

ANALYSIS OF PLANE STRESS PROBLEMS USING THE SUBDOMAIN MESHLESS METHOD

André L. A. Silveira

Edmundo G. de A. Costa

José A. F. Santiago

andre.silveira@coc.ufrj.br

edmundo_costa@coc.ufrj.br

santiago@coc.ufrj.br

*Department of Civil Engineering, COPPE – Federal University of Rio de Janeiro
Ilha do Fundão, CP 68506, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brazil*

Abstract. In this paper, the Subdomain Meshless Method (SMM) is applied to the numerical solution of plane stress problems. An efficient integration scheme is proposed by using only a support of approximation centered at the base point for all Gauss points. At the end of the paper, an example is presented in order to assess the efficiency of the proposed method by comparing its results with those provided by analytical solutions reported in the literature.

Keywords: Subdomain Meshless Method, plane stress problems, efficient integration scheme

1 Introdução

Os métodos tradicionais baseados em malhas são os mais difundidos dentro da área da mecânica computacional, mas, apesar disso, ainda apresentam dificuldades para resolver determinados tipos de problemas, grandes deformações e deslocamentos, propagação de trincas e descontinuidades. Geralmente, para resolver esses tipos de problemas, os métodos baseados em malhas usam um processo de geração de malha iterativa. Esse processo, apesar de eficaz, gera um custo computacional muito alto.

Uma alternativa que vem sendo estudada nas últimas décadas são os Métodos Sem Malha, os quais permitem uma resolução de problemas de valores de contorno sem o uso de malhas ou células.

Os primeiros estudos publicados, baseados em Métodos sem Malha, tinham como objetivo modelar problemas astrofísicos [1,2] Anos depois NAYROLES et al. [1] apresentou um estudo abordando o Método do Elemento Difuso (DEM – sigla em inglês), utilizando o Método dos Mínimos Quadrados Móveis (MLS – sigla em inglês).

O Método de Galerkin Livre de Elementos (EFGM – sigla do inglês) [2], foi criado a partir de uma modificação do DEM, baseado no princípio variacional de Galerkin. O EFGM foi aplicado, inicialmente, para problemas de elasticidade e condução de calor, utilizando MLS para criar a função de forma e a função para a forma fraca do problema.

Os métodos citados anteriormente, apesar de serem considerados como Métodos Sem Malha, não são verdadeiramente sem malha, pois necessitam de elementos para resolução das integrais de domínio. O primeiro método que não precisa de nenhum tipo de elemento, seja na interpolação e na resolução das integrais, foi apresentado por ZHU et al. [3]. Porém, o método apresentava dificuldades com o tratamento de integrais singulares. Uma nova formulação, denominada Meshless Local de Petrov-Galerkin (MLPG), foi apresentada por ATLURI e ZHU [4] baseada na formulação local de Petrov-Galerkin. Esta formulação apresenta vantagens em relação àquela baseada no método de Galerkin, uma vez que não apresenta descontinuidade na segunda derivada das funções peso e de aproximação. O MLPG possui seis variantes, de acordo com o estudo feito por ATLURI e SHEN [5].

Os Métodos Sem Malha apresentam inúmeras vantagens, mas ainda precisam de muito estudo, pesquisa e desenvolvimento, a fim de torná-los competitivos em relação a métodos mais consolidados. Pode-se citar como exemplos de pontos que precisam ser melhorados no método: o mapeamento e a busca pelos pontos mais próximos, porque geram um custo computacional muito alto e a dificuldade de determinar a função de forma e de ponderação ideal para cada tipo de problema analisado.

Um dos grandes atrativos do MLPG é a sua flexibilidade. O método permite a utilização de diferentes funções de forma, funções de teste e o uso de subdomínios locais de formas e tamanhos diferentes.

Este estudo tem como objetivo principal verificar se o SMM, utilizando o MLS como função de aproximação, tem um bom desempenho para problemas de estado plano de tensão (EPT).

2 Elasticidade

Dá-se o nome de elasticidade à propriedade de um material que, quando deformado sob a ação de forças externas e depois de cessada a ação das forças, retorna à sua configuração inicial. Portanto, a teoria da elasticidade se propõe a estudar o comportamento dos materiais que possuem tal propriedade. A distribuição de tensões, deformações e deslocamentos de um corpo elástico sob a ação de forças externas precisa obedecer a três condições: condições de equilíbrio, relação tensão-deformação e condições de compatibilidade.

O comportamento de um corpo elástico e em equilíbrio submetido à ação de forças externas pode ser demonstrado através das equações diferenciais do equilíbrio, que por sua vez devem ser satisfeitas em qualquer ponto do interior do corpo.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad em \Omega \quad (1)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões de Cauchy correspondente ao campo de deslocamentos e u_i e b_i é a componente das forças do corpo.

O problema no contorno pode ser descrito através das seguintes condições de contorno:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2)$$

$$t_i = \sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i \quad \text{em } \Gamma_t \quad (3)$$

onde \bar{u}_i representa o deslocamento prescrito no contorno Γ_u , \bar{t}_i representa a força de superfície prescrita no contorno Γ_t e n_j representa o vetor normal unitário orientado para fora do corpo.

A relação tensão-deformação pode ser demonstrada a partir das relações constitutivas, as quais, por sua vez, devem estar de acordo com o comportamento do material. Ao se considerar o material elástico, a relação tensão-deformação deve ser uma expressão linear. Logo, podem-se expressar as componentes de tensão como funções lineares de nove componentes de deformação:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (4)$$

onde C_{ijkl} representa o tensor elástico de quarta ordem e ε_{kl} representa o tensor de deformação específica para pequenas deformações.

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (5)$$

Substituindo a Eq. (5) na Eq. (1) e depois de várias simplificações chega-se a Lei de Hooke generalizada:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (6)$$

onde λ e G podem ser, respectivamente, como:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (7)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (8)$$

As equações apresentadas são válidas somente para pequenas deformações e rotações. Logo, pode-se relacionar o tensor de deformações com os deslocamentos da seguinte forma:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (9)$$

Substituindo as Eqs. (5) e (9) na Eq. (1), obtém-se a equação da tensão σ_{ij} em termos das derivadas do deslocamento:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (10)$$

Substituindo a Eq. (10) na Eq. (1), chegamos à equação de Navier:

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj} + b_j = 0 \quad (11)$$

As condições de compatibilidade garantem que o corpo deforme e desloque de forma contínua. Portanto, quando existe uma deformação no corpo, o campo de deslocamento deve ser representado por funções contínuas.

2.1 Estado Plano de Tensão

No estado plano de tensão a espessura do corpo na direção do eixo z é muito menor se comparado com as dimensões dos eixos x e y . As forças externas são aplicadas somente no plano x - y e as tensões na direção do eixo z são nulas, logo:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

As componentes de deformação específica podem ser escritas de forma similar:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Apesar da tensão na direção do eixo z ser considerada nula, existe deformação específica na direção do eixo z e esta deformação pode ser calculada a partir das deformações na direção dos eixos x e y :

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (14)$$

A deformação específica pode ser obtida a partir da relação deformação-deslocamento:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (15)$$

onde u e v são, respectivamente, as componentes de deslocamento na direção x e y .

Usando a Lei de Hooke para o caso 2D, pode-se obter as tensões a partir das deformações específicas:

$$\sigma = c\varepsilon \quad (16)$$

onde c é a matriz de constantes do material, dada por:

$$c = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

3 Método Sem Malha

3.1 Método dos Mínimos Quadrados Móveis

O método consiste em, a partir de pontos conhecidos, obter valores aproximados para qualquer ponto do domínio. Partindo do princípio de que a função $u(\mathbf{x})$ pertence ao domínio Ω , podemos gerar um subdomínio Ω_s a partir do ponto \mathbf{x}_i , no qual a função aproximada $\tilde{u}(\mathbf{x}_i)$ é válida. Esta função aproximada é dada por:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}_j(\mathbf{x}_i) \quad (18)$$

ou na forma matricial

$$\tilde{u}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}_i) \quad (19)$$

onde $\mathbf{p}_j(\mathbf{x})$ é a base polinomial com m termos e $\mathbf{a}_j(\mathbf{x})$ são os coeficientes a determinar do subdomínio Ω_s no ponto \mathbf{x}_i . O número de termos da base pode ser obtido a partir das seguintes expressões:

$$\begin{cases} m = \frac{(m_b + 1)}{1} & \rightarrow 1D \\ m = \frac{(m_b + 1)(m_b + 2)}{2} & \rightarrow 2D \\ m = \frac{(m_b + 1)(m_b + 2)(m_b + 3)}{3} & \rightarrow 3D \end{cases} \quad (20)$$

onde m_b é a ordem do maior termo monomial.

Para a aproximação da função $\tilde{u}(\mathbf{x}_i)$, o ponto \mathbf{x}_i é escolhido como base e os pontos dentro do subdomínio Ω_s são denominados pontos do suporte $\bar{\mathbf{x}}_k$. Para que sejam obtidos resultados satisfatórios, o número de pontos do suporte deve ser maior do que o número de termos da base polinomial.

Dessa forma, podemos reescrever a Eq. (18) como $\tilde{u}(\mathbf{x}_i, \bar{\mathbf{x}}_k)$, ou seja, cada ponto \mathbf{x}_i receberá a contribuição do monômio aplicado em $\bar{\mathbf{x}}_k$. Assim, tem-se:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}_i, \bar{\mathbf{x}}_k) = \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}_j(\mathbf{x}_i) \quad (21)$$

Como o método consiste em uma aproximação, o mesmo gera um resíduo acumulado para cada subdomínio Ω_s . Esta função resíduo pode ser calculada da seguinte forma:

$$J(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^n w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_k) [\tilde{u}(\mathbf{x}_i, \bar{\mathbf{x}}_k) - \bar{u}_k]^2 \quad (22)$$

onde n é o número de pontos no subdomínio Ω_s , $w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_k)$ é a função peso associada ao ponto \mathbf{x}_i e \bar{u}_k é o valor prescrito da função para o ponto $\bar{\mathbf{x}}_k$.

A função peso, $w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_k)$, é utilizada para que o erro seja função da distância de \mathbf{x}_i até o ponto $\bar{\mathbf{x}}_k$, dessa forma a aproximação torna-se local, dependendo apenas do tamanho do suporte.

Substituindo a Eq. (21) na Eq. (22), tem-se:

$$J(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^n w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_k) \left[\sum_{j=1}^m \mathbf{p}_j(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}_j(\mathbf{x}_i) - \bar{\mathbf{u}}_k \right]^2 \quad (23)$$

A Eq. (23) pode ser escrita na forma matricial do seguinte modo:

$$J(\mathbf{x}_i) = [\mathbf{P}\mathbf{a}(\mathbf{x}_i) - \bar{\mathbf{u}}]^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_i) [\mathbf{P}\mathbf{a}(\mathbf{x}_i) - \bar{\mathbf{u}}] \quad (24)$$

Expandindo os termos da Eq. (24) na forma matricial, obtém-se:

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_n) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (25)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\bar{\mathbf{x}}_1) & \cdots & p_m(\bar{\mathbf{x}}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\bar{\mathbf{x}}_n) & \cdots & p_m(\bar{\mathbf{x}}_n) \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (26)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{Bmatrix} a_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ a_m(\mathbf{x}) \end{Bmatrix}_{m \times 1} \quad (27)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_j = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(\bar{\mathbf{x}}_1) \\ \vdots \\ u(\bar{\mathbf{x}}_n) \end{Bmatrix}_{n \times 1} \quad (28)$$

O parâmetro $\mathbf{a}_j(\mathbf{x})$ pode assumir qualquer valor. Portanto, para minimizar o erro e garantir que a função $\tilde{u}(\mathbf{x}_i)$ seja a mais próxima possível da função $u(\mathbf{x}_i)$, deve-se derivar a Eq. (24), obtendo-se:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 2\mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_i) \mathbf{P} \mathbf{a}(\mathbf{x}) - 2\mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_i) \bar{\mathbf{u}} \quad (29)$$

Em seguida, devemos igualar a Eq. (29) a zero, logo:

$$\mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_i) \mathbf{P} \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_i) \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (30)$$

A Eq. (30) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{B}(\mathbf{x}_i) \bar{\mathbf{u}} \quad (31)$$

onde $\mathbf{A}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_i) \mathbf{P}$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}_i)$. A matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x}_i)$ é simétrica ($m \times m$) e a matriz $\mathbf{B}(\mathbf{x}_i)$ não é simétrica ($m \times n$).

Pré-multiplicando a Eq. (31) por $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_i)$, resulta-se:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_i) \mathbf{B}(\mathbf{x}_i) \bar{\mathbf{u}} \quad (32)$$

Substituindo a Eq. (32) na Eq. (19), obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_i) \mathbf{B}(\mathbf{x}_i) \bar{\mathbf{u}} \quad (33)$$

Dessa forma, pode-se definir a função de aproximação como:

$$\varphi^T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_i) \mathbf{B}(\mathbf{x}_i) \quad (34)$$

sendo $\varphi^T(\mathbf{x}_i)$ uma matriz coluna ($n \times 1$).

Uma vez obtida a Eq. (34), é necessário agora obter-se a primeira e a segunda derivada da mesma.

A primeira derivada é determinada pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial \varphi^T}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}_i) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}_i) \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}_i), \quad k = 1,2 \quad (35)$$

E a segunda derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^T}{\partial \mathbf{x}_k^2}(\mathbf{x}_i) &= \frac{\partial^2 \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{x}_k^2}(\mathbf{x}_i) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \frac{\partial^2 \mathbf{A}^{-1}}{\partial \mathbf{x}_k^2}(\mathbf{x}_i) \mathbf{B} \\ &+ \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}_k^2}(\mathbf{x}_i) + 2 \left[\frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}_i) \frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}_i) \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}_i) \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}_i) \right. \\ &\left. + \mathbf{p}^T \frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}_i) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}_i) \right], \quad k = 1,2 \end{aligned} \quad (36)$$

Agora serão demonstradas as derivadas de cada matriz pertencentes às Eqs. (35) e (36).

Como a matriz \mathbf{P}^T é construída a partir das coordenadas dos pontos do subdomínio local, a matriz \mathbf{P}^T permanece invariável para cada subdomínio. Logo, podemos concluir que:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}_k} = 0, \quad k = 1,2 \quad (37)$$

A primeira e a segunda derivada da matriz diagonal $\mathbf{W}(\mathbf{x}_i)$ podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_n) \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad k = 1,2 \quad (38)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{W}(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}_k^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{x}_k^2}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{x}_k^2}(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_n) \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad k = 1,2 \quad (39)$$

Conhecidas as derivadas das matrizes \mathbf{P}^T e $\mathbf{W}(\mathbf{x}_i)$, pode-se demonstrar as derivadas das matrizes $\mathbf{A}(\mathbf{x}_i)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{x}_i)$.

A primeira derivada da matriz $\mathbf{B}(\mathbf{x}_i)$ apresenta-se da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_k}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x_k}(\mathbf{x}_i), \quad k = 1,2 \quad (40)$$

E a segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x_k^2}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{P}^T \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial x_k^2}(\mathbf{x}_i), \quad k = 1,2 \quad (41)$$

Já a primeira derivada da matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x}_i)$ mantém-se do seguinte modo:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_k}(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_k}(\mathbf{x}_i) \mathbf{P}, \quad k = 1,2 \quad (42)$$

E a segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x_k^2}(\mathbf{x}_i) = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x_k^2}(\mathbf{x}_i) \mathbf{P}, \quad k = 1,2 \quad (43)$$

Quanto às derivadas da matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_i)$, calculam-se do seguinte modo:

$$\frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial x_k}(\mathbf{x}_i) = -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_k}(\mathbf{x}_i) \mathbf{A}^{-1} \quad (44)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}^{-1}}{\partial x_k^2}(\mathbf{x}_i) = -2 \frac{\partial \mathbf{A}^{-1}}{\partial x_k}(\mathbf{x}_i) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_k}(\mathbf{x}_i) \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x_k^2}(\mathbf{x}_i) \mathbf{A}^{-1} \quad (45)$$

Para evitarmos o cálculo direto da matriz inversa de $\mathbf{A}(\mathbf{x}_i)$, usou-se o seguinte artifício. Primeiro reescrevemos a Eq. (34) dessa maneira:

$$\varphi^T(\mathbf{x}_i) = c(\mathbf{x}_i) \mathbf{B}(\mathbf{x}_i) \quad (46)$$

onde

$$c(\mathbf{x}_i) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_i) \quad (47)$$

Pós-multiplicando a Eq. (47) por $\mathbf{A}(\mathbf{x}_i)$, obtém-se:

$$c(\mathbf{x}_i) \mathbf{A}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_i) \quad (48)$$

Em seguida, aplicando a transposta na Eq. (48), tem-se:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_i) c(\mathbf{x}_i) = \mathbf{P}(\mathbf{x}_i) \quad (49)$$

Após a determinação da variável $c(\mathbf{x}_i)$, multiplica-se a mesma pela matriz $\mathbf{B}(\mathbf{x}_i)$ para obter a função de aproximação $\varphi^T(\mathbf{x}_i)$.

3.2 Método sem Malha de Subdomínio

O método de subdomínio é um método de formulação simples e de imediata aplicação para discretização de equações diferenciais parciais a partir de técnicas de interpolação ou aproximação. Assim, dividindo o domínio Ω em subdomínio Ω_s , a Eq. (11) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_s} \left[G u_{l,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} + b_l \right] \psi_s d\Omega_s = 0 \quad (50)$$

A função de ponderação ψ_s é definida por:

$$\psi_s = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in \Omega_s \\ 0 & \text{para } x \notin \Omega_s \end{cases} \quad (51)$$

Logo, a Eq. (50) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega_s} \left[Gu_{l,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} + b_l \right] d\Omega_s = 0, x \in \Omega_s \quad (52)$$

As condições de contorno são representadas pelas seguintes integrais:

$$\int_{\Gamma_{s1}} [u(x) - \bar{u}_l(x)] \Delta(x) d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_{s2}} [u_{l,k} n_k(x) - \bar{q}_l(x)] \Delta(x) d\Gamma = 0 \quad (53)$$

Aplicando na Eq. (53) a propriedade de delta de Dirac, obtém-se:

$$u(x) - \bar{u}_l(x) = 0, x \in \Gamma_{s1}$$

$$u_{l,k} n_k(x) - \bar{q}_l(x) = 0, x \in \Gamma_{s2} \quad (54)$$

onde Γ_{s1} é o contorno referente a condição essencial e Γ_{s2} é o contorno referente a condição natural.

Adotando a seguinte solução aproximada:

$$\tilde{u}(x_i) = \varphi(x_j) \hat{u}(x_i) \quad (55)$$

onde $\varphi(x_j)$ é uma matriz $2 \times 2n$ constituída de n matrizes 2×2 diagonal contendo as componentes da função de interpolação correspondentes aos pontos x_j ($j=1,2,\dots,n$) dentro do suporte local, centrado no ponto base x_i ($i=1,2,\dots,N$), sendo N o número total de pontos. O vetor $\hat{u}(x_i)$ é chamado vetor de deslocamentos fictícios.

Substituindo a Eq. (55) na Eq. (50), obtém:

$$\int_{\Omega_s} G \varphi_{,kk}(x_j) \hat{u}(x_i) + \frac{G}{1-2\nu} \varphi_{,kk}(x_j) \hat{u}(x_i) + b(x_i) = 0, x \in \Omega$$

$$\varphi(x_j) \hat{u}(x_i) - \bar{u}(x_i) = 0, x \in \Gamma_1$$

$$\varphi(x_j) n_k \hat{u}(x_i) - \bar{q}(x_i) = 0, x \in \Gamma_2 \quad (56)$$

onde a primeira parte da Eq. (56) é usada para a montagem da matriz de rigidez global K_{ij} e a segunda parte é usada para a montagem do vetor força f_i .

Satisfazendo as condições de cada ponto, pode-se montar o seguinte sistema:

$$K \hat{u} = f \quad (57)$$

onde K é a matriz de rigidez, \hat{u} é o vetor de incógnitas e f é o vetor força.

3.3 Integração numérica

Para a utilização da quadratura gaussiana na integração numérica, antes se deve definir e normalizar o intervalo de integração. Para isto, serão feitas algumas transformações de coordenadas. A primeira será a transformação da coordenada global para local:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 - X_1^i \\ X_2 - X_2^i \end{pmatrix} \quad (58)$$

Devido à natureza circular do domínio de integração, será feita mais uma transformação de coordenada, desta vez para as coordenadas polares:

$$x_1 = x_1(r, \theta) = r \cos \theta$$

$$x_2 = x_2(r, \theta) = r \sin \theta \quad (59)$$

O determinante da matriz jacobiana será:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \quad (60)$$

Por fim, será feita a transformação para normalização do intervalo:

$$\begin{aligned} r &= r(\xi, \eta) = \frac{r_i}{2}(\xi + 1) \\ \theta &= \theta(\xi, \eta) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\eta + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \end{aligned} \quad (61)$$

O determinante da matriz jacobiana será:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{r_i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \end{vmatrix} = \frac{r_i(\theta_2 - \theta_1)}{4} \quad (62)$$

Assim, as coordenadas dos pontos de Gauss são obtidas das seguintes funções:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X_1^i + \frac{r_i}{2}(\xi + 1)\cos(\pi(\eta + 1)) \\ X_2^i + \frac{r_i}{2}(\xi + 1)\operatorname{sen}(\pi(\eta + 1)) \end{pmatrix} \quad (63)$$

E a integração:

$$I = \frac{r_i(\theta_2 - \theta_1)}{4} \sum_{k_1}^{ng} \sum_{k_2}^{ng} [\nabla^2 \varphi_j(x_i; \xi, \eta)] w(x_i; \xi, \eta) r(\xi, \eta) w_g(\xi) w_g(\eta) \quad (64)$$

4 Resultados

4.1 Viga retangular submetida à flexão

Neste exemplo foi considerada uma viga em balanço, com 48 metros de comprimento e 12 metros de altura, como mostrado na Fig. 1(a). A viga é submetida a um carregamento parabólico transversal na extremidade livre. A viga possui $E = 3 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.3$ e $P = 1000 \text{ N}$. A viga foi discretizada com 48 pontos no contorno e 105 pontos no domínio, como mostrado na Fig. 1(b). Foi utilizada a função gaussiana com raio como função peso e base monomial quadrática.

A distribuição parabólica do carregamento pode ser calculada com a seguinte equação:

$$\tau_{xy} = \frac{P}{2I} \left[\frac{D^2}{4} - y^2 \right] \quad (65)$$

O deslocamento na direção do eixo x pode ser obtido da seguinte forma:

$$\Delta x = -\frac{Py}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (66)$$

E o deslocamento na direção do eixo y pode ser obtido da forma a seguir:

$$\Delta y = \frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2(L - x) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad (67)$$

onde I é o momento de inércia, L é a comprimento da viga e D é a altura da viga.

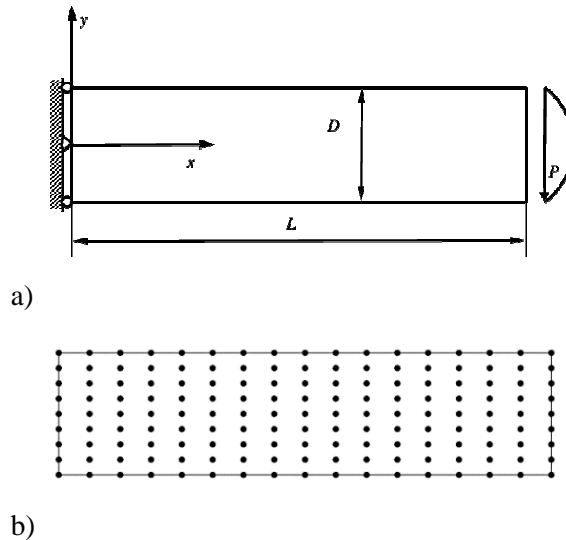


Figura 1. Viga submetida à flexão (a) e discretização da viga (b).

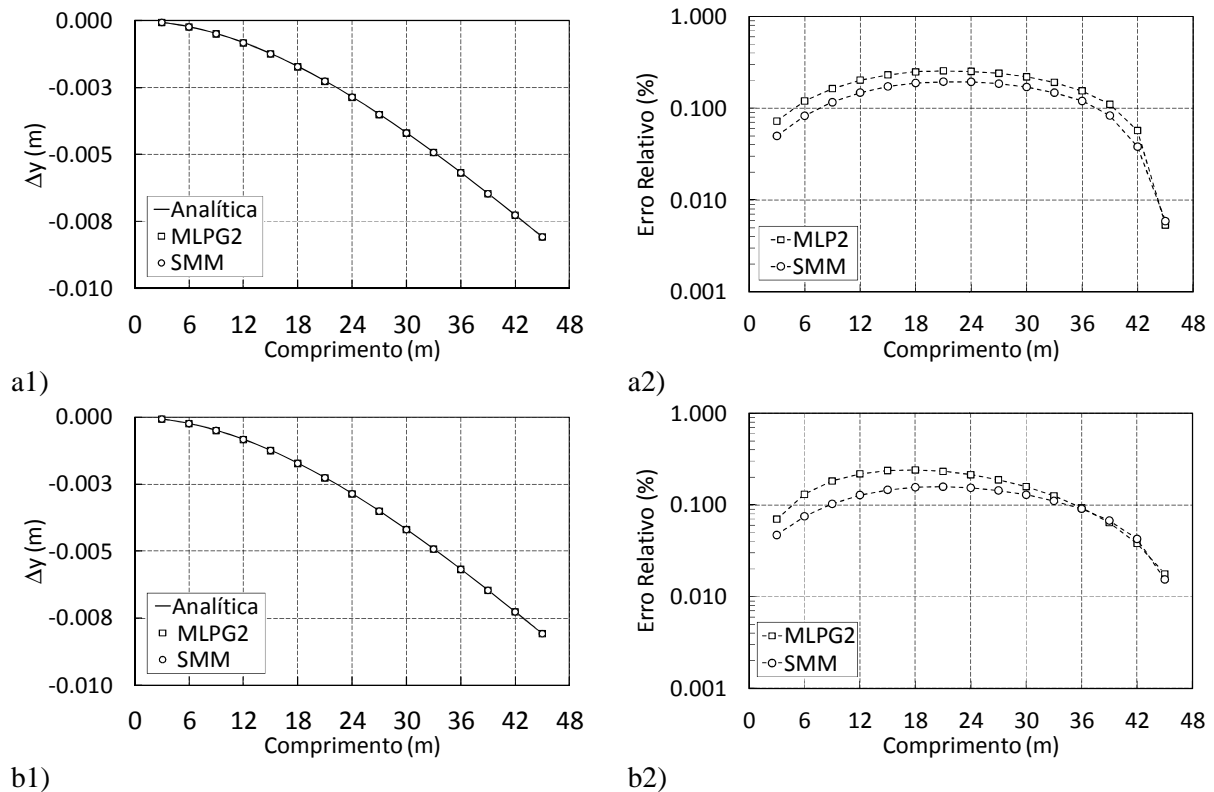


Figura 2. Comparação das soluções numéricas e analítica considerando uma viga retangular com um carregamento prescrito na extremidade livre (a) e com um deslocamento prescrito na extremidade livre (b).

A Figura 2 apresenta a comparação dos resultados numéricos e analíticos. As curvas foram construídas usando os pontos da linha neutra da viga. O MLPG2 é mostrado e usado como uma solução de referência. Em ambos os casos, o SMM fornece excelentes resultados (ver Fig. 2(a1) e (b1)) com um erro relativo abaixo de 1%. Observe que para distancias mais afastas da extremidade livre, o SMM fornece um erro relativo menor do que o MLPG2 (ver Fig. 2(a2) e (b2)). Além disso, o SMM fornece resultados com um custo computacional reduzido por fazer uso de um único suporte de aproximação centrado no ponto base para os todos os pontos de Gauss.

5 Conclusão

Nesse artigo, o SMM foi aplicado para a solução numérica de problemas de EPT. A formulação proposta fez uso de um único suporte de aproximação para todos os pontos de Gauss, reduzindo assim o custo computacional do modelo numérico. Simulações de uma viga submetida à flexão mostraram que o SMM fornece uma boa precisão para problemas de EPT.

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro fornecido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). O presente trabalho também foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

- [1] B. NAYROLES, G. TOUZOT and P. VILLON, Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, *Computational mechanics*, vol. 10, pp. 307-318, 1992.
- [2] T. BELYTSCHKO, Y. Y. LU and L. GU, Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 229-256, 1994.
- [3] T. ZHU, J.-D. ZHANG and S. ATLURI, A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach, *Computational mechanics*, vol. 22, n. 2, pp. 223-235, 1998.
- [4] S. N. ATLURI and T. ZHU, A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Computational mechanics*, vol. 22, n. 2, pp. 117-127, 1998.
- [5] S. N. ATLURI and S. SHEN, The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple and Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods, *Computer Modelling in Engineering and Sciences*, vol. 3, pp. 11-51, 2002.