

ANALYSIS OF PLATES ACCORDING TO THE REISSNER'S THEORY USING THE LOCAL RADIAL POINT INTERPOLATION METHOD

Danilo H. Konda

Joab G. L. Silva

danilokonda@ufmt.br

Exact Sciences and the Earth Institute, ICET/CUA/UFMT

Avenida Valdon Varjão N. 6390, Barra do Garças, MT, Brazil

José A. F. Santiago

Edmundo G. de A. Costa

José C. de F. Telles

santiago@coc.ufrj.br

edmundo_costa@coc.ufrj.br

telles@coc.ufrj.br

Department of Civil Engineering, COPPE – Federal University of Rio de Janeiro

Ilha do Fundão, CP 68506, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

Abstract. In this paper, the Local Radial Point Interpolation Method (LRPIM) is applied to analyse the problem of plates according to the Reissner's theory. An efficient interpolation scheme is employed to improve the computational performance of the proposed method. To validate the numerical implementation of the LRPIM, the results are compared with those provided by the Finite Element Method (FEM) and the Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method. A detailed discussion of the proposed interpolation scheme is carried out in order to demonstrate the performance of the LRPIM applied to the problem of plate bending.

Keywords: Local Radial Point Interpolation Method, Meshless Local Petrov-Galerkin Method, Finite Element Method, Plate bending, Reissner's theory

1. Introdução

A utilização de um método sem malha permite a solução numérica de problemas de valores de contorno sem a utilização de elementos ou consideração de incidência entre pontos notáveis, ou seja, com a simples distribuição desconexa de pontos ao longo do contorno e domínio do problema em questão.

Quando do surgimento dos primeiros métodos sem malha, a avaliação de integrais relativas à energia exigia a adoção de algum tipo de célula sobre todo o domínio do problema. Nestes casos, quando ao se trabalhar com grandes deformações, propagação de trincas ou descontinuidades, enfrenta-se dificuldades relativas à representação das células definidas inicialmente. A solução para este tipo de problema é, em geral, uma nova determinação das células de forma adequada à nova condição do problema, elevando o custo computacional.

Contrapondo o uso de células, Zhu et al. [1] apresentam o método intitulado de Element Free-Local Boundary Integral Equation (EF-LBIE), procedendo os denominados métodos “verdadeiramente sem malha”, nos quais, nenhum tipo de incidência é utilizado. A partir do EF-LBIE, Atluri e Zhu [2] propõem uma formulação para o problema de potencial linear, baseada na forma fraca simétrica local da equação diferencial, dando origem ao Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG).

A aplicação dos métodos sem malhas na análise de flexão de placas é relativamente recente. Leitão [3] apresenta uma formulação para análise do problema de placas de Kirchhoff [4] utilizando Funções de Base Radial (FBR) através do método de colocação de Hermite. O mesmo problema foi objeto de estudo por Long e Zhang [5] com a utilização do método local da equação integral de contorno, uma técnica verdadeiramente sem malha, onde os autores trabalharam com as integrais sobre o contorno local centrado no ponto de interesse, sem a consideração de qualquer tipo de elemento.

Com o rápido desenvolvimento dos métodos verdadeiramente sem malha, Atluri [6] propõe uma análise detalhada do MLPG através de um estudo comparativo, avaliando a eficiência e precisão do método, considerando diferentes funções de forma e funções de teste. Ao todo, foram definidas 6 funções de teste e para cada função de teste trabalhada, Atluri [6] definiu uma variante do MLPG. Na ocasião, os autores afirmaram que o método poderia substituir os métodos mais tradicionais, como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos (MEF).

A partir de então, diversas formulações envolvendo o MLPG foram propostas para a análise do problema de flexão de placas, sendo interessante citar o trabalho de Soric et al. [7], destinado a placas espessas, no qual é considerado o conjunto completo de equações constitutivas tridimensionais com o objetivo de se evitar o efeito de “locking”. Já no trabalho de Sladek et al. [8] o MLPG foi aplicado na análise estática e dinâmica de placas espessas, com a consideração de ortotropia e variação de espessura, produzindo bons resultados. A formulação apresentada por Sladek et al. [9] foi reescrita para a consideração de viscoelasticidade. Em Xia et al. [10], o MLPG é utilizado para análise elastoplástica de placas, considerando a teoria de Mindlin [11], conduzindo a resultados satisfatórios.

A teoria de Mindlin também é chamada de teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem, sendo destinada para placas finas e moderadamente espessas. Conforme explanado por Konda et al. [12] a teoria de Mindlin não deve ser confundida com a teoria de Reissner [13, 14], por mais que tais teorias sejam semelhantes e conduzam praticamente os mesmos resultados.

Em Konda et al. [15], o MLPG é utilizado na análise de flexão de placas espessas sob as hipóteses de Reissner, com a utilização de procedimento de integração não convencional. Para cada ponto de discretização é definido apenas um subdomínio local, sendo este, utilizado para obtenção das funções de forma, as quais são utilizadas para todos os pontos de quadratura correlacionados ao ponto de discretização.

A abordagem de formulações não convencionais é importante para se compreender as particularidades de um método ou de uma formulação propriamente dita. Tais estudos viabilizam superar diversas adversidades que, a princípio, não apresentam solução nas formulações tradicionais. Em Miers [16] podem ser encontradas formulações não convencionais de métodos sem malha para análise de problemas elastoplásticos e mecânica da fratura, todas baseadas na equação integral de contorno. As formulações também podem ser trabalhadas com o objetivo de se reduzir o uso de

elementos, como se observa no trabalho de Costa [17], onde uma solução alternativa para o problema de propagação de ondas é obtida a partir do método das soluções fundamentais.

Neste trabalho, a formulação desenvolvida por Konda et al. [15] é utilizada para se avaliar a influência do tamanho do subdomínio de integração na precisão dos resultados obtidos e no efeito de *shear locking*, permitindo um melhor entendimento do comportamento da formulação não convencional. Adicionalmente também é analisado o comportamento do efeito de *shear locking* à medida que a espessura da placa diminui.

2. Equações básicas da teoria de placas de Reissner

A relação entre a espessura e as demais dimensões de uma placa sujeita a flexão é determinante para avaliar seu comportamento. De forma resumida, uma placa pode ser classificada como placa fina com pequenas deformações, placa fina com grandes deformações e placa espessa.

A espessura da placa é parâmetro fundamental para se determinar a relevância dos efeitos das deformações cisalhantes. Com relação à grandeza das deformações, esta é essencial para se determinar a abordagem matemática adequada na mecânica do contínuo. Em geral, quando se trabalha com pequenas deformações, a posição indeformada da estrutura é assumida como única referência para análise. Já no caso de grandes deformações, a geometria e as propriedades físicas do material devem ser reavaliadas após a peça em análise atingir o equilíbrio em sua configuração deformada.

O desenvolvimento das equações da teoria de placas de Reissner, assim como a formulação do MLPG, é feito considerando-se a orientação do sistema de coordenadas apresentado na Fig. 1. Observe que, na mesma figura, também são apresentadas as direções positivas dos deslocamentos generalizados. A superfície média da placa é considerada contida no plano X_1X_2 .

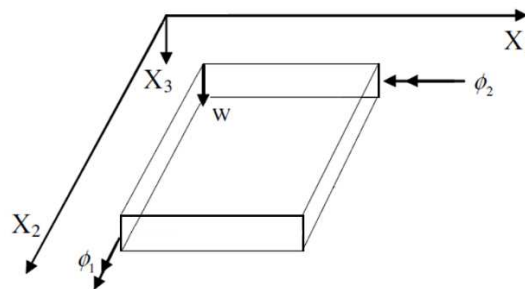


Figura 1. Sistema de coordenadas e orientação dos deslocamentos da placa.

Na figura 1, X_i indica o eixo coordenado na direção i ; ϕ_1 é a rotação que ocorre em torno de X_2 ; ϕ_2 é a rotação que ocorre em torno de X_1 e w é o deslocamento transversal.

A teoria de Reissner objetiva a análise de placas finas e espessas, com pequenas deformações, sendo consideradas as hipóteses:

- Pequena espessura, se comparada com as demais dimensões;
- Material constituinte homogêneo, isotrópico e com deformações em regime elástico linear;
- Deslocamentos transversais pequenos, quando comparados com a espessura da placa;
- Nas faces paralelas à superfície média, as tensões cisalhantes são nulas e a tensão normal é dada por: $\sigma_{33} = \pm \frac{g}{2}$ para $X_3 = \pm \frac{t}{2}$, onde g é o carregamento transversal aplicado na placa e t é a espessura da placa;
- Uma reta perpendicular à superfície média antes da deformação permanece reta após a deformação, mas devido às deformações cisalhantes, tal reta não será necessariamente perpendicular à superfície média deformada (Fig. 2).

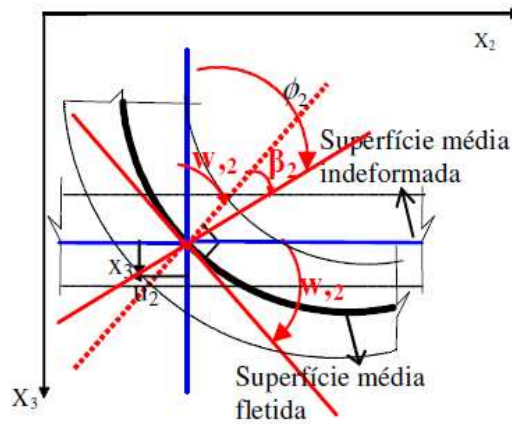


Figura 2: Representação da deformação por cisalhamento transversal [12].

Quando as deformações cisalhantes não são consideradas, o módulo da rotação da seção transversal coincide com o módulo da rotação da superfície média. Por outro lado, como pode ser observado na Fig. 2, as considerações das deformações cisalhantes implicam em um acréscimo β_2 na rotação da seção transversal. Algebricamente:

$$\phi_i = \frac{\partial u_i}{\partial X_3} = -w_{,i} + \beta_i \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

ou:

$$\beta_i = \phi_i + \frac{\partial w}{\partial X_i} \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

onde u_i são dos deslocamentos segundo as direções X_i .

As relações de equilíbrio da teoria de Reissner são obtidas a partir das relações básicas de equilíbrio da teoria da elasticidade, dadas por:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4)$$

onde σ representa as tensões normais para $i = j$ e tensões tangenciais para $i \neq j$, b_i são forças de volume na direção i , p_i são forças de superfície por unidade de área segundo a direção i e n_j são as componentes da direção normal ao contorno, dirigida para fora do domínio do problema.

Para o caso de flexão de placas no qual, a linha neutra seja coincidente com a superfície média da placa, pode-se escrever:

$$\sigma_{ij} = \frac{M_{ij}}{I} X_3 \quad i, j = 1, 2, \quad (5)$$

onde M_{ij} é o momento solicitante correlacionado à tensão σ_{ij} e I é o momento de inércia da seção transversal. Para o problema de flexão de placas, por questão de conveniência, a seção transversal é considerada com largura unitária e , desta forma, os esforços podem ser expressos por unidade de comprimento. A Eq. (5) pode ser reescrita na forma:

$$\sigma_{ij} = \frac{12}{t^3} M_{ij} X_3 \quad i, j = 1, 2. \quad (6)$$

A Eq. (6) descreve o comportamento das tensões σ_{11} , σ_{22} e σ_{12} ao longo da espessura da placa. Desta forma, os esforços resultantes na seção transversal da placa podem ser obtidos através de simples integração. Assim, impondo-se a condição de equilíbrio de forças verticais (direção X_3) e de momentos em torno das direções X_1 e X_2 , para um elemento de placa sob a ação de um carregamento distribuído g , obtém-se:

$$Q_{i,i} + g = 0 \quad i, j = 1, 2, \quad (7)$$

$$M_{ij,j} - Q = 0 \quad i, j = 1, 2, \quad (8)$$

onde Q_i é o esforço cortante que atua em uma face com normal na direção X_i .

As Eqs. (7) e (8) constituem as relações de equilíbrio da teoria de flexão de placas de Reissner e devem, obrigatoriamente, ser atendidas em cada ponto ou conjunto de pontos da placa.

As demais relações que integram a base da teoria de Reissner são obtidas a partir da extremização de um funcional escrito em termos de tensões e deformações, sendo dadas por:

$$M_{ij} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\phi_{i,j} + \phi_{j,i} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{k,k} \delta_{ij} \right) + \frac{\nu g}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{ij} \quad i, j, k = 1, 2, \quad (9)$$

$$Q_i = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\phi_i + w_{,i}) \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

onde $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ é a rigidez a flexão da placa, E é o módulo de elasticidade longitudinal, ν é o coeficiente de Poisson, δ_{ij} é o Delta de Kronecker e $\lambda = \frac{\sqrt{10}}{t}$ é uma constante característica da teoria de Reissner.

As Eqs. (7-10) constituem a base da teoria de Reissner para o problema de flexão de placas em regime de pequenos deslocamentos e podem ser condensadas, formando um novo sistema de equações diferenciais de sexta ordem, se escritas segundo as direções normal e tangencial, tendo como variáveis o deslocamento transversal w , a rotação na direção normal ϕ_n , a rotação na direção tangencial ϕ_s , o esforço cortante Q_n , o momento fletor M_n e o momento volvente M_{ns} .

3. MLPG com integração não convencional aplicado ao problema de flexão de placas

A formulação utilizada neste trabalho foi apresentada por Konda et al. [15], desenvolvida a partir do MLPG [6], com a utilização de Funções de Base Radial (FBR) com a adição de termos polinomiais para obtenção das funções de forma, caracterizando um MLPG denominado de Local Radial Point Interpolation Method (LRPIM).

Aplicando o método dos resíduos ponderados nas Eqs. (7) e (8), obtém-se:

$$\int_{\Omega_s} w_L (M_{ij,j} - Q_i) d\Omega \quad i, j = 1, 2, \quad (11)$$

$$\int_{\Omega_s} w_L (Q_{i,i} + g) d\Omega \quad i, j = 1, 2, \quad (12)$$

onde Ω_s é um subdomínio local com contorno Γ_s , também denominado de subdomínio de integração e w_L é a função de ponderação do resíduo centrada no ponto L , correlacionado a Ω_s .

Integrando-se por partes a Eq. (11), obtém-se a forma fraca da equação diferencial de equilíbrio:

$$\int_{\Omega_s} w_{L,j} M_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_s} w_L M_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Omega_s} w_L Q_i d\Omega = 0 \quad i, j = 1, 2. \quad (13)$$

Da mesma forma, para a Eq. (12):

$$\int_{\Omega_s} w_{L,i} Q_i d\Omega - \int_{\Gamma_s} w_L Q_i n_i d\Gamma - \int_{\Omega_s} w_L g d\Omega = 0 \quad i, j = 1, 2. \quad (14)$$

Cabe destacar que, nas Eqs. (13) e (14), a região Ω_s é composta por domínio e contorno, sendo o contorno composto por contorno interno e contorno externo com deslocamentos generalizados prescritos (Γ_{su}) e os esforços generalizados prescritos.

A função de ponderação é deliberadamente escolhida de forma a apresentar valor nulo sobre o contorno interno de Ω_s e, assim, as integrais sobre o contorno interno de Ω_s resultam em valor nulo, podendo ser eliminadas do equacionamento. Expandindo o contorno Γ_s , as Eqs. (13) e (14) podem ser rescritas na forma:

$$\int_{\Omega_s} w_{L,j} M_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_{su}} w_L M_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Gamma_{st}} w_L \bar{M}_{ij} n_j d\Gamma + \int_{\Omega_s} w_L Q_i d\Omega = 0 \quad i, j = 1, 2, \quad (15)$$

$$\int_{\Omega_s} w_{L,i} Q_i d\Omega - \int_{\Gamma_{su}} w_L Q_i n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{st}} w_L \bar{Q}_i n_i d\Gamma - \int_{\Omega_s} w_L g d\Omega = 0 \quad i, j = 1, 2, \quad (16)$$

onde a indicação de uma barra sobre a variável indica que a variável possui valor prescrito.

As Eqs. (15) e (16) podem ser escritas de forma matricial e agrupadas em uma única expressão:

$$\int_{\Omega_s} \mathbf{V}_{fL}^T \boldsymbol{\sigma}_f d\Omega + \int_{\Omega_s} \mathbf{V}_{qL}^T \boldsymbol{\sigma}_q d\Omega - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}_L^T \mathbf{n}_f \boldsymbol{\sigma}_f d\Gamma - \int_{\Gamma_{st}} \mathbf{W}_L^T \mathbf{n}_f \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}_L^T \mathbf{n}_q \boldsymbol{\sigma}_q d\Gamma - \int_{\Gamma_{st}} \mathbf{W}_L^T \mathbf{n}_q \bar{\boldsymbol{\sigma}}_q d\Gamma - \int_{\Omega_s} \mathbf{W}_L^T \mathbf{g} d\Omega = 0 \quad (17)$$

onde:

$$\mathbf{V}_{fL} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W_L}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial W_L}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial W_L}{\partial x_2} & \frac{\partial W_L}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{V}_{qL} = \begin{bmatrix} W_L & 0 & \frac{\partial W_L}{\partial x_1} \\ 0 & W_L & \frac{\partial W_L}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{n}_f = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathbf{n}_q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ n_1 & n_2 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{W}_L = \begin{bmatrix} W_L & 0 & 0 \\ 0 & W_L & 0 \\ 0 & 0 & W_L \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f = [M_{11} \quad M_{22} \quad M_{12}]^T, \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_q = [Q_1 \quad Q_2]^T, \quad (24)$$

$$\mathbf{g} = [g \quad 0 \quad 0]^T, \quad (25)$$

A Eq. (17) tem como incógnitas os esforços do problema de flexão de placas. Para obtenção do sistema de equações discretizado, as relações entre esforços e deslocamentos devem ser utilizadas, possibilitando escrever a Eq. (17) de forma que, apenas os deslocamentos sejam as incógnitas do problema. Assim, as Eqs. (9) e (10) são reescritas, na forma matricial:

$$\boldsymbol{\sigma}_f = \mathbf{D}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f + \mathbf{R}, \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_q = \mathbf{D}_q \boldsymbol{\varepsilon}_q, \quad (27)$$

sendo:

$$\mathbf{D}_f = \begin{bmatrix} D & D\nu & 0 \\ D\nu & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} g & \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} g & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ w \end{Bmatrix}, \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ w \end{Bmatrix}, \quad (32)$$

Os deslocamentos que compõem o vetor à esquerda nas Eqs. (31) e (32), são os deslocamentos aproximados que se deseja determinar com a solução do problema. A indicação sobre a variável será

utilizada para indicar que se trata de um valor aproximado. Para um ponto x_q qualquer, estes deslocamentos podem ser escritos em função de valores fictícios da própria variável. Logo:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\phi}_1(x_q) \\ \tilde{\phi}_2(x_q) \\ \tilde{w}(x_q) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1(x_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(x_q) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_N(x_q) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_N(x_q) & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_N(x_q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1(x_q^1) \\ \hat{\phi}_2(x_q^1) \\ \hat{w}(x_q^1) \\ \vdots \\ \hat{\phi}_1(x_q^N) \\ \hat{\phi}_2(x_q^N) \\ \hat{w}(x_q^N) \end{Bmatrix}, \quad (33)$$

onde a indicação \wedge sobre a variável indica que se trata de uma variável com valor fictício, x_q^N representa o N-ésimo pontos pertencente ao subdomínio local do ponto x_q e φ é a função de forma utilizada para aproximar os deslocamentos.

Assim, a Eq. (17) pode ser escrita para o ponto L e em função das variáveis de todos os pontos que pertencem ao subdomínio local do ponto L, na forma:

$$\mathbf{f}_L = \mathbf{k}_L \mathbf{u}_L, \quad (34)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_L &= \int_{\Omega_s} \mathbf{V}_{fl}^T \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f d\Omega + \int_{\Omega_s} \mathbf{V}_{ql}^T \mathbf{D}_q \mathbf{B}_q d\Omega - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}_L^T \mathbf{n}_f \mathbf{D}_f \mathbf{B}_f d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}_L^T \mathbf{n}_q \mathbf{D}_q \mathbf{B}_q d\Gamma, \quad (35) \\ \mathbf{f}_L &= \int_{\Gamma_{st}} \mathbf{W}_L^T \mathbf{n}_f \bar{\sigma}_f d\Omega + \int_{\Gamma_{st}} \mathbf{W}_L^T \mathbf{n}_q \bar{\sigma}_q d\Gamma + \int_{\Omega_s} \mathbf{W}_L^T \mathbf{g} d\Omega - \int_{\Omega_s} \mathbf{V}_{fl}^T \mathbf{R} d\Omega + \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{W}_L^T \mathbf{n}_f \mathbf{R} d\Gamma, \quad (36) \end{aligned}$$

e as matrizes \mathbf{B}_f e \mathbf{B}_q são as matrizes de operadores diferenciais das Eqs. (31) e (32), respectivamente. O vetor \mathbf{u}_L é o vetor que contém os deslocamentos nodais fictícios de todos os pontos que compõem o subdomínio local do ponto L.

Escrevendo a Eq. (34) para todos os pontos utilizados para discretizar o problema, obtém um novo sistema de equações lineares, dado por:

$$\mathbf{K}_{(3N \times 3N)} \mathbf{U}_{(3N \times 1)} = \mathbf{F}_{(3N \times 1)}, \quad (37)$$

onde N é o número total de pontos utilizados para representar o problema.

Ao se aplicar as condições de contorno do problema, a Eq. (37) pode ser resolvida, fornecendo os valores fictícios nodais dos deslocamentos. Neste trabalho, a imposição das condições de contorno essenciais é feita utilizando-se o método de colocação. Por fim, os deslocamentos finais aproximados são obtidos a partir da Eq. (33).

A obtenção de \mathbf{k}_L e \mathbf{f}_L exige a que a avaliação numérica das integrais das Eqs. (35) e (36), que em geral se dá através da utilização de um processo de quadratura. Neste processo, as funções que compõem as integrais devem ser avaliadas em cada ponto de quadratura. Para tanto, usualmente, a função de aproximação é escrita para cada ponto de quadratura, acarretando um aumento considerável no custo computacional. Vale observar que o processo de obtenção da função de aproximação envolve a construção de um subdomínio local, a solução de um sistema com inversão de matrizes e ainda que, o número de pontos de quadratura é consideravelmente maior que número de pontos de discretização.

Com o objetivo de reduzir o custo computacional, Konda et al. [15] propõem a utilização de uma única função de aproximação para cada ponto de discretização, tanto para aproximação das variáveis nos pontos de discretização, quanto para os pontos de quadratura. Esta abordagem aumenta a

imprecisão na avaliação das funções nos pontos de quadratura, mas em contrapartida, reduz significativamente o custo computacional do MLPG.

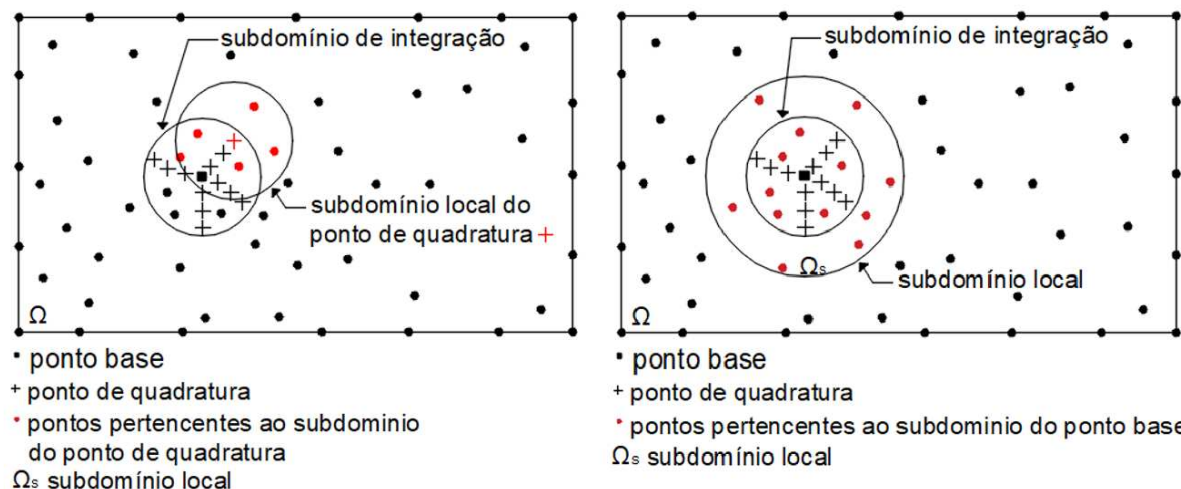


Figura 3. Processo de integração usual à esquerda. Processo de integração não convencional à direita. Adaptado de Konda, Santiago e Telles [18].

3.1. Subdomínio de integração

O Resultado Aproximado Obtido com a solução do problema deve satisfazer a condição produzir um resíduo ponderado acumulado nulo em cada subdomínio de integração, quando considerado as equações diferenciais de equilíbrio para o problema de flexão de placas.

Conforme afirma Fontes Junior [19], um dos requisitos do MLPG é que o subdomínio local de integração deve cobrir todo o domínio do problema, permitindo-se a ocorrência de sobreposições. Esta exigência, objetiva garantir que a solução da forma fraca da equação diferencial se mantenha próxima o bastante da solução da equação em sua forma forte.

Na Fig. 4 é apresentado um exemplo da ocorrência da sobreposição dos subdomínios de integração para seis pontos de discretização no domínio Ω . A quantidade limitada de pontos de discretização para o exemplo apresentado foi proposital e teve como objetivo facilitar a visualização do processo.

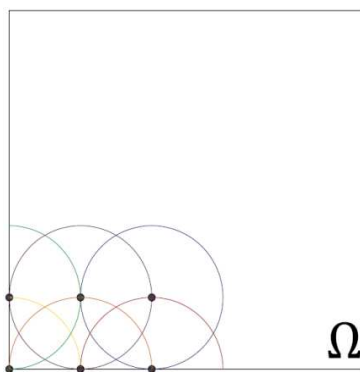


Figura 4. Sobreposição de subdomínios de integração.

Neste trabalho, o estudo da influência do tamanho do subdomínio de integração é feito considerando-se uma distribuição de pontos de forma homogênea, tanto na direção X_1 quanto na direção X_2 . A forma geométrica utilizada para o subdomínio de integração é circular e o raio de referência é o espaçamento nodal da nuvem de pontos utilizada para discretizar o problema. Desta forma, é utilizado um fator de ampliação ou redução Fat do raio do subdomínio de integração.

Quando $Fat \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, cumpre-se o requisito citado por Fontes Junior [19], ou seja, o cobrimento de todo o domínio do problema pelos subdomínios de integração.

O MLPG é método local, ou seja, o método é sensível a características particulares que ocorrem em pequenas regiões de Ω . Assim sendo, apesar de não haver um limite superior para definição do valor de Fat , a utilização de um Fat grande ser vista com cautela, sob pena de se perder o caráter local do método. Por outro lado, a utilização de um Fat insuficiente para cobrimento de todo Ω , implica na existência de regiões nas quais a forma fraca da equação diferencial não é atendida.

Na Fig. 5 é apresentada uma placa representada por uma nuvem de 66 pontos e $Fat = \frac{1}{2}$. É possível observar que o domínio Ω não é totalmente coberto pelos subdomínios de integração e portanto, na área hachurada não há a imposição de resíduo ponderado acumulado nulo.

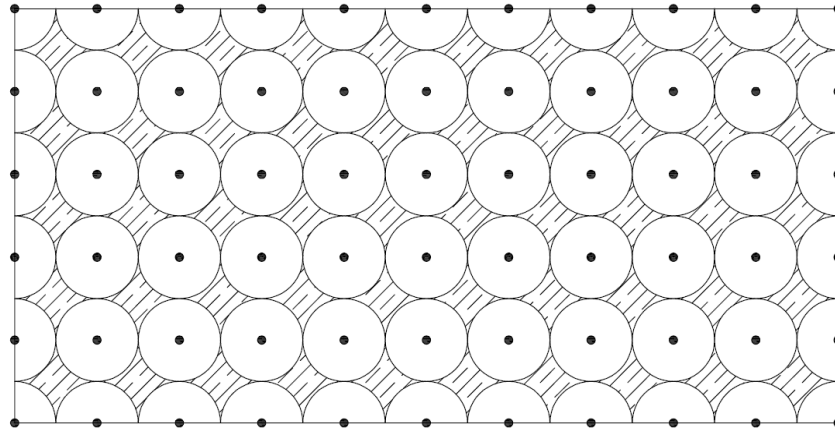


Figura 5. Destaque da falta de cobrimento do domínio Ω pelos subdomínios de integração.

Ainda que o resíduo ponderado acumulado no subdomínio de integração seja nulo, não há garantia de que a solução da forma fraca da equação diferencial também seja a solução de sua forma forte. Pode-se dizer que a forma fraca força as condições de continuidade em um sentido médio, ou seja, a solução da forma forte também é solução da forma fraca, porém a afirmação contrária nem sempre é verdadeira.

Tendo em vista que o requisito de cobrimento de todo domínio Ω pelos subdomínios de integração não é garantia de obtenção da solução aproximada suficientemente próxima da solução do problema, a redução do tamanho dos subdomínios de integração se torna um parâmetro importante para aferir a relevância das características locais na formulação como um todo e também em questões específicas, como por exemplo, o efeito de *locking*.

4. Aplicação numérica

Para análise, considere uma placa apoiada em todos os bordos (apoio do tipo *soft*), com carregamento distribuído $q = -0.64 \text{ KN/m}^2$. A placa é constituída de material com módulo de elasticidade $E = 2 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Com relação à geometria, a placa é quadrada com aresta $L = 4 \text{ m}$ e espessura $t = 1 \text{ m}$, produzindo uma relação $\frac{t}{L} = 0.25$, ou seja, uma placa espessa. As funções de aproximação são obtidas utilizando-se uma base monomial de segunda ordem e, em cada subdomínio local, são considerados no mínimo 9 pontos para construção da função de aproximação. Para a integração numérica, são utilizados 15 pontos de quadratura nas integrais de contorno e 15×15 pontos de quadratura para as integrais de domínio.

Nas Figs. 6, 7 e 8 são apresentados o comportamento do erro relativo em função do parâmetro de ampliação do subdomínio de integração, para nuvens de 25, 81 e 289 pontos, respectivamente. Nestes gráficos são analisados os valores máximos do deslocamento transversal e da rotação.

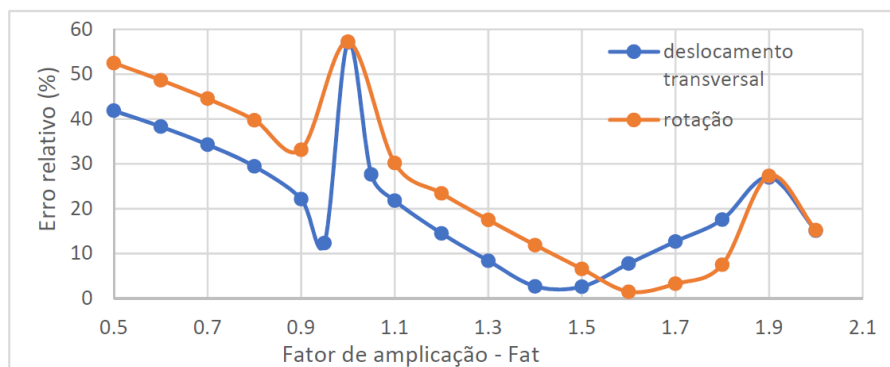


Figura 6. Variação do domínio de integração com a utilização de nuvem de 25 pontos.

Apesar da utilização de uma nuvem pobre para representar o problema aumentar significativamente a imprecisão dos resultados, é possível observar que, bons resultados podem ser obtidos através de ajustes no tamanho do subdomínio de integração. Ao se utilizar $Fat = \frac{3}{2}$ o erro relativo para o deslocamento transversal e para a rotação foi de 2.65% e 6.59%, respectivamente.

Para as nuvens de 81 e 289 pontos, o aumento de Fat mostrou uma relação inversamente proporcional ao erro relativo em grande parte do espaço analisado. Quando utilizado um fator de ampliação de 1.8 na nuvem de 81 pontos, o erro relativo médio foi de 1.96%.

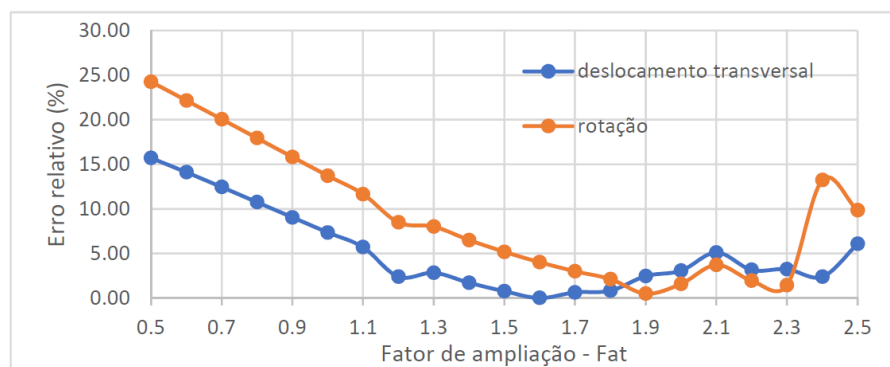


Figura 7. Variação do domínio de integração com a utilização de nuvem de 81 pontos.

Em todas as análises, é possível observar que um fator de ampliação acima de 2.0 provoca instabilidade nos resultados, confirmando a hipótese de que, subdomínios de integração muito grandes implicam em perdas das características locais do MLPG.

Da análise dos resultados obtidos a partir do processo de refinação da nuvem de discretização, é possível observar que o erro relativo diminui à medida que se melhora a representação problema, independentemente do tamanho dos subdomínios de integração utilizados, suscitando a ideia de uma possível desconexão entre a quantidade de pontos utilizados para representar o problema e o tamanho do subdomínio de integração. Em outras palavras, apesar de mais estudos serem necessários, estes resultados evidenciam a possibilidade de se analisar a influência do subdomínio de integração independentemente do processo de refinação da nuvem de representação do problema.

Da Fig. 8, pode-se notar que o erro relativo apresenta um comportamento bem definido para $Fat \leq 1.9$, sendo que, para valores acima de 2.0, os resultados para a rotação representam certa instabilidade. Desta forma, para análise da ocorrência de *shear locking*, tomou-se o valor fixo de $Fat = 1.9$, reduzindo-se gradativamente a espessura da placa e mantendo-se fixo todos os demais parâmetros do método. Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 9.

Na Fig. 9 é possível notar que a placa sujeita à flexão incorre em travamento por cisalhamento quando a relação $\frac{t}{L} < 0.0625$. Na Fig. 10 apresenta-se a análise da influência do tamanho do subdomínio de integração para a placa com $\frac{t}{L} = 0.05$. É relevante notar que a redução do tamanho do

subdomínio de integração ($Fat = 1.9$ para $Fat = 1.3$) aumentou significativamente a precisão dos resultados na ocorrência de *shear locking*.

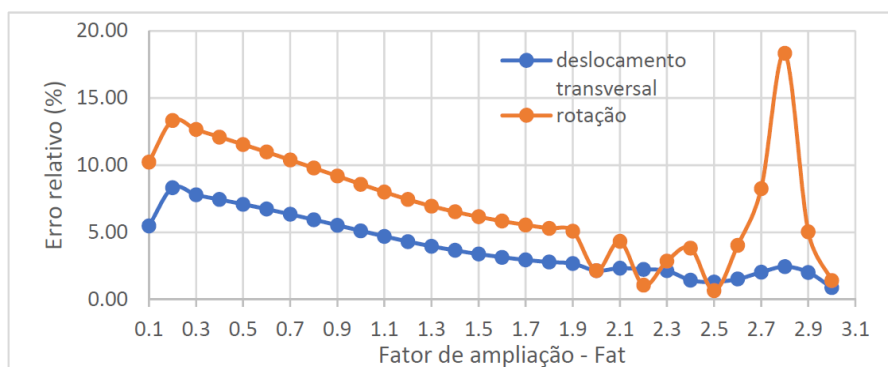


Figura 8. Variação do domínio de integração com a utilização de nuvem de 289 pontos.

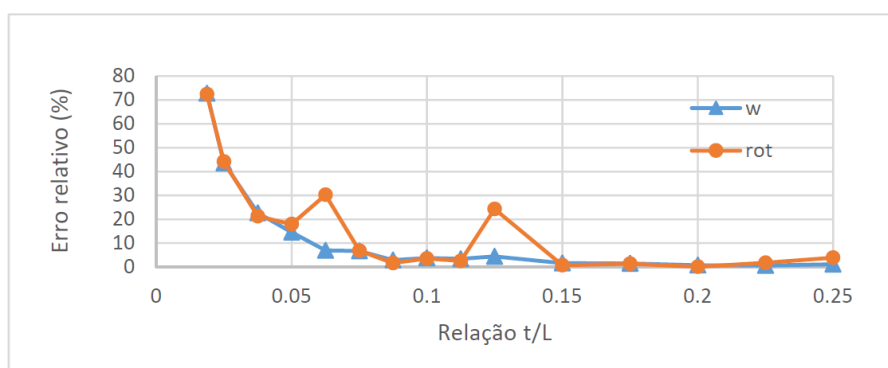


Figura 9. Ocorrência do efeito de *Shear locking*.

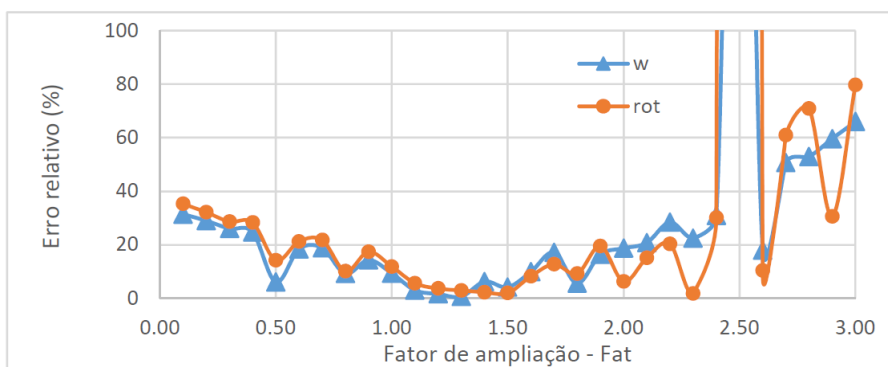


Figura 10. Influência do fator na ampliação em resultado com ocorrência de travamento cisalhante – relação $\frac{t}{L} = 0.05$.

Nas Figs. 10 e 11 é possível notar que a redução da relação $\frac{t}{L}$ causa certa instabilidade nos resultados, produzindo resultados piores para subdomínios de integração com $Fat > 2.0$. Note que valores $1.1 < Fat < 1.3$ parecem suprimir com eficiência o efeito de *shear locking*.

Nas Figs. 12 e 13 são apresentados os resultados para a placa com erro relativo de 44% e 72% devido ao efeito de *shear locking*, respectivamente. Ainda que, para todos os valores de Fat avaliados, a instabilidade dos resultados se agrave rapidamente à medida que a relação $\frac{t}{L}$ diminui, é possível notar a tendência de supressão do *shear locking* para valores de Fat próximos de 1.1. Outro ponto que merece destaque é que, se por um lado a utilização de subdomínios de integração com Fat maiores que 1.5 e menores que 2.0 produziram resultados mais precisos para a placa espessa, valores

de F_{at} menores que 1.3 reduziram significativamente a instabilidade em placas finas sujeitas ao *shear locking*.

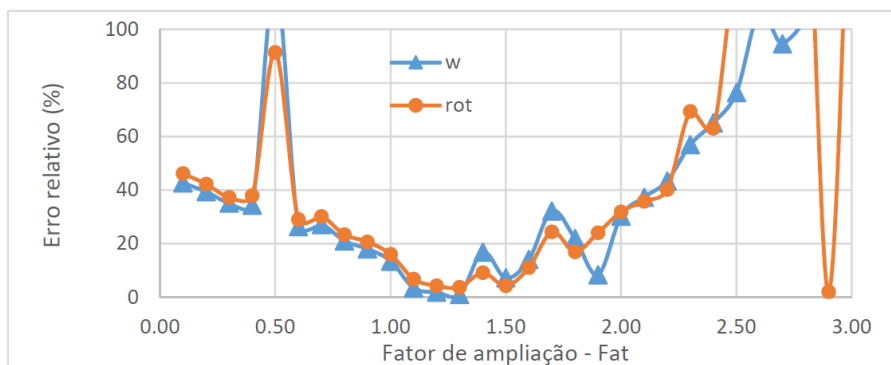


Figura 11. Influência do fator na ampliação em resultado com ocorrência de travamento cisalhante – relação $\frac{t}{L} = 0.0375$.

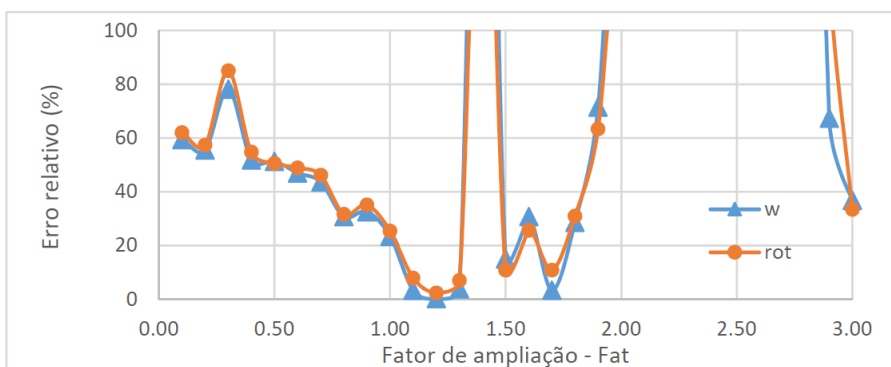


Figura 12. Influência do fator na ampliação em resultado com ocorrência de travamento cisalhante – relação $\frac{t}{L} = 0.025$.

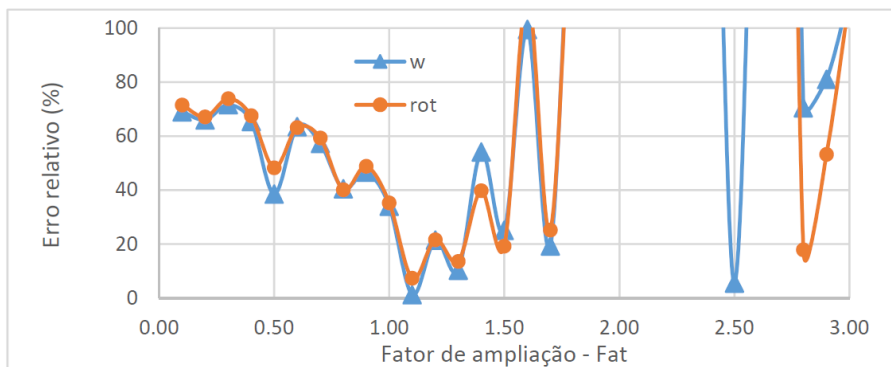


Figura 13. Influência do fator na ampliação em resultado com ocorrência de travamento cisalhante – relação $\frac{t}{L} = 0.01875$.

5. Conclusões

Apesar da quantidade limitada de dados avaliados, o tamanho do subdomínio de integração se mostrou um parâmetro importante do MLPG na análise de flexão de placas sob as hipóteses de Reissner. No estudo de placas espessas ficou evidente que a utilização de subdomínio de integração demasiadamente pequeno produz resultados imprecisos e, por outro lado, subdomínios demasiadamente grandes provocam instabilidades, sendo estas, mais percebidas nos valores da

rotação. Já no caso de aplicação da formulação em placas finas, o tamanho do subdomínio de integração apresenta indícios de que pode ser um parâmetro importante para ajuste do método, podendo amenizar ou até suprimir o efeito de *shear locking*.

A principal desvantagem percebida no método é o excesso de parâmetros que podem ser ajustados dentro da formulação, dificultando muito a tarefa de quantificar a relevância de cada parâmetro para a obtenção de bons resultados.

Por fim, vale destacar que ajustes no tamanho do domínio de integração possibilitaram a obtenção de resultados precisos quando utilizada uma nuvem com poucos pontos para representar o problema.

Agradecimentos

Os autores agradecem o suporte financeiro fornecido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). O presente trabalho também foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

- [1] T. Zhu, J-D. Zang, S. N. Atluri, A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach, *Computational Mechanics*, vol. 21, n. 3, pp. 223-235, 1998.
- [2] S. N. Atluri, T. Zhu. A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, vol. 22, n. 2, pp. 117-127, 1998.
- [3] V. Leitão. A meshless method for Kirchhoff plate bending problems, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 52, n. 10, pp. 1107-1130, 2001.
- [4] G. Kirchhoff. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 40, n. 1, pp. 51-88, 1850.
- [5] S. Long, Q. Zhang. Analysis of thin plates by the local boundary integral equation (LBIE) method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 26, n. 8, pp. 707-718, 2002.
- [6] S. N. Atluri, S. Shen. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: a simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods, *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 3, pp. 11-51, 2002.
- [7] J. Soric, Q. Li, T. Jarak, S. N. Atluri. Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) formulation for analysis of thick plates. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, vol. 06, n. 4, pp. 349-357, 2004.
- [8] J. Sladek, V. Sladek, C. Zhang, J. Krivacek, P. H. Wen. Analysis of orthotropic thick plates by meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 67, n. 13, pp. 1830-1850, 2006.
- [9] J. Sladek, V. Sladek, C. Zhang. Local integral equation method for viscoelastic Reissner-Mindlin plates, *Computational Mechanics*, vol. 41, n. 6, pp. 759-768, 2008.
- [10] P. Xia, S. Y. Long, K. X. Wei. An analysis for the elasto-plastic problem of the moderately thick plate using the meshless local Petrov-Galerkin method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 35, n. 1, pp. 908-914, 2011.
- [11] R. D. Mindlin. Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, *Journal of Applied Mechanics, Transaction of American Society of Mechanical Engineers*, vol. 18, n. 1, pp. 31-38, 1951
- [12] D. H. Konda. *Análise de Pavimentos de Edifícios Através de uma Formulação do Método dos Elementos de Contorno Baseada nas Hipóteses de Reissner*, Msc dissertation, Universidade Estadual Paulista/Ilha Solteira, 2008.
- [13] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Journal of Applied Mechanics, Transaction of American Society of Mechanical Engineers*, vol. 12, n. 1, pp. A68-A77, 1945.

- [14] E. Reissner. On bending of elastic plates. *Quarterly of applied mathematics*, vol. 5, n. 1, pp. 55-68, 1947.
- [15] D. H. Konda, J. A. F. Santiago, J. C. F. Telles, J. P. F. Mello, E. G. A. Costa. A meshless Reissner plate bending procedure using local radial point interpolation with an efficient integration scheme, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 99, pp. 46-59, 2019.
- [16] L. Miers. Formulações Não Convencionais de Métodos do Tipo Meshless Baseados na Equação Integral de Contorno. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2007.
- [17] E. G. A. Costa. Aplicação dos métodos dos elementos de contorno e das soluções fundamentais usando funções de Green para problemas acústicos. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2013.
- [18] D. H. Konda, J. A. F. Santiago, J. C. F. Telles, 2017. *Análise de flexão de placas com consideração das hipóteses de Reissner através do método sem malha local de Petrov-Galerkin*. In: XXXVIII, IberianLatin American Congress on Computational Methods in Engineering, Florianopolis.
- [19] E. F. Fontes Júnior. Técnicas avançadas em métodos verdadeiramente sem malha com aplicações em problemas de elasticidade e mecânica da fratura via superposição da função de Green numérica. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2014.