

## **RELIABILITY MODELS FOR CRACK PROPAGATION ANALYSIS BY USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD**

**Luís Philipe Ribeiro Almeida**  
**Eduardo Toledo de Lima Junior**  
**João Carlos Cordeiro Barbirato**

*luis.almeida@ctec.ufal.br*

*limajunior@lccv.ufal.br*

*jccb@lccv.ufal.br*

*Laboratório de Computação Científica e Visualização, Universidade Federal de Alagoas  
Av. Lourival Melo Mota, s/n, Tabuleiro do Martins, 57072-900, Maceio, Alagoas, Brasil*

**Abstract.** This work presents a crack propagation analysis using an alternative boundary element method (BEM), in both deterministic and probabilistic approach. The fracture effects are captured using an initial stress field, this procedure leads to the appearance of a variable called dipole and responsible for representing the cohesive zone. Both geometry and fracture boundary are discretized using linear elements, the fracture elements are discontinuous. Regarding the structural reliability analysis, the boundary element formulation was coupled with the reliability algorithms for probabilistic analysis of crack problems. The fracture parameters are treated as random variables. First Order Reliability Method (FORM) is used in order to evaluate the reliability index and the failure probability for fractured problems. A comparative study between the Monte Carlo simulation technique are performed. Numerical examples are presented in order to show the accuracy of the BEM formulation in crack propagation analysis, as well in the assessment of structural reliability in two dimensional problems.

**Keywords:** Boundary Element Method, Cohesive Fracture Model, Structural Reliability

## 1 Introdução

A análise da propagação de fissuras é um campo de estudos de grande relevância, reconhecido pelo número de abordagens distintas que envolvem a caracterização do limite último de resistência dos sólidos. Neste campo, um conjunto de teorias que permitem a representação do comportamento mecânico de estruturas deformáveis com descontinuidades (fissuras) são contemplados. Para a análise de corpos fissurados, as soluções analíticas são restritas a um pequeno conjunto de problemas, com certas simplificações na geometria e/ou condições de contorno. Portanto, a utilização de métodos numéricos na representação mecânica de estruturas deve ser acoplada às teorias da mecânica da fratura para a análise de problemas gerais. O Método dos Elementos Finitos (MEF) destaca-se como um dos principais métodos na solução de problemas de fratura, caracterizando-se pela utilização de aproximações ao longo do domínio do problema por meio de funções polinomiais. No entanto, apesar do MEF clássico ser amplamente difundido no meio científico, não é eficaz na representação da concentração de tensões nas pontas das fissuras, uma vez que, para uma melhor caracterização desses campos singulares, uma malha muito refinada é requerida nessas regiões, conduzindo a um aumento do custo computacional da análise. Além disso, outra desvantagem surge na etapa de propagação, considerando-se que o processo de remalhamento deve ser realizado à medida que a fissura propaga.

Outro método amplamente utilizado na modelagem de problemas da mecânica da fratura é o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Uma das principais vantagens do MEC em relação aos métodos de domínio é o processo mais simplificado do remalhamento durante a propagação da fissura, uma vez que apenas o contorno da estrutura é discretizado e novos elementos são apenas adicionados às novas faces da fissura. Outra vantagem consiste na representação de problemas com elevados gradientes de tensão, como na análise de problemas da mecânica da fratura, que são naturalmente representados pelo MEC. Uma das primeiras técnicas baseadas na formulação do MEC para modelagem de estruturas com fissuras refere-se à utilização da técnica de sub-regiões para a análise do crescimento de fissuras entre dois contornos [1], nessa técnica, as faces da fissura se encontram em regiões distintas, e a compatibilidade entre deslocamentos e esforços entre regiões adjacentes é imposta na montagem do sistema algébrico. Outra importante alternativa é chamada de método de descontinuidade de deslocamentos, essa abordagem consiste na introdução de parâmetros desconhecidos através da diferença de deslocamentos entre as superfícies da fissura [2].

A introdução de uma equação integral de contorno em uma das superfícies da fissura deve-se a Watson [3] para elasticidade linear e Gray e Giles [4] para problemas de potencial. O avanço dessa estratégia em termos de equações integrais de deslocamentos e de forças de superfícies foi proporcionada por Hong e Chen [5], servindo como base teórica para o que hoje é conhecido como *Dual Boundary Element Method – DBEM*. Podem ser destacados alguns trabalhos: Portela *et al.* [6], Saleh e Aliabadi [7], Saleh [8].

Outra metodologia para análise do processo de fratura é baseada no emprego de um campo de tensões iniciais para a correção das tensões coesivas, sendo formulado a partir da definição de dipolos. Seguindo esta linha de pesquisa, deve-se destacar os trabalhos de Lopes e Venturini [9], Barbirato [10] e Oliveira e Leonel [11]. Esta formulação utiliza apenas três equações na solução do problema de propagação de fissuras para cada ponto fonte posicionado no elemento da fissura. Em comparação, o clássico MEC Dual utiliza quatro equações algébricas por ponto fonte.

Essas contribuições concentram-se na aplicação de modelos numéricos para análise da propagação de fissuras, considerando uma abordagem determinística do comportamento de sólidos planos. A incorporação de incertezas inerentes ao modelo mecânico torna-se um problema importante para o tratamento probabilístico em estruturas complexas influenciadas pela aleatoriedade de seus parâmetros, uma vez que a consideração das incertezas no desenvolvimento de modelos numéricos conduz a uma abordagem mais robusta da integridade estrutural do problema em análise.

A teoria da mecânica da fratura estabelece a relação entre o máximo carregamento atuante em um dado componente estrutural e o tamanho e posição da fissura pertencente a este componente [12]. Na análise a partir de modelos de confiabilidade, o processo de propagação da fissura é considerado como um fenômeno aleatório e a teoria da confiabilidade estrutural avalia como as incertezas presentes nas propriedades físicas, tamanho da fissura, configuração inicial da fissura e/ou carregamento atuantes

afetam diretamente a integridade da estrutura. Os trabalhos que se inserem neste campo, em sua maioria, lidam com as incertezas presentes nas propriedades dos materiais, condições de contorno, carregamentos e/ou tamanho das fissuras. Huang e Aliabadi [12], Leonel *et al.* [13] e Morse *et al.* [14] aplicaram com eficiência o MEC Dual na análise de problemas da mecânica da fratura com a consideração da aleatoriedade em alguns parâmetros da análise.

O presente trabalho se insere no contexto da mecânica da fratura com a consideração das incertezas presentes no fenômeno de propagação em domínios bidimensionais empregando-se a formulação não linear do MEC. O acoplamento entre modelos de confiabilidade e a formulação do MEC baseada em dipolos de tensão é proposto. O comportamento não linear é desenvolvido a partir da técnica de correções sucessivas do comportamento elástico linear por meio de algoritmos incrementais e iterativos, e o modelo coesivo é utilizado considerando-se um campo de tensões iniciais. Dois esquemas de acoplamento são considerados, o primeiro refere-se à utilização do método de transformação HLRFF/FORM na análise de confiabilidade, o segundo consiste na utilização da técnica de simulação de Monte Carlo. Exemplos são apresentados para demonstrar a eficácia do acoplamento proposto na análise considerando a aleatoriedade em parâmetros de fratura.

## 2 Conceitos da Mecânica da Fratura não linear

### 2.1 Modelo Coesivo

A taxa de energia total está diretamente associada com o trabalho necessário para a formação de uma nova trinca e ao trabalho relacionado a deformações permanentes (plastificação). Nos materiais dúcteis, essa taxa de energia liberada durante a plastificação é muito superior quando comparada com matérias frágeis e quase-frágeis. Um conceito importante na representação de modelos que incorporam a plastificação, é a região conhecida como zona de processos inelásticos (ZPI), é localizada a frente da fissura fictícia e é caracterizada por não responder elasticamente as solicitações externas, ou seja, uma zona de dissipação de energia capaz de transmitir esforço. Nessa região supõe-se a existência de uma tensão de fechamento (coesiva) uniforme de valor equivalente a tensão de escoamento, para representação da resistência residual do material. A intensidade das forças coesivas pode estar relacionada ao valor da abertura das faces da fissura por meio de leis coesivas. Existem diversas leis para este fim, entretanto serão aqui destacadas as três mais empregadas na modelagem de materiais quase-frágeis.

A primeira lei constitutiva é de natureza linear, Eq.(1), sendo a relação entre tensão x abertura de fissure dada como segue:

$$\begin{aligned} \sigma(w) &= f_t(1 - w / w_c) && \text{se } 0 \leq w \leq w_c \\ \sigma(w) &= 0 && \text{se } w_c \leq w \end{aligned} \quad (1)$$

A segunda lei constitutiva é a relação bilinear, Eq. (2).

$$\begin{aligned} \sigma(w) &= f_t - \left( \frac{f_t - f_t''}{w''} \right) w && \text{se } 0 \leq w \leq w'' \\ \sigma(w) &= \frac{f_t''}{w'' - w_c} w + f_t'' \left( 1 - \frac{w''}{w'' - w_c} \right) && \text{se } w'' \leq w \leq w' \\ \sigma(w) &= 0 && \text{se } w' \leq w \end{aligned} \quad (2)$$

$$f_t'' = \frac{f_t}{3}$$

$$w'' = 0,8 \frac{G_f}{f_t}$$

$$w_c = 3,6 \frac{G_f}{f_t}$$

Outra lei amplamente utilizada para modelar a zona coesiva é a relação exponencial, Eq. (3).

$$\sigma(w) = f_t \cdot e^{-(f_t/G_t)w} \quad \text{se } w \geq 0 \quad (3)$$

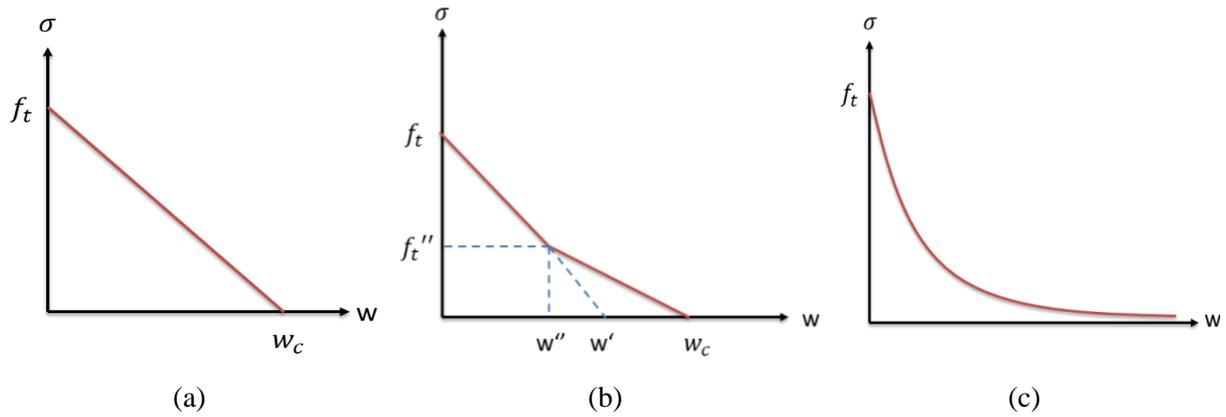


Figura 1. Leis coesivas linear (a) bilinear (b) exponencial (c).

### 3 Formulação do MEC para problema de tensões iniciais

Uma das vantagens de utilizar o MEC diz respeito a sua capacidade em capturar com precisão pontos com alta concentração de tensões, como é o caso de corpos sujeitos ao fraturamento. O presente trabalho se utiliza da formulação do MEC para a análise de fissuras coesivas a partir da imposição de campos de tensões iniciais e o surgimento da variável denominada como dipolo, responsável por modelar os efeitos de separação da estrutura.

A representação integral do campo de deslocamentos considerando tensões iniciais  $\sigma_{jk}^0$  é desenvolvida com base no trabalho de Brebbia [15], excluindo-se o termo de forças de volume, tendo a equação integral a seguinte forma:

$$c_{ik} u_k + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega_c} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk}^0 d\Omega_c \quad (4)$$

na qual  $p_{ik}^*$ ,  $u_{ik}^*$  e  $\varepsilon_{ijk}^*$  representam os valores da solução fundamental de Kelvin para forças de superfície, deslocamentos e deformações respectivamente e  $\Omega_c$  a parte do domínio onde o campo de tensões iniciais atua. Considerando a região  $\Omega_c$  definida na Fig. 2, estreita e limitada pelo contorno  $\Gamma_c$ , é possível estabelecer que  $\Gamma_c$  é composto por  $\Gamma_c^1$  e  $\Gamma_c^2$ .

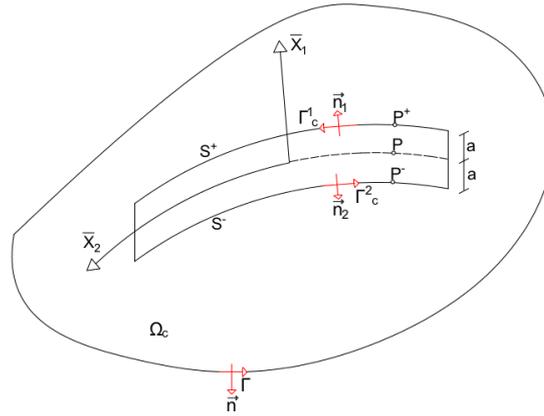


Figura 2. Sub-região sujeita a tensões iniciais.

Pode-se então reescrever a parcela que contém os termos das tensões iniciais na Eq.(5), integrando-se por partes e sabendo-se que  $p_j^{01} = \sigma_{jk}^0 n_k$ .

$$\int_{\Omega_c} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk}^0 d\Omega_c = \int_{\Omega_c} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k} \sigma_{jk}^0 d\Omega_c = \int_{\Gamma_c} u_{ij}^* p_j^{01} d\Gamma_c - \int_{\Omega_c} u_{ij}^* \sigma_{jk,k}^0 d\Omega_c \quad (5)$$

Sabendo-se que  $a$  é a semi-largura da faixa estreita que representa a fissura, com uma dimensão muito menor que a do seu comprimento, e que as variáveis  $S^+$  e  $S^-$  definem as superfícies da sub-região definidas tomando-se um ponto médio  $S$ , pode-se então reescrever a Eq.(5) como,

$$\int_{\Gamma_c} u_{ij}^*(p, S) p_j^{01}(S) d\Gamma_c = \int_{\Gamma_c^1} u_{ij}^*(p, S^-) p_j^{01}(S^-) d\Gamma_c^1 + \int_{\Gamma_c^2} u_{ij}^*(p, S^+) p_j^{01}(S^+) d\Gamma_c^2 \quad (6)$$

Assumindo-se que as superfícies estão suficientemente próximas e que o eixo coordenado local  $\bar{x}_1$  é normal ao elemento de fissura, pode-se determinar as seguintes expressões tomando-se os dois primeiros termos da expansão de Taylor para aproximação de  $u_{ij}^*(p, S^+)$  e  $u_{ij}^*(p, S^-)$ :

$$\begin{aligned} u_{ij}^*(p, S^+) &= u_{ij}^*(p, S) + \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_1}(p, S)a \\ u_{ij}^*(p, S^-) &= u_{ij}^*(p, S) - \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_1}(p, S)a \end{aligned} \quad (7)$$

Para que a sub-região se torne uma linha ( $\bar{\Gamma}$ ), deve-se fazer com que a largura  $a$  tenda a zero, desta maneira, os pontos  $S^-$ ,  $S^+$  e  $S$  se confundem, e além,  $d\Gamma_c^1 = d\bar{\Gamma}$ ,  $d\Gamma_c^2 = -d\bar{\Gamma}$ ,  $p = P$ . Substituindo-se a Eq. (7) em (6), chega-se a:

$$\int_{\Gamma_c} u_{ij}^*(p, S) p_j^{01}(S) d\Gamma_c = \int_{\bar{\Gamma}} 2a \frac{\partial u_{ij}^*(P, S)}{\partial x_1} p_j^{01}(S) d(S) \bar{\Gamma} \quad (8)$$

na qual o termo  $p_j^{01}$  representa o dipolo de forças que introduz um campo de tensões no meio contínuo. A última parcela da Eq.(5) ainda contém uma integral de domínio a ser desenvolvida, para isto, considera-se que a componente de tensão  $\sigma_{jk}^0$  é constante ao longo da direção  $\bar{x}_1$ , uma vez que a dimensão ( $2a$ ) nessa direção é muito menor. Por fim, a componente de tensão  $\sigma_{jk}^0$  é escrita como,

$$\sigma_{jk,k}^0 = \frac{\frac{\partial \sigma_{j1}^0}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{j1}^0}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial \sigma_{j2}^0}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{j2}^0}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1}} \quad (9)$$

ou seja,

$$\sigma_{jk,k}^0 = \frac{\partial}{\partial x_2} (\sigma_{jk}^0 m_k) \quad (10)$$

Levando-se em conta que na direção normal não é considerada a variação da componente de tensão, obtém-se a Eq.(11).

$$\int_{\Omega_c} u_{ij}^* \sigma_{jk,k}^0 d\Omega_c = \int_{\Omega_c} u_{ij}^* \frac{\partial (\sigma_{jk}^0 m_k)}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_{x_2} u_{ij}^* \frac{\partial (\sigma_{jk}^0 m_k)}{\partial x_2} 2a dx_2 \quad (11)$$

a qual, integrando-se por partes, resulta na equação a seguir.

$$\int_{\Omega_c} u_{ij}^* \sigma_{jk,k}^0 d\Omega_c = u_{ij}^* \sigma_{jk}^0 m_k 2a (\bar{x}_2^2 - \bar{x}_1^2) - \int_{x_2} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_2} \sigma_{jk}^0 m_k 2a dx_2 \quad (12)$$

Levando-se em conta que  $p_j^{02} = \sigma_{jk}^0 m_k$ , e que o termo independente da Eq. (12) anula-se quando a abertura da fissura tende a zero (quando a região tende a uma linha,  $\bar{\Gamma}$ ), obtém-se:

$$\int_{\Omega_c} u_{ij}^* \sigma_{jk,k}^0 d\Omega_c = - \int_{x_2} 2a \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_2} p_j^{02} dx_2 = - \int_{\bar{\Gamma}} 2a \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_2} p_j^{02} d\bar{\Gamma} \quad (13)$$

sendo o termo  $2ap_j^{02}$  associado a um dipolo de forças, de forma que a integral que contém a parcela das tensões iniciais, Eq. (4), torna-se definida, uma vez que os termos que a compõem foram todos determinados,

$$\int_{\Omega_c} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk}^0 d\Omega_c = \int_{\bar{\Gamma}} 2a \frac{\partial u_{ij}^*(P,S)}{\partial x_1} p_j^{01}(S) d\bar{\Gamma} + \int_{\bar{\Gamma}} 2a \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_2} p_j^{02} d\bar{\Gamma} = \int_{\bar{\Gamma}} 2a \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k} p_j^{0k} d\bar{\Gamma} \quad (14)$$

As grandezas dipolo podem ser definidas considerando-se os valores dos dipolos finitos equivalentes a um campo de tensões infinitas, portanto:

$$\begin{aligned} 2ap_j^1 &= q_j^1 \\ 2ap_j^2 &= q_j^2 \end{aligned} \quad (15)$$

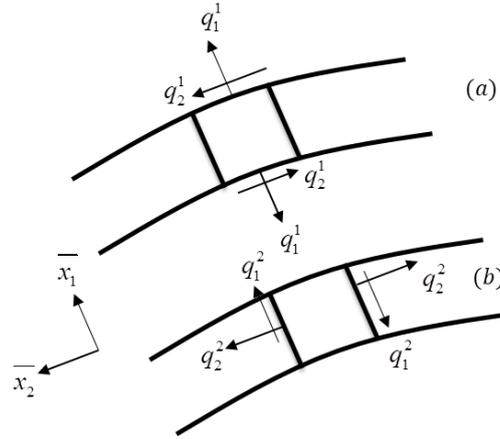


Figura 3. Representação local dos quadripolos (a)  $q^1$  (composto pelo dipolo  $q_1^1$  e  $q_2^1$ ) e (b)  $q^2$  (composto pelo dipolo  $q_1^2$  e  $q_2^2$ ).

A aplicação de um dipolo é responsável por caracterizar uma descontinuidade em deslocamentos, contudo para assegurar o equilíbrio, os dipolos devem ser aplicados em conjunto formando um quadripolo, de modo que:

$$q_2^2 = \frac{\nu}{(1-\nu)} q_1^1 \quad (16)$$

A Eq. (4) pode ser simplificada considerando-se que  $\bar{x}_1 = x_1$ ,  $\bar{x}_2 = x_2$  (fratura vertical ascendente) e sabendo-se que  $\int_{\Omega_c} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk}^0 d\Omega = \int_{\Gamma_c} G_{ij}^l q_j^l d\Gamma$ ,

$$c_{ik} u_k + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} G_{ij}^k q_j^k d\bar{\Gamma} \quad (17)$$

na qual,

$$G_{ij}^k = \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k} = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} \left[ 3 - 4\nu \left( r_{,k} \delta_{ij} - r_{,j} \delta_{ik} - r_{,k} \delta_{jk} \right) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \quad (18)$$

A equação integral que fornece o estado de tensão em pontos internos é obtida por meio da representação integral para deslocamentos, Eq. (17), diferenciando-a e substituindo na lei de Hooke generalizada, chega-se à Eq. (19):

$$\sigma_{im} = -\int_{\Gamma} S_{imk} u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{imk} p_k d\Gamma + \int_{\Gamma_c} G_{ij}^{ml} q_j^l d\Gamma_c + g_{ij}^{ml} [\sigma_{jl}(p)] \quad (19)$$

sendo,

$$g_{ij}^{ml}(p) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sigma_{im}^0(p) \end{Bmatrix} \quad (20)$$

A partir da Eq. (17), os deslocamentos para quaisquer pontos no domínio para uma dada distribuição de quadripolos podem ser obtidos, e para tanto, a representação da abertura normal da fissura pode ser realizada. Essa abertura é tratada como uma diferença de deslocamentos entre dois pontos ( $P^+$  e  $P^-$ ) situados em faces opostas, sobre os contornos  $\Gamma_c^1$  e  $\Gamma_c^2$  respectivamente. Levando-se em consideração que a Eq. (17) contém uma singularidade  $r^{-1}$ , a diferença de deslocamentos entre os dois pontos deve ser avaliada a partir de uma análise limite, esse procedimento permite a obtenção de termos independentes dados em função de dipolos. A diferença de deslocamentos entre os dois pontos

pertencentes a faces opostas fornece a abertura de fissura, o que conduz ao resultado:

$$\Delta w = \begin{Bmatrix} \Delta w_1 \\ \Delta w_2 \end{Bmatrix} = \left| u^{P^+} - u^{P^-} \right| = \begin{bmatrix} \left( \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \end{Bmatrix}^P \quad (21)$$

### 3.1 Discretizações

Com a definição da equação integral para tensões, Eq. (19), e da contribuição dos dipolos na abertura das fissuras, Eq. (21), faz-se necessária a transformação para a forma matricial. O campo de distribuição de dipolos não é conhecido, e semelhante ao que é realizado com deslocamentos e forças de superfície, esses também podem ser interpolados ao longo dos elementos. Adotam-se elementos isoparamétricos lineares descontínuos para aproximação dos quadripolos ao logo dos elementos de fissura, assumindo-se:

$$HU = GP + KQ \quad (22)$$

A matriz [K] representa matematicamente os efeitos das forças coesivas, [Q] o vetor com os quadripolos aproximados, e as matrizes [H] e [G] são os termos usuais do MEC. Faz-se a troca de colunas de modo similar à formulação linear, com a finalidade de que as incógnitas sejam representadas em um único vetor e os valores prescritos em outro. Por fim, a solução do sistema de equações algébricas é definida,

$$X = M + RQ \quad (23)$$

sendo,

$$\begin{aligned} M &= A^{-1}F \\ R &= A^{-1}K \end{aligned} \quad (24)$$

A Equação (23) pode ser usada na forma incremental, para o cálculo dos efeitos dos incrementos de carga dados por M ou  $\Delta M$ , ou incrementos de dipolos,  $\Delta Q$ , para correção do nível de tensão sobre a superfície da fratura. A Equação (19) pode ser transformada de modo semelhante ao que foi realizado para a determinação dos deslocamentos,

$$\sigma = -H'U + G'P + K'Q \quad (25)$$

A Equação (25) também pode ser escrita separando-se em duas parcelas, uma elástica e outra para correção do comportamento elástico pelo emprego de dipolos. Após a reordenação dos termos, a equação que relaciona o campo de tensões para uma dada distribuição de dipolos pode ser definida,

$$\sigma = N + SQ \quad (26)$$

sendo,

$$\begin{aligned} N &= F' - A'M \\ S &= K' - A'R \end{aligned} \quad (27)$$

## 4 Conceitos em Confiabilidade Estrutural

A utilização de modelos de confiabilidade objetiva avaliar a segurança de uma estrutura, o que consiste na estimativa de violação de um certo modo potencial de falha [16]. Na análise, cada critério pode ser entendido como evento estatístico e suas consequências como cenários de falha. A caracterização das variáveis aleatórias (v.a.), se trata de uma etapa crucial na análise confiabilística, sendo feita a partir de técnicas de inferência estatística.

A avaliação da probabilidade é realizada a partir da análise de uma função de falha, denominada  $G(X)$ , onde  $X$  é um vetor de variáveis aleatórias consideradas na análise. Durante a avaliação de segurança de uma estrutura, quantifica-se a ocorrência de falhas, ou seja, a probabilidade de que o vetor de v.a. esteja contido na região de falha  $\Omega_f$ :

$$\begin{cases} G(X) > 0 \rightarrow \textit{Seguro} \\ G(X) \leq 0 \rightarrow \textit{Falha} \end{cases} \quad (28)$$

A probabilidade de falha é obtida integrando-se  $f_X(x)$  (função conjunta de densidade de probabilidade das variáveis aleatórias do problema) sobre o domínio de falha.

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_X(x) dx \quad (29)$$

A integral (29) costuma ser de difícil solução analítica, uma vez que envolve a avaliação de uma integral n-dimensional em um domínio complexo. Assim, faz-se necessário o uso de outros métodos capazes de avaliar a probabilidade de falha, como o tradicional método de simulação Monte Carlo e o método de Confiabilidade de Primeira Ordem – FORM.

#### 4.1 Método de Simulação de Monte Carlo

Um dos principais objetivos da confiabilidade refere-se a avaliação da integral (29), o que na prática depende da quantidade de variáveis aleatórias dependentes e com distribuições não normais. Por este motivo, o método de simulação de Monte Carlo surge como uma técnica alternativa, envolvendo exaustivas repetições do problema em estudo, utilizando em cada processo uma realização particular de variáveis aleatórias do problema. Estas repetições fornecem um conjunto de soluções, uma para cada realização, representando a saída simulada do problema. Beck [17] retrata o método de Monte Carlo como uma técnica que envolve simular artificialmente um grande número de elementos e observar o resultado encontrado. No caso da análise da confiabilidade em estruturas, isto significa do modo mais simples, que cada variável aleatória  $X_i$  pode fornecer aleatoriamente um determinado valor. Basicamente, a técnica consiste em produzir  $N$  eventos aleatórios a serem avaliados na equação do estado limite  $G(X)$ , assim, a probabilidade de falha é estimada como a razão entre o número de eventos de falha ( $N_f$ ) e o número total de eventos ( $N$ ),

$$P_f = \frac{N_f}{N} \quad (30)$$

A precisão do método está relacionada com o tamanho da amostragem, e pode ser avaliado pelo coeficiente de variação ( $COV$ ) da probabilidade de falha. Com o objetivo de obter uniformidade na resposta, para diferentes execuções do método, estima-se um número de cenários mínimos para que uma probabilidade de falha  $P_f$  seja determinada com um almejado coeficiente de variação  $\delta$ ,

$$N_{\min} = \frac{1}{\delta^2} \frac{1 - P_f}{P_f} \quad (31)$$

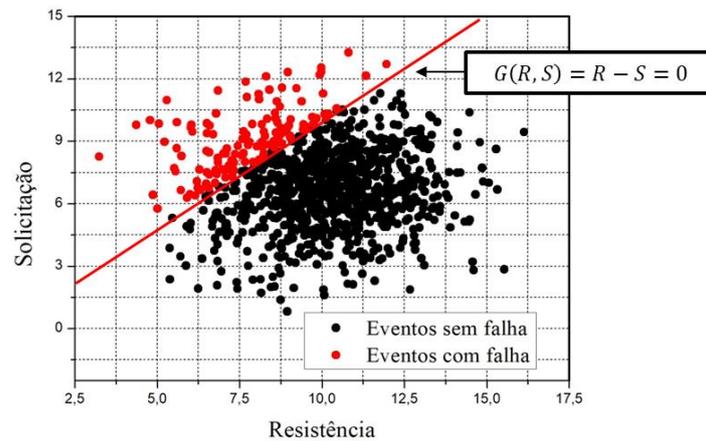


Figura 4. Exemplo ilustrativo da simulação de Monte Carlo.

#### 4.2 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem – FORM

O método de confiabilidade de primeira ordem ou FORM (First Order Reliability Method), fornece, por meio da linearização da função estado limite em torno do ponto de projeto no espaço padrão, uma estimativa de probabilidade de ocorrência de falha. A linearização se faz através de um hiperplano tangente à superfície de falha no ponto de projeto, a qual é seguida pela minimização da distância entre o ponto sobre o hiperplano e a origem do sistema. O chamado ponto de projeto consiste na combinação dos valores das v.a. que mais provavelmente levam à falha do problema em estudo.

O grande diferencial desse método está relacionado com a capacidade em representar fielmente as informações estatísticas das variáveis aleatórias que representam o problema, podendo lidar com quaisquer distribuições, inclusive considerando correlação entre variáveis. Em síntese, o FORM é baseado na definição geométrica do chamado índice de confiabilidade, o qual tem interpretação oposta à da probabilidade de falha. A definição deste índice é feita no espaço das variáveis normais padronizadas independentes.

Assim, é necessária a transformação de um dado vetor  $X$ , que contém as variáveis aleatórias do problema, em um vetor de variáveis aleatórias com distribuição normal padrão,  $Y$ . A transformação de variáveis não normais em suas normais equivalentes é classicamente feita segundo o princípio da aproximação normal, devendo-se fazer uma transformação intermediária caso as variáveis aleatórias sejam correlacionadas. Para maiores detalhes, vide [17].

#### 4.3 Algoritmo HLRF

Low e Tang [18] apresentaram uma interpretação alternativa do índice de confiabilidade de Hasofer-Lind baseada na perspectiva de uma elipsóide expandida no espaço original das variáveis aleatórias,

$$\beta = \min_{x \in F} \sqrt{\left[ \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \right]^T [C]^{-1} \left[ \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \right]} \quad (32)$$

sendo  $X$  o vetor com todas as  $n$  variáveis aleatórias  $X_i$  envolvidas no problema,  $C$  a matriz de correlação,  $F$  o domínio de falha na qual a função  $G(X) \leq 0$ ,  $\sigma_{X_i}$  e  $\mu_{X_i}$  o desvio padrão e média da variável aleatória  $X_i$ , respectivamente. O índice de Hasofer-Lind,  $\beta$ , representa a distância entre o ponto médio e o mais próximo ponto na equação do estado limite, o qual é referido como ponto de projeto. A minimização da Eq. (32) pode ser obtida usando um método padrão de otimização não linear sujeito à restrição  $G(x) = 0$ , o qual é tradicionalmente resolvido através do algoritmo de

Hassofer-Lind [19] e de Rackwitz e Fiessler [20], conhecido como HLRF. Segundo Beck [17], a fórmula de recorrência do algoritmo HLRF é fundamentada na aproximação de um ponto  $X$  à superfície  $G(X) = 0$  e na perpendicularização entre o vetor  $X$  e a tangente à superfície no ponto. Beck [17] apresentam o algoritmo de otimização HLRF como,

$$y_{k+1} = - \frac{G(y_k)}{\|\nabla G(y_k)\|} \left[ \beta_k + \frac{G(y_k)}{\|\Delta G(y_k)\|} \right] \quad (33)$$

## 5 Acoplamento entre o MEC e algoritmos de Confiabilidade

No acoplamento com uma rotina de confiabilidade do tipo FORM, a equação de estado limite permanece implícita e expressa através de um modelo mecânico, desta forma, os gradientes da função de estado limite, utilizados na estimativa da probabilidade de falha do problema podem ser calculados numericamente por meio da Eq.(34), através de consultas ao modelo numérico.

Desta forma, as derivadas da função de falha podem ser calculadas numericamente por diferenças finitas, para cada chamada do modelo mecânico do MEC. Para este trabalho, estimou-se o passo  $\Delta$  como 0,1% do valor médio da variável aleatória ( $X$ ).

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_1} &= \lim_{\Delta_{a_1}} \frac{G(X_1 + \Delta_{X_1}, X_2, \dots, X_n) - G(X_1 - \Delta_{X_1}, X_2, \dots, X_n)}{2\Delta_{X_1}} \\ \frac{\partial G(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_2} &= \lim_{\Delta_{a_2}} \frac{G(X_1, X_2 + \Delta_{X_2}, \dots, X_n) - G(X_1, X_2 - \Delta_{X_2}, \dots, X_n)}{2\Delta_{X_2}} \\ \frac{\partial G(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_n} &= \lim_{\Delta_{a_n}} \frac{G(X_1, X_2, \dots, X_n + \Delta_{X_n}) - G(X_1, X_2, \dots, X_n - \Delta_{X_n})}{2\Delta_{X_n}} \end{aligned} \quad (34)$$

### 5.1 Acoplamento entre a formulação não linear do MEC e o algoritmo HLRF/FORM

O modelo de confiabilidade baseado no acoplamento entre o modelo mecânico e o FORM quase sempre apresenta soluções estáveis com boa convergência, além de apresentar esses resultados em um menor número de chamadas que o modelo envolvendo o método de Monte Carlo. Destaca-se pra o caso em que o campo de distribuição aleatório esteja presente apenas nos parâmetros de fratura. Para este caso específico, a consulta ao modelo elástico linear ocorrerá uma única vez, com a obtenção dos parâmetros mecânicos necessários e as correções do comportamento elástico linear, realizado para cada chamada do modelo por meio de algoritmos incrementais iterativos, Fig. 5.

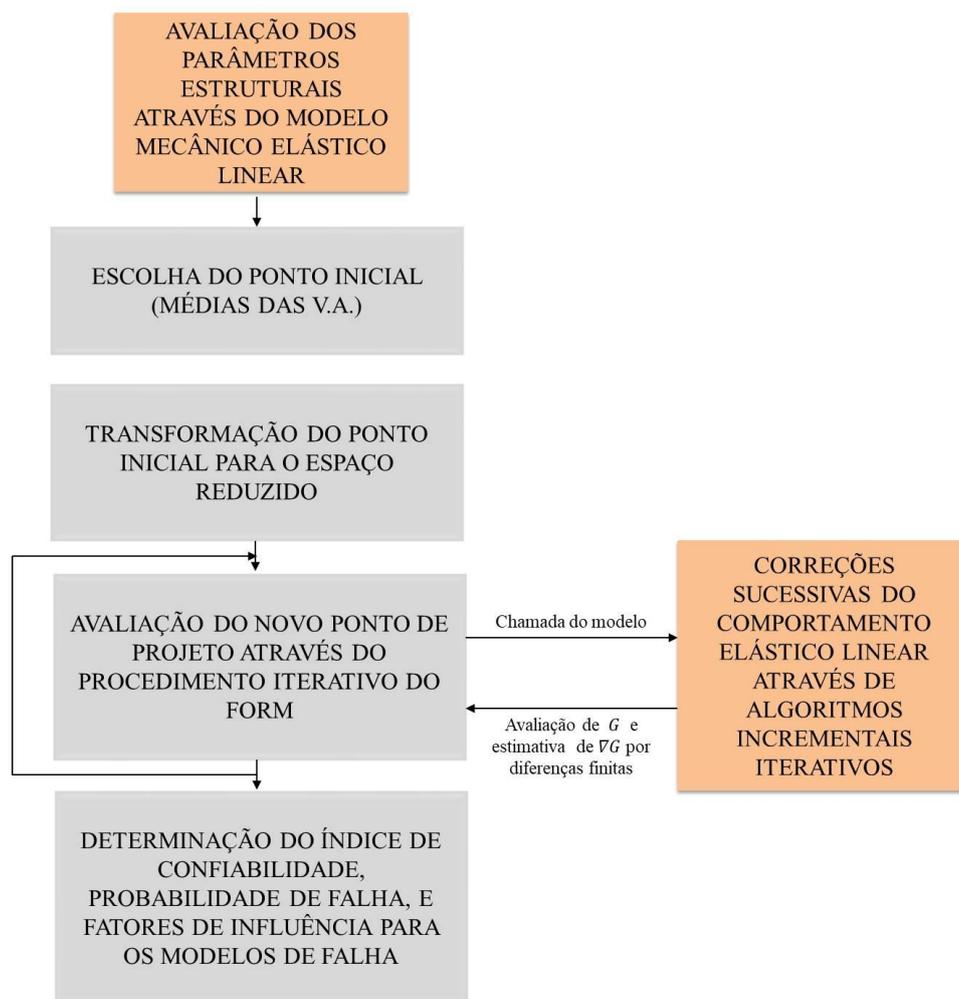


Figura 5. Estratégia de acoplamento direto entre o modelo de fratura coesiva e o FORM.

Com relação ao caso da simulação de Monte Carlo, o acoplamento é mais intuitivo, consistindo na execução do modelo numérico a cada simulação do método.

## 6 Aplicações

Serão apresentadas aplicações para validação da implementação não linear do MEC considerando a aleatoriedade de parâmetros relacionados ao fraturamento. O exemplo 1 tem o objetivo de validar o modelo coesivo baseado na formulação do MEC em uma abordagem determinística. No exemplo 2, objetiva-se avaliar o acoplamento do MEC não linear com algoritmos de confiabilidade. O primeiro exemplo foi escolhido devido ao fato de possuir equacionamento analítico com base na teoria da elasticidade e da própria definição das leis coesivas em si. Já no exemplo 2, o resultado experimental pode ser encontrado em Leonel e Venturini [21].

### 6.1 Exemplo 1: Chapa tracionada

Para fins de validação da implementação proposta, seja uma chapa retangular de concreto com dimensões (m)  $4 \times 1$ , engastada na extremidade esquerda e com deslocamento horizontal prescrito no valor de  $0,02 \text{ m}$  na extremidade direita. As propriedades físicas adotadas foram, módulo de elasticidade ( $E = 30 \text{ GPa}$ ), coeficiente de Poisson nulo, resistência à tração ( $f_t = 3 \text{ MPa}$ ), abertura máxima de fissura ( $w_c = 0,01 \text{ m}$ ) e energia de fraturamento ( $G_f = 0,015 \text{ MN/m}$ ). A discretização

contém 12 elementos de contorno lineares com 6 nós duplos totalizando 18 nós de contorno.

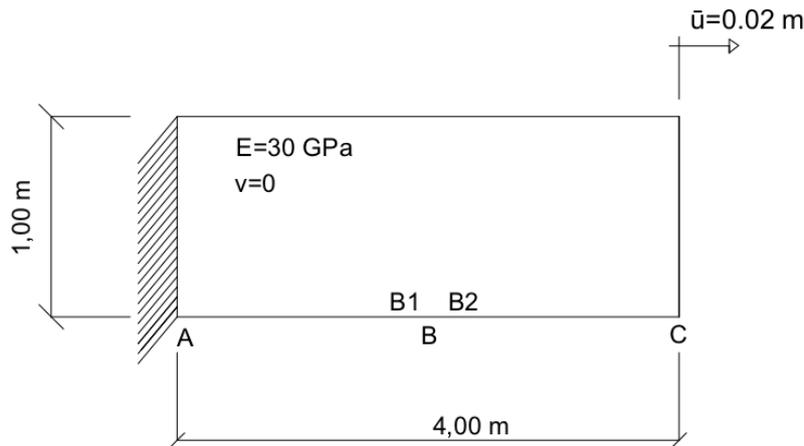


Figura 6. Chapa tracionada.

Na Figura 7, relaciona-se a força e o deslocamento horizontal para o ponto C, fixado no lado direito do problema. Inicialmente, a curva tem um comportamento linear até o momento que atinge o valor limite à tração, surge então o primeiro elemento de fissura. A partir desse momento, inicia-se o processo de abertura da fissura através do surgimento das tensões coesivas que obedecem a lei estabelecida. Para o caso da lei coesiva linear, percebe-se que a partir do momento que a abertura da fissura atinge o seu valor limite ( $w_c = 0,01\text{ m}$ ) o gráfico não mais apresenta um comportamento descendente, sendo caracterizado por uma reta constante ocasionada pelo término da transferência de tensão para a abertura da fissura. O término da etapa descendente da Fig. 7 caracteriza a total separação das faces opostas representantes da fissura, e a partir deste momento, uma nova fissura visível provocará a consequente separação do sólido em duas partes independentes. No caso da lei Bilinear, uma mudança da inclinação surge no ponto  $w' = 0,004\text{ m}$ , e o término do comportamento descendente acontece em  $w_c = 0,018\text{ m}$ , indo de acordo com o critério coesivo definido na seção 2.1, Eq.(2). O modelo exponencial caracteriza-se por se assemelhar ao bilinear no início do trecho descendente, passando a responder de forma diferente deste, inicialmente com valores de força maiores e depois menores (para valores aproximadamente maiores que  $w = 0,007\text{ m}$ ).

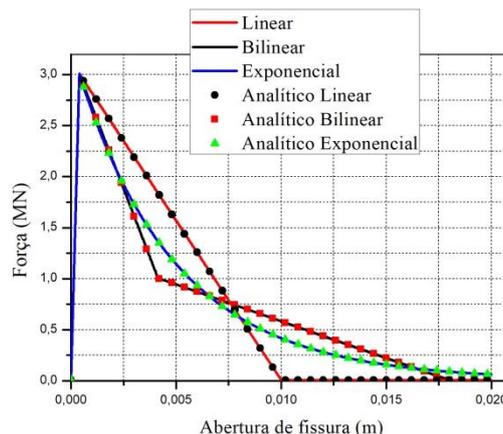


Figura 7. Força vs Deslocamento para as três leis coesivas.

Na Figura 8a é apresentada a relação entre tensão coesiva e abertura do primeiro elemento de fissura para o primeiro ponto de colocação. Destaca-se a variação das tensões coesivas durante o processo de abertura de fissura, observando-se que cada curva conseguiu obedecer ao critério coesivo estabelecido. Coerentemente com o modelo empregado, a fissura surge com a interceptação no eixo

( $0; f_t$ ) e a propagação tem fim com o término da transferência de tensões coesivas, ou seja, quando as curvas interceptam o eixo das abscissas. Na Figura 8b, o ponto localizado na porção mais à direita da estrutura (B2) apresenta maiores deslocamentos em relação ao ponto situado mais à esquerda (B1), que tende a obter valores próximos a zero com o aumento do passo de carga.

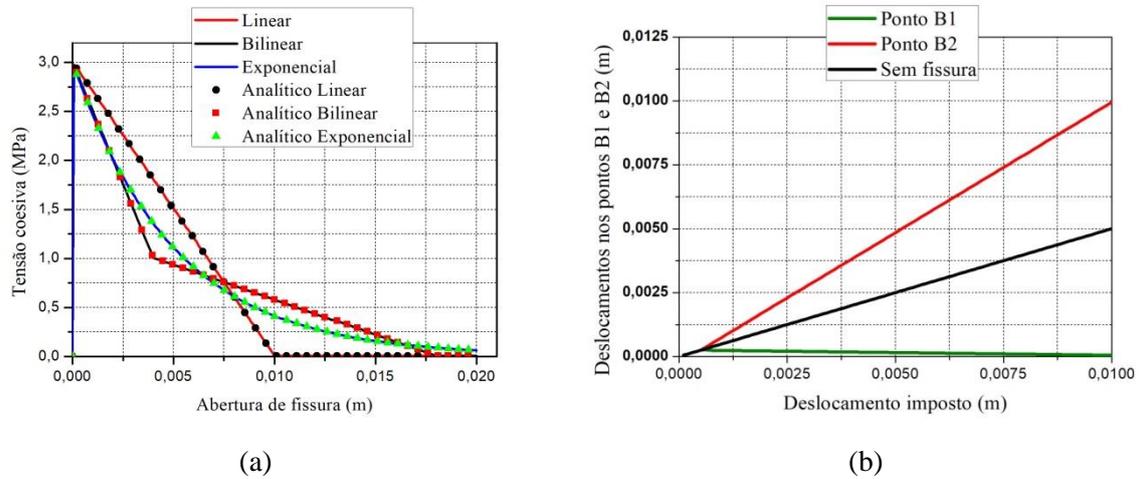


Figura 8. Tensão coesiva (MPa) vs Abertura de fissura (m) para as três leis coesivas (a) deslocamento (m) nos pontos B1 e B2.

A natureza simples deste exemplo, Fig. 6, permite a verificação da resposta numérica com base na própria definição dos modelos coesivos em si. Os resultados obtidos nas Figs. 7 e 8a, foram comparadas com a resposta analítica considerando as três leis coesivas citadas na seção 2.1., apresentando resultados numéricos satisfatórios. A análise aqui apresentada pode ser encontrada no trabalho de Oliveira e Leonel [11], com respostas semelhantes ao estudo aqui realizado.

## 6.2 Exemplo 2: Viga sob flexão em três pontos submetida a modo I

### Etapa 1: Abordagem determinística

No segundo exemplo, é apresentada a análise de uma viga de concreto com entalhe inicial submetida a um ensaio de flexão em três pontos. Com relação às propriedades do material: Módulo de Elasticidade longitudinal  $E = 30000 \text{ MPa}$ , coeficiente de Poisson,  $\nu = 0,15$ , resistência à tração  $f_t = 3 \text{ MPa}$  e energia de fraturamento  $G = 75 \text{ N/m}$ . As propriedades geométricas são apresentadas na Fig. 9.

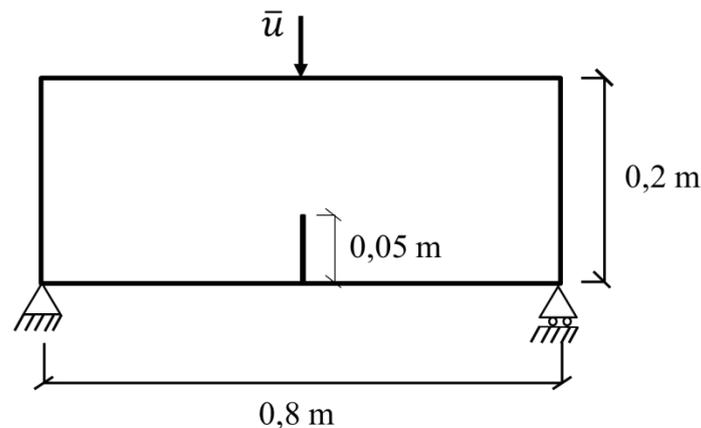


Figura 9. Geometria da viga sob flexão em três pontos

A malha do contorno constitui-se de cerca de 250 elementos lineares, com 2 elementos lineares descontínuos na extremidade do entalhe, para propiciar a abertura. Na Fig. 10 é apresentado um gráfico de carga *vs* deslocamento da estrutura, medidos no ponto de aplicação da carga e na parte superior do entalhe, respectivamente. Consideram-se as três leis coesivas (linear, bilinear e exponencial), além do resultado experimental. É notável a boa resposta numérica para a lei coesiva linear, obtendo-se uma boa aproximação para a carga de pico.

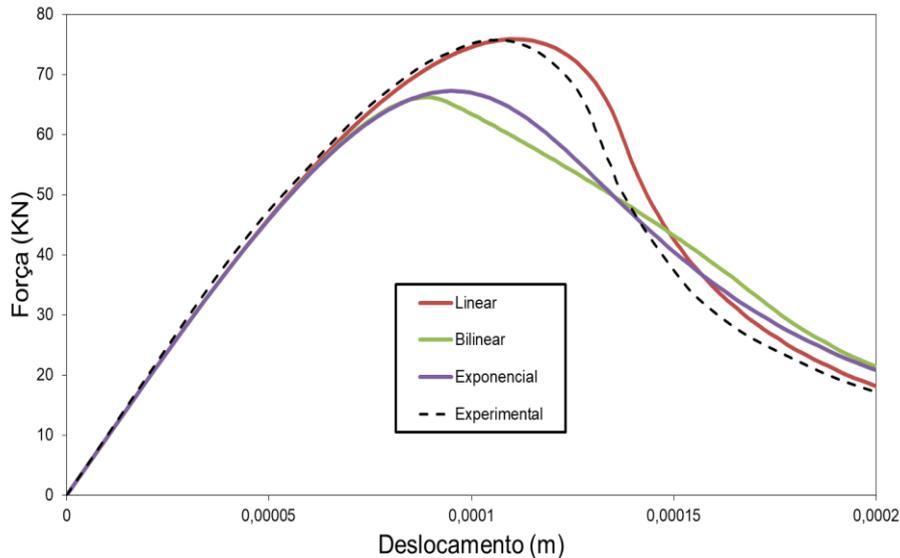


Figura 10. Carga *vs* deslocamento da estrutura.

Na Figura 11, é ilustrado o processo de propagação da fissura partindo-se do entalhe central até a borda superior, em direção ao ponto de aplicação do carregamento. Observa-se que a estrutura fica muito próxima ao colapso, entretanto, não ocorrendo a separação da estrutura em duas partes.

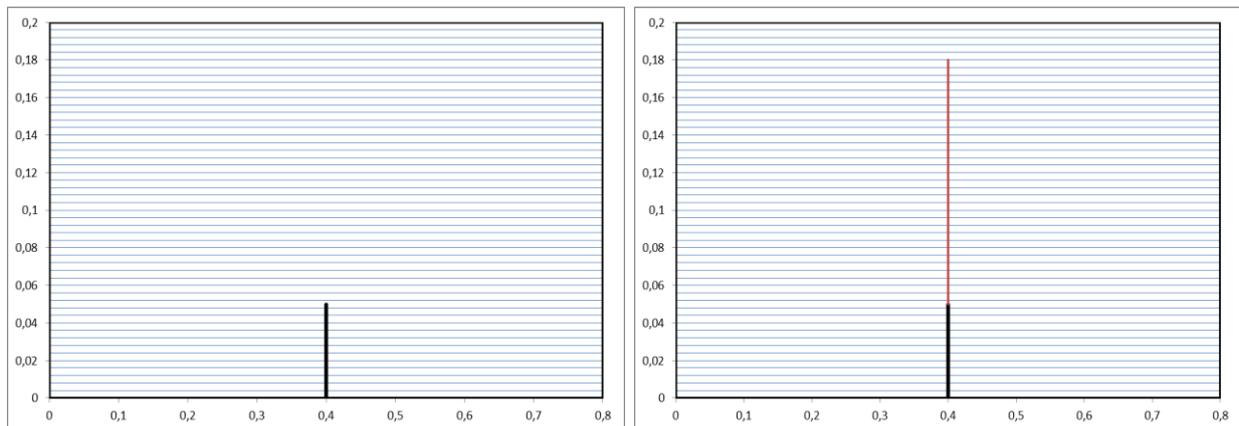


Figura 11. Evolução da fissura coesiva.

## Etapa 2: Abordagem aleatória

O problema apresentado na Fig. 9 é revisitado, no sentido de ilustrar a influência da aleatoriedade dos parâmetros de fratura envolvidos, vide Tabela 1. Os parâmetros relacionados a resistência à tração e energia ao fraturamento foram modelados considerando distribuição gaussiana, isto implica que o parâmetro que define a abertura crítica de fissura é também representado por um campo de distribuição aleatória. Considera-se as três leis coesivas, e dessa vez, realiza-se um estudo

confiabilístico definido pela seguinte função de falha, Eq.(35):

$$G_1 = F_d - F_p \quad (35)$$

em que  $F_d$  é a carga de projeto definida como 87 KN, e  $F_p$  a carga de pico estimada numericamente para a lei coesiva adotada.

Tabela 1. Dados estatísticos de parâmetros da análise

	Média	Coefficiente de variação	Tipo de distribuição
Resistência a tração, $f_t$ (MPa)	3	10%	Normal
Energia de fraturamento, $G_f$ (N/m)	75	10%	Normal

Na Tabela 2, é apresentado um estudo da probabilidade de violação do modo de falha  $G_1$ , Eq. (35) para a lei coesiva linear, uma vez que esta obteve valores mais próximos do experimental, Fig. 10. É perceptível que a análise baseada no modelo de confiabilidade HLRf/FORM mostra-se coerente com o resultado apresentado pelo método de Monte Carlo, cujo número de simulações foi adotado de forma a garantir um coeficiente de variação não maior do que 5 % para a probabilidade de falha estimada, de acordo com a Eq. (31). Ressalta-se, que este exemplo é meramente ilustrativo, apresentando significativos valores de probabilidade de falha associados ao alto coeficiente de variação adotado.

Tabela 2. Análise de confiabilidade para o Exemplo 2 considerando variáveis gaussianas.

Lei coesiva	$\beta$ (FORM)	$\beta$ (Monte Carlo)	P.f. (FORM)	P.f. (Monte Carlo)	Número de simulações
Linear	2,1502	2,0829	0,0158	0,0186	24916

Na Tabela 3 são apresentados parâmetros de confiabilidade relacionados a pontos de projeto e fatores de sensibilidade. Destaca-se a maior influência da energia de fraturamento na resposta do problema aleatório em estudo, o que se justifica por sua importância no processo de propagação da fissura, diferentemente da resistência à tração, a qual rege o comportamento apenas no trecho linear, servindo como gatilho para a abertura inicial da fissura, apenas.

Tabela 3. Pontos de projeto e fatores de sensibilidade.

Parâmetros	Pontos de projeto	Fatores de sensibilidade (%)
Resistência a tração, $f_t$ (MPa)	3,2538	19,7425
Energia de fraturamento, $G_f$ (N/m)	87,7949	80,2575

Por fim, é apresentado um estudo referente à caracterização estatística da variação de um dos parâmetros do modelo de fraturamento, a partir da estimativa, via simulação, de valores da carga de

pico. As curvas, das Figs. 12a e 12b, relacionam média e desvio padrão para a nova variável aleatória, com uma maior estabilização para valores acima de 8000 simulações. Na Fig. 13 é apresentado o histograma de valores de carga de pico para um número de simulações adequado (10000). É perceptível a boa convergência da distribuição gaussiana para os valores obtidos para o estudo aqui analisado.

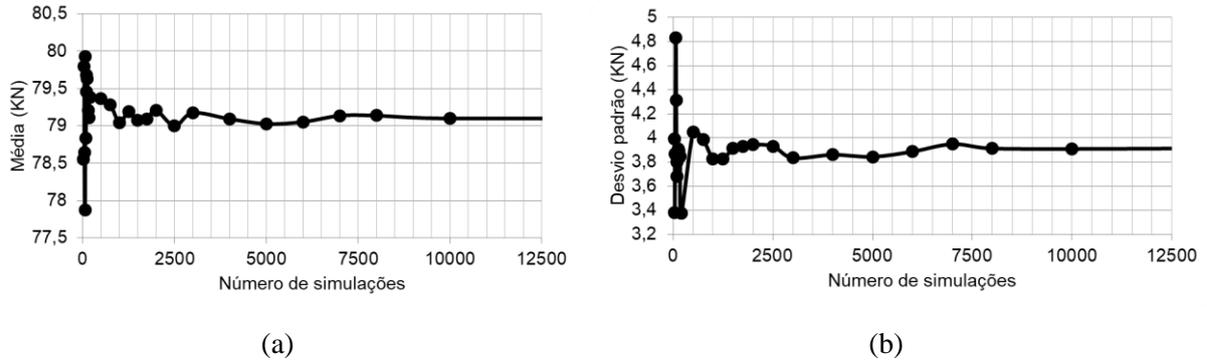


Figura 12. Caracterização estatística do parâmetro de performance (carga de pico) com sua média (a) e desvio padrão (b).

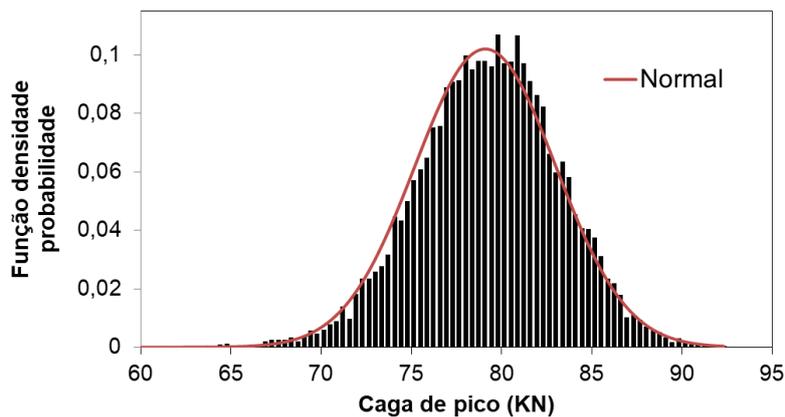


Figura 13. Função densidade probabilidade da carga de pico.

De posse desta caracterização, a carga de pico do modelo de fraturamento pode também ser tratada como v.a. na análise, incorporando-se mais uma fonte de incerteza do fenômeno em estudo, o que se traduz em maior robustez da análise.

## 7 Conclusões

Este trabalho propôs a implementação de uma ferramenta numérica para investigação dos efeitos da aleatoriedade dos parâmetros de fratura no contexto da elasticidade não linear. O modelo de fratura coesiva foi empregado considerando-se um campo de tensões iniciais, com a introdução de dipolos de tensão. O comportamento não linear foi desenvolvido a partir da técnica de correções sucessivas do comportamento elástico linear da estrutura por meio de algoritmos incrementais e iterativos. Dentre as vantagens observadas para este método, destaca-se a necessidade de consulta única do programa mecânico linear para cada chamada do modelo no processo iterativo do algoritmo HLR/FORM.

A avaliação da probabilidade de falha foi realizada por meio do acoplamento entre modelos de confiabilidade e a formulação não linear do MEC. Dois esquemas de acoplamento foram considerados, o primeiro consistiu na utilização do modelo de acoplamento direto (HLR/FORM) na

análise de confiabilidade, com os gradientes das funções limite obtidos diretamente por meio de respostas numéricas. Uma segunda abordagem consistiu, na utilização da técnica de simulação de Monte Carlo, a qual tem implementação bastante simples e pode fornecer repostas com alto nível de precisão, porém, a um alto custo computacional.

Com base nos exemplos avaliados, constatou-se que a formulação do MEC com a introdução de dipolos de tensão para correção do comportamento elástico, conseguiu representar de maneira satisfatória as estruturas analisadas (Figs. 7 e 10), utilizando-se de apenas três equações para representar a ZPI. Essa formulação mostra ser uma possível alternativa ao modelo Dual, que utiliza quatro equações para a modelagem da zona de processos.

No que se refere à análise confiabilística, o acoplamento entre a formulação de dipolos do MEC e algoritmos de confiabilidade mostrou-se eficaz na estimativa da probabilidade de violação do modo de falha considerado (Tabela 2). Também se observou a maior influência da v.a. energia de fraturamento na análise realizada, considerando-se como aleatórios os parâmetros de fratura da Tabela 3.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pelo suporte financeiro concedido.

## Referências

- [1] G.E. Blandford, A.R. Ingraffea, J.A. Liggett. Two-dimensional Stress Intensify Factor computations using the Boundary Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 17, n. 3, p. 387-404, 1981.
- [2] S.L. Crouch. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 10, n.2, p. 301-342, 1976.
- [3] J.O. Watson. Hermitian cubic boundary element for the analysis of cracks of arbitrary geometry. In: Cruse, T.A. *Advanced Boundary Element Methods*, Springer-Verlag, p. 465-474, 1988.
- [4] L.J. Gray, G.E. Giles. Application of the Thin Cavity Method to Shield Calculations in Electroplating, *Proc. of 10th Int. Conf. on the Boundary Element Method*, C.A. Brebbia (Editor), Southampton, Vol. 2, 441-452, 1988.
- [5] Hong, H., Chen, J. Derivations of Integral Equations of Elasticity, *Journ. Engng. Mech.* 114, (6), 1028-1044, 1988.
- [6] Portela, A., Aliabadi, M. H., Rooke, D. P. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(6), 1269–1287, 1992.
- [7] A.L. Saleh, M.H. Aliabadi. Crack growth analysis in concrete using boundary element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 51(4), 533-545, 1995.
- [8] A.L. Saleh. *Crack growth in concrete using boundary elements*. Topics in Engineering, V. 30, Comp. Mech. Publ., 1997.
- [9] M.C. Lopes Jr., W.S. Venturini. Cohesive crack analysis by the boundary element method, In: *XV INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL PLASTICITY*, 1997, Barcelona. Proceedings..., Barcelona: CIMNE, v.1, p. 1057 – 1062, 1997.
- [10] J.C.C. Barbirato. Método dos elementos de contorno com a reciprocidade dual para a análise transiente tridimensional da mecânica do fraturamento. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.
- [11] Oliveira, H. L., Leonel, E. D. Cohesive crack growth modelling based on an alternative nonlinear BEM formulation. *Engineering Fracture Mechanics*, 111, 86–97, 2013.
- [12] X. Huang. M.H. Aliabadi. Probabilistic fracture mechanics by the boundary element method. *International Journal of Fracture*, 171(1), 51–64, 2011.
- [13] E.D. Leonel, A. Chateaneuf, W.S. Venturini. Probabilistic crack growth analyses using a boundary element model: Applications in linear elastic fracture and fatigue problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(6), 944–959, 2012.

- [14] Morse, L., Sharif Khodaei, Z., Aliabadi, M. H. A dual boundary element based implicit differentiation method for determining stress intensity factor sensitivities for plate bending problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 106, 412–426, 2019.
- [15] C.A. Brebbia. *The Boundary Element Method for Engineers*, London: Pentech Press, 1978.
- [16] R.E. Melchers e A.T. Beck. *Structural Reliability Analysis And Prediction*, John Wiley & Sons, Chichester, 2018.
- [17] A.T. Beck. *Confiabilidade e Segurança das Estruturas*. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.
- [18] B.K. Low, W.H. Tang. Efficient spreadsheet algorithm for first-order reliability method. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 133, No. 12, pp.1378- 1387, 2007.
- [19] A.M. Hasofer, N.C. Lind. An exact and invariant first-order reliability format. *J. Eng. Mech.*, 100, 1974.
- [20] R. Rackwitz e B. Fiessler. Structural Reliability under Combined Random Load Sequences Computers and Structures, *Computers and Structures*, Vol. 9, No. 5, pp. 489-494, 1978.
- [21] Leonel, E. D. e Venturini, W. S. Non-linear boundary element formulation with tangent operator to analyse crack propagation in quasi-brittle materials. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34(2), 122–129, 2010
- [22] Morse, L., Khodaei, Z. S. e Aliabadi, M. H. Multi-Fidelity Modeling-Based Structural Reliability Analysis with the Boundary Element Method. *Journal of Multiscale Modelling*, 08(03n04), 1740001, 2017