analisar um problema, sobretudo nos casos de modelos de grande ordem e complexidade, envolvendo uma grande quantidade de subregiões, o que se explica pelo armazenamento eficiente das matrizes dos subsistemas propiciado pela estratégia de subestruturação em conjunto com solvers iterativos.

Agradecimentos

Os autores agradecem a todos que contribuíram para a conclusão deste trabalho em especial a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, a Universidade Federal de Ouro Preto e a Universidade do Estado de Mato Grosso.

Referências

- [1] C. Wang, J. Chen, S. H. Qiu, W. Tian, D. Zhang and G. H. Su. Performance analysis of heat pipe radiator unit for space nuclear power Reactor. *Annals of Nuclear Energy*, vol. 103, pp. 74–84, 2017.
- [2] B. Zheng, P. Sun, Y. Liu, Q. Zhao. Heat transfer of calcined petroleum coke and heat exchange tube for calcined petroleum coke waste heat recovery. *Energy*, vol. 155, pp. 56-65, 2018.
- [3] K. N. Belaid and O. Hireche. Influence of heat exchangers blockage ratio on the performance of thermoacoustic refrigerator. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 127, pp. 834–842, 2018.
- [4] S. Wang, X. Yu, C. Liang and Y. Zhang. Enhanced condensation heat transfer in air-conditioner heat exchanger using superhydrophobic foils. *Applied Thermal Engineering*, vol. 137, pp. 758-766, 2018.
- [5] M. A. Arie, A. H. Shooshtari and M. M. Ohadi. Experimental characterization of an additively manufactured heat exchanger for dry cooling of power plants. *Applied Thermal Engineering*, vol. 129, pp. 187-198, 2018.
- [6] C. Gillot, A. Bricard and C. Schaeffe. Single- and two-phase heat exchangers for power electronic components. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 39, n. 8, pp. 826-832, 2000.
- [7] S. Alosious, R. S. Sarath, A. R. Nair and K. Krishnakumar. Experimental and numerical study on heat transfer enhancement of flat tube radiator using Al₂O₃ and CuO nanofluids. *Heat Mass Transfer*, vol. 53, n. 12, pp. 3545–3563, 2017.
- [8] M. K. Moharana and S. Khandekar. Generalized formulation for estimating pressure drop in fully-developed laminar flow in singly and doubly connected channels of non-circular cross-sections. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, vol. 259, pp. 64–76, 2013.
- [9] H. Han, Y-L. He, W-Q. Tao and Y-S. Li. A parameter study of tube bundle heat exchangers for fouling rate reduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 72, pp. 210–221, 2014.
- [10] P. Biswas, S. Singh and H. Bindra. Homogenization of time dependent boundary conditions for multi-layer heat conduction problem in cylindrical polar coordinates. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 129, pp. 721–734, 2019.
- [11] M. Li and A. C. K. Lai. Analytical solution to heat conduction in finite hollow composite cylinders with a general boundary condition *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 60, pp. 549–556, 2013.
- [12] C. T’Joen, Y. Park, Q. Wang, A. Sommers, X. Han and A. Jacobi. A review on polymer heat exchangers for HVAC&R applications. *International Journal of Refrigeration*, vol. 32, pp. 763-779, 2009.
- [13] P. Gori, C. Guattari, L. Evangelisti and F. Asdrubali. Design criteria for improving insulation effectiveness of multilayer walls. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 103 (2016) 349–359
- [14] X. F. Hu, H. Y. Gao, W.A. Yao and S.T. Yang. Study on steady-state thermal conduction with singularities in multi-material composites. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 104, pp. 861–870, 2017.
- [15] Z. Li, J. H. Davidson and S. C. Mantell. Heat Transfer Enhancement Using Shaped Polymer Tubes:

Fin Analysis. *J. Heat Transfer*, vol. 126, n. 2, pp. 211-218, 2004.

[16] M. K. Moharana and P. K. Das. Heat Conduction Through Eccentric Annuli: An Appraisal of Analytical, Semi-Analytical, and Approximate Techniques. *J. Heat Transfer*, vol. 134, n. 9, pp. 0913011-0913019, 2012.

[17] S. K. Rana and A. Jena. A BEM formulation of two dimensional steady state heat conduction in exchanger tubes of arbitrary cross sections. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 106, pp. 195-211, 2017.

[18] J. C. F. Telles. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, pp. 959-973, 1987.

[19] R. Fletcher. Conjugate gradient methods for indefinite systems. In: *Lecture Notes in Mathematics*. 506. Berlin: Springer-Verlag; 1976. pp. 73–89 .

[20] G. L. G. Sleijpen and D. R. Fokkema. BICGSTAB(L) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, vol. 1, pp. 11-32, 1993.

[21] F. C. de Araujo, M. J. Hillesheim and D. Soares. Revisiting the BE SBS algorithm and applying it to solve torsion problems in composite bars: Robustness and efficiency study. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 107, pp. 12–24, 2019.