

## **FORMULAÇÃO DE MODELOS DE DEGRADAÇÃO ORTOTRÓPICA A PARTIR DE TENSORES DE EFEITO DE DANO PARA ANÁLISE FÍSICAMENTE NÃO LINEAR**

### **FORMULATION OF ORTHOTROPIC DEGRADATION MODELS FROM DAMAGE-EFFECT TENSORS FOR PHYSICALLY NONLINEAR ANALYSIS**

**Lívia Ramos Santos Pereira**

**Samuel Silva Penna**

*liviarsp.eng@gmail.com*

*spenna@dees.ufmg.br*

*Universidade Federal de Minas Gerais*

*Av. Pres. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha, 31270-901, Belo Horizonte, Brazil*

**Abstract.** In constitutive models based on the continuum damage mechanics, the process of material degradation is described from damage variables that evaluate the nucleation and growth of micro voids and microcracks in the medium. These variables can be expressed from tensorial entities called damage-effect tensors, which is able to describe the material behavior considering, in the most general form, anisotropic degradation. These entities are defined by a fourth-order tensor. This degradation approach leads to a generalization of the deterioration process, since the secant tensor is obtained from a product between the damage-effect tensor and the elastic tensor. This work presents a formulation of a continuum damage model to deal with orthotropic material degradation, assuming different damage evolutions laws. The degradation process is considered from damage-effect tensors for the physically nonlinear analysis of concrete structures subjected to monotonic loadings. Different approaches of damage-effect tensors presented on literature are discussed and implemented to validate this theory. The formulation was implemented in the INSANE platform (INteractive Structural ANalysis Environment), a free computing system developed in the Structural Engineering Department of Federal University of Minas Gerais.

**Keywords:** Orthotropic damage model, Damage-effect tensors, Physically nonlinear analysis.

**Resumo.** Em modelos constitutivos baseados na mecânica do dano contínuo, o processo de degradação do material é descrito por variáveis de dano que avaliam a nucleação e o crescimento de microvazios e microfissuras no meio. Essas variáveis podem ser expressas por entidades tensoriais denominadas tensores de efeito de dano, capazes de descrever o comportamento do material considerando, em sua forma mais geral, a degradação anisotrópica. Tais entidades são definidas por um tensor de quarta ordem. Essa abordagem da degradação conduz à generalização do processo de deterioração, uma vez que o tensor secante é obtido pelo produto entre o tensor de efeito de dano e o tensor elástico. Esse trabalho apresenta a formulação de um modelo de dano contínuo a fim de tratar a degradação ortotrópica do material, assumindo diferentes leis de evolução do dano. O processo de degradação é considerado a partir de tensores de efeito de dano para análise fisicamente não linear em estruturas de concreto submetidas a carregamentos monotônicos. Diferentes abordagens dos tensores de efeito de dano presentes na literatura são discutidas e implementadas para validar essa teoria. A formulação foi implementada na plataforma INSANE (INteractive Structural ANalysis Environment), um sistema computacional livre desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais.

**Palavras-chave:** Modelo de dano ortotrópico, Tensor de efeito de dano, Análise fisicamente não linear.

## 1 Introdução

Análises fisicamente não lineares demandam a utilização de modelos constitutivos para representar o comportamento do material que compõe uma estrutura. De acordo com Luccioni [1] apud Pituba [2], um modelo constitutivo é um modelo mecânico-matemático que descreve, de maneira simplificada, o comportamento tensão-deformação do material. Para materiais parcialmente frágeis, como o concreto, muitos modelos constitutivos foram formulados, fundamentados em teorias como a plasticidade clássica, a mecânica da fratura e a mecânica do dano contínuo.

No contexto da mecânica do dano contínuo, Lemaitre e Desmorat [3] definem dano como o surgimento e o crescimento de microvazios e microfissuras no meio material. A variável de dano, segundo Kachanov [4], é um parâmetro que mede as mudanças da estrutura do material, podendo ser quantificada por meio da deterioração micromecânica do material ou por uma análise fenomenológica das propriedades degradadas. Essa variável pode ser representada por um escalar, nos casos mais simples, ou por tensores, sendo sua forma mais geral um tensor de quarta ordem.

Diversas formulações matemáticas para descrever os modelos de dano foram desenvolvidas utilizando conceitos abstratos da termodinâmica, dificultando o entendimento do processo de degradação, devido à carência de lastro físico dessa abordagem. Como alternativa, Carol et al. [5] apresentaram uma estrutura teórica unificada para descrever modelos de degradação da rigidez elástica baseada no conceito de funções de carregamento. Nesse trabalho, a formulação foi desenvolvida estritamente para modelos de dano escalar. Posteriormente, diversos autores, entre eles Carol et al. [6], apresentaram formulações baseadas no então denominado tensor de efeito de dano.

O tensor de efeito de dano foi introduzido na mecânica do dano contínuo a partir do conceito de tensão efetiva em materiais degradados. Ao considerar que a tensão nominal atuante em uma configuração hipotética de integridade total produz a mesma energia de deformação da tensão efetiva atuante na configuração deformada corrente, define-se que os tensores de tensão efetiva e nominal estão relacionados por um tensor de quarta ordem, denominado tensor de efeito de dano (Voyiadjis e Park [7]).

Neste cenário, o presente trabalho propõe a formulação e a implementação de modelos constitutivos baseados em tensores de efeito de dano, com o objetivo de desacoplar a forma original do tensor elástico da regra de degradação associada ao modelo constitutivo, garantindo maior generalização de modelos baseados em variáveis de dano. Diferentes leis de evolução do dano no meio material foram implementadas, cujas formulações foram baseadas nos trabalhos de Carol et al. [6], Darwin e Pecknold [8] e Pitangueira [9].

Tal proposta utiliza o software INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*) como plataforma de implementação, que é um sistema computacional livre e de código aberto desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais.

## 2 Fundamentação teórica

O entendimento do processo de deterioração do material a partir dos tensores de efeito de dano parte da compreensão de conceitos da mecânica do dano contínuo e da formulação matemática geral desenvolvida para os modelos de degradação elástica.

### 2.1 Mecânica do dano contínuo

A mecânica do dano contínuo constitui um arcabouço teórico para a representação dos efeitos da deterioração de materiais submetidos a ações mecânicas ou térmicas, descrevendo, a partir de hipóteses micromecânicas, os efeitos da nucleação, propagação e coalescência de um campo de microfissuras continuamente distribuído no meio material. Seu desenvolvimento teve início com o trabalho pioneiro de Kachanov [11] e, desde então, muitos modelos constitutivos que incorporam a definição de dano foram propostos. Para compreender esses modelos, é fundamental abordar o conceito de variável de dano.

De acordo com Lemaitre e Desmorat [3], o Elemento Volumétrico Representativo (EVR), ilustrado na Fig. 1, é uma unidade volumétrica que permite a representação das propriedades de um meio material por variáveis homogêneas. Tal elemento é chamado representativo por suas dimensões serem suficientemente grandes de modo que os defeitos contidos no EVR tenham uma distribuição homogênea, contudo, o EVR deve ser suficientemente pequeno para que possa ser considerado como um ponto material do contínuo (Pituba [2]). Sendo  $\delta S$  a área de uma das faces do elemento representativo, a qual define um plano cuja normal tem direção  $\vec{n}$ , e  $\delta S_d$  a área equivalente aos poros e às microfissuras, a variável de dano, denotada por  $D_{\vec{n}}$  pode ser definida como a densidade de defeitos do EVR, conforme a Eq. (1):

$$D_{\vec{n}} = \frac{\delta S_D}{\delta S}. \quad (1)$$

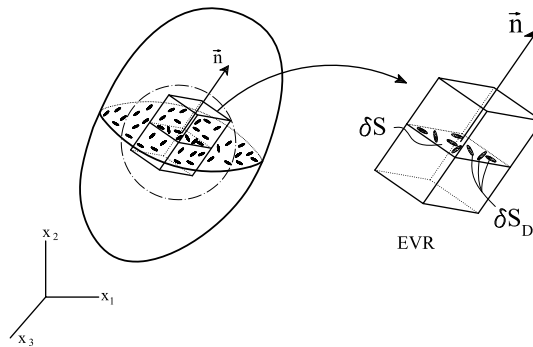


Figura 1. Elemento Volumétrico Representativo - EVR (Penna [10]).

A variável de dano assume valores contidos no intervalo  $0 \leq D_{\vec{n}} \leq 1$ , em que  $D_{\vec{n}} = 0$  indica material íntegro e  $D_{\vec{n}} = 1$  corresponde a total deterioração do material.

Os valores de  $D_{\vec{n}}$  variam com a orientação da normal  $\vec{n}$ , caso o dano seja anisotrópico, com distribuição de fissuras segundo uma direção preferencial. Já o dano isotrópico refere-se a uma situação em que os microdefeitos se distribuem de forma mais ou menos uniforme, sendo independentes da orientação da normal  $\vec{n}$ .

Essa definição da variável de dano parte da abordagem micromecânica do fenômeno de degradação do material, representando uma média dos defeitos microscópicos que caracterizam o estado de deterioração. Apesar do grande apelo físico, os modelos micromecânicos apresentam dificuldades experimentais de identificação das leis de evolução do dano, o que restringe sua utilização. Uma alternativa é quantificar o dano por meio da redução progressiva de uma propriedade mecânica global, como o módulo de elasticidade, adotando a concepção de dano fenomenológico.

Para trabalhar com o conceito de dano fenomenológico é necessário definir tensão efetiva e deformação efetiva. Segundo Pituba [2], a tensão efetiva é obtida tomando-se a parte da seção que resiste efetivamente ao carregamento. Para o caso unidimensional, sendo  $\delta F$  a força aplicada na seção de área  $\delta S$  do EVR, a tensão nominal  $\sigma$  é dada pela Eq. (2)a. Na presença de dano isotrópico, de medida escalar  $D$ , considerando a área da seção resistente  $\delta \tilde{S}$  (Eq. (2)b), a tensão efetiva  $\tilde{\sigma}$  é definida pela Eq. (3):

$$\sigma = \frac{\delta F}{\delta S}, \quad \delta \tilde{S} = \delta S - \delta S_D, \quad (2a,b)$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{\delta F}{\delta \tilde{S}} = \frac{\sigma}{1 - D}. \quad (3)$$

Com a tensão efetiva assumindo valores entre  $\sigma$ , para material íntegro, e  $\infty$ , para material totalmente danificado.

Quanto à deformação, é necessário escrevê-la como função do dano  $\varepsilon = \varepsilon(D)$ . Segundo Lemaitre e Chaboche [13], o estado de deformação do material com dano pode ser obtido pela lei do comportamento do material íntegro (Eq. (4)a), substituindo a tensão nominal pela tensão efetiva, como indica a equação Eq. (4)b:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{E}} = \frac{\sigma}{E(1-D)}. \quad (4a,b)$$

Comparando as relações Eq. (4)a e Eq. (4)b, é possível definir o módulo de elasticidade  $\tilde{E}$ , equivalente ao meio deteriorado, em função do módulo de elasticidade  $E$  do material íntegro:

$$\tilde{E} = (1-D)E. \quad (5)$$

A equação Eq. (5) pode ser reescrita de forma que a variável de dano seja determinada a partir dos valores dos módulos de elasticidade, implicando em uma aplicação da abordagem fenomenológica do dano e obtendo:

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E}. \quad (6)$$

Pelas facilidades de representação do processo de dano fenomenológico, diversos modelos foram propostos baseando-se na degradação do módulo elástico. Podem ser citados os modelos de dano de Mazars e Pijaudier-Cabot [12], Lemaitre e Chaboche [13] e de Vree et al. [14]. Modelos tradicionais para descrever o processo de fissuração, como o modelo clássico de Rots [15], são fundamentados nos mesmos princípios do dano fenomenológico, ainda que não considerem explicitamente a degradação elástica em termos de variáveis de dano.

O desenvolvimento matemático apresentado anteriormente refere-se ao caso unidimensional de dano isotrópico. Contudo, o operador de dano, em sua generalização, pode assumir a forma de um tensor de quarta ordem, sendo capaz de representar o processo de danificação de materiais anisotrópicos. Tais representações são tratadas a partir dos tensores de efeito de dano.

## 2.2 Formulação geral para modelos de degradação elástica

Estabelecer uma base comum para os modelos de degradação elástica conduz a uma maior generalização na forma de representar o comportamento do meio material. Para alcançar esse objetivo, muitos autores basearam-se nos princípios da termodinâmica e em seus processos energéticos. Apesar de geral, a termodinâmica apresenta pouca praticidade para a implementação computacional e há dificuldade em associar as variáveis da formulação com propriedades físicas do processo de degradação.

A fim de contornar essa dificuldade, Carol et al. [5] propõem uma unificação teórica para modelos de degradação elástica baseados em uma única superfície de carregamento, fazendo uma analogia entre os modelos de dano e a teoria da plasticidade clássica. Essa proposta, inicialmente restrita a modelos de dano escalar, foi expandida para modelos tensoriais em trabalhos como o apresentado por Carol et al. [6]. Esse trabalho, entretanto, continuou limitado a uma única superfície de carregamento, motivando Penna [10] a propor uma expansão da unificação teórica para modelos baseados em múltiplas funções de carregamento. Com base nesses estudos, foi elaborada a formulação geral para modelos de degradação elástica, cujo desenvolvimento matemático é apresentado a seguir.

De acordo com as Eq. (7)a e Eq. (7)b, a principal característica de modelos baseados em degradação elástica é a existência de uma relação total entre as tensões e as deformações:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad (7a,b)$$

em que  $\sigma_{ij}$  são as componentes do tensor de tensão,  $\varepsilon_{ij}$  são as componentes do tensor de deformação,  $E_{ijkl}$  são as componentes do tensor de rigidez secante e  $C_{ijkl}$  são as componentes do tensor de flexibilidade secante.

Em processos de carregamento, pode-se, portanto, observar a evolução das tensões e deformações nos pontos materiais a partir de funções de carregamento, que agrupam o critério de resistência e as variáveis históricas do modelo material. A partir de uma formulação baseada em tensão e utilizando a relação total expressa pela Eq. (7), tem-se as variações da tensão e da deformação dadas por:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + \dot{C}_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad (8a,b)$$

ou, pela decomposição aditiva:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^{inc} - \dot{\sigma}_{ij}^d = E_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^d), \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{inc} - \dot{\varepsilon}_{ij}^d = C_{ijkl}(\dot{\sigma}_{kl} - \dot{\sigma}_{kl}^d), \quad (9a,b)$$

sendo:

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^d = \dot{\lambda}_m m_{mkl}, \quad \dot{\sigma}_{kl}^d = \dot{\lambda}_m \bar{m}_{mkl}, \quad (10a,b)$$

em que  $\dot{\varepsilon}_{kl}^d$  e  $\dot{\sigma}_{kl}^d$  referem-se, respectivamente, à variação da deformação de degradação e à variação da tensão de degradação. As componentes do vetor de multiplicadores inelásticos são expressas por  $\dot{\lambda}_m$ , que representa a magnitude da degradação, e  $m_{mkl}$  e  $\bar{m}_{mkl}$  são as componentes do tensor das direções de degradação. As variáveis representadas com um ponto (.) superior, como  $\dot{\sigma}_{ij}$ , referem-se a taxa de variação da respectiva grandeza no pseudo-tempo.

A Fig. 2 ilustra, para o caso unidimensional, a variação das grandezas associadas ao processo de degradação elástica, relativo a um incremento de tensão:

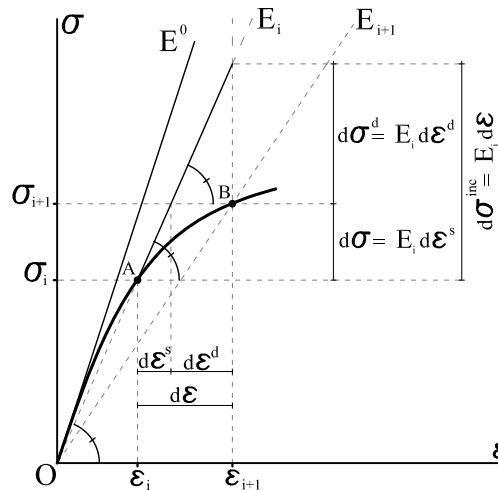


Figura 2. Incremento de tensão associado às deformações de degradação elástica (Penna [10]).

com as variáveis apresentadas na Fig. 2 dadas por:

$d\varepsilon$  é o incremento de deformação;

$d\varepsilon^s$  é a parcela do incremento de deformação associada à rigidez secante corrente;

$d\varepsilon^d$  é a parcela do incremento de deformação associada à degradação da rigidez;

$d\sigma^{inc}$  é o incremento de tensão associado ao incremento de deformação  $d\varepsilon$ ;

$d\sigma^d$  é o incremento de tensão associado ao incremento de deformação devido á degradação  $d\varepsilon^d$ ;

$d\sigma$  é o incremento de tensão resultante.

O processo de carregamento é acompanhado pela equação:

$$F_n(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) = f(\boldsymbol{\sigma}) - f(\mathbf{p}) \quad (11)$$

em que  $\mathbf{p}$  são variáveis internas que controlam o processo de degradação, sendo, a função  $f(\mathbf{p})$  a representação do histórico de carregamento no material. Essas variáveis podem ser escritas em termos de quaisquer grandezas, como por exemplo, as deformações de degradação  $\varepsilon_{kl}^d$ . Tem-se então a forma linearizada da condição de consistência para múltiplas funções de carregamento, dada por:

$$\dot{F}_n = \frac{\partial F_n}{\partial \sigma_{ij}} \Big|_p \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F_n}{\partial p_q} \Big|_\sigma \dot{p}_q = 0, \quad (12)$$

com

$$\dot{p}_q = \frac{\partial p_q}{\partial \varepsilon_{kl}^d} \dot{\varepsilon}_{kl}^d, \quad n_{nij} = \frac{\partial F_n}{\partial \sigma_{ij}} \Big|_p \quad (13a,b)$$

e

$$H_{nm} = - \frac{\partial F_n}{\partial \lambda_m} \Big|_\sigma = - \frac{\partial F_n}{\partial p_q} \Big|_\sigma \frac{\partial p_q}{\partial \varepsilon_{kl}^d} m_{mkl}. \quad (14)$$

Pode-se, então, reescrever a Eq. (12) na forma:

$$\dot{F}_n = n_{nij} \dot{\sigma}_{ij} - H_{nm} \dot{\lambda}_m = 0. \quad (15)$$

Os tensores  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{H}$  indicam, respectivamente, as direções da propagação das deformações de degradação, as direções das funções de carregamento e os módulos pós-crítico do material.

Combinando a Eq. (10)a com a Eq. (9)a, tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda}_m m_{mkl}). \quad (16)$$

Substituindo a Eq. (16) na Eq. (15):

$$n_{nij} E_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda}_m m_{mkl}) - H_{nm} \dot{\lambda}_m = 0. \quad (17)$$

Desenvolvendo a Eq. (17) obtém-se o multiplicador inelástico:

$$\dot{\lambda}_m = \frac{n_{ncd} E_{cdkl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{H_{nm} + n_{npq} E_{pqrs} m_{mrs}}, \quad (18)$$

e, ao substituir a Eq. (18) na Eq. (10), encontra-se:

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^d = \frac{n_{ncd} E_{cdkl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{H_{nm} + n_{npq} E_{pqrs} m_{mrs}} m_{mkl}. \quad (19)$$

Retornando o resultado obtido na Eq. (9), tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (20)$$

sendo  $E_{ijkl}^t$  o operador tangente, dado em termos de rigidez, expresso por:

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} - \frac{E_{ijab} m_{mab} n_{ncd} E_{cdkl}}{H_{nm} + n_{npq} E_{pqrs} m_{mrs}}. \quad (21)$$

De forma semelhante, desenvolve-se a formulação baseada em deformação. As formulações baseadas em tensão e deformação são chamadas duais, uma vez que expressões matemáticas análogas conduzem ao mesmo resultado para um mesmo estado de tensão ou deformação. As relações entre as grandezas das formulações baseadas em tensão e em deformação podem ser expressas por:

$$\bar{m}_{mij} = -E_{ijkl} m_{mkl}, \quad \bar{n}_{nij} = E_{ijkl} n_{nkl}, \quad \bar{H}_{nm} = H_{nm} + n_{nij} E_{ijkl} m_{mkl}, \quad (22a,b,c)$$

sendo as grandezas com a barra sobrepostas referentes à formulação desenvolvida no domínio das deformações e as demais referentes à formulação desenvolvida no domínio das tensões.

Resta estabelecer as variações das tensões e deformações de degradação ( $\dot{\sigma}_{kl}^d$  e  $\dot{\varepsilon}_{kl}^d$ ) em função da variação da rigidez ou da flexibilidade, o que pode ser feito por meio da regra da degradação generalizada, já que nem sempre se tem uma forma explícita para determinar  $\dot{\sigma}_{kl}^d$  e  $\dot{\varepsilon}_{kl}^d$ . Nesses casos, a forma de degradação do tensor de rigidez ou flexibilidade é uma hipótese do modelo.

Assim, comparando a Eq. (8) com a Eq. (9), obtém-se:

$$E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^d = -\dot{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}^d = -\dot{C}_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (23a,b)$$

Sabe-se que  $\mathbf{E} : \mathbf{C} = \mathbf{I}_4$ , assim, pela diferenciação desta equação, tem-se:

$$\dot{C}_{ijpq} E_{pqkl} + C_{ijpq} \dot{E}_{pqkl} = 0. \quad (24)$$

Isolando  $\dot{\mathbf{E}}$  e  $\dot{\mathbf{C}}$ , encontra-se:

$$\dot{E}_{ijkl} = -E_{ijpq}\dot{C}_{pqrs}E_{rskl}, \quad \dot{C}_{ijkl} = -C_{ijpq}\dot{E}_{pqrs}C_{rskl}. \quad (25a,b)$$

Substituindo a Eq. (25)b na Eq. (23)b, tem-se:

$$\dot{\sigma}_{kl}^d = \dot{E}_{pqrs}\varepsilon_{kl}. \quad (26)$$

Define-se ainda a variação do tensor de rigidez como

$$\dot{E}_{ijkl} = \dot{\lambda}_m \bar{M}_{mijkl}, \quad (27)$$

em que  $\dot{\lambda}_m$  é a magnitude e  $\bar{M}_{mijkl}$  é a direção da variação da rigidez. A Eq. (27) estabelece a taxa de degradação do tensor constitutivo em função de uma magnitude do processo de degradação e de uma direção. Tal relação é conhecida como Regra da Degradação Generalizada. Substituindo a Eq. (27) na Eq. (26), encontra-se

$$\dot{\sigma}_{ij}^d = \dot{\lambda}_m \bar{M}_{mijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (28)$$

Comparando a Eq. (28) com a Eq. (10), tem-se

$$\bar{m}_{mij} = \bar{M}_{mijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (29)$$

Por fim, a Eq. (21) pode ser reescrita como:

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{H_{nm}} \bar{M}_{mijpq}\varepsilon_{pq}\bar{n}_{nkl}. \quad (30)$$

Ressalta-se que modelos que preconizam a degradação do tensor de rigidez consideram todos os parâmetros do material como variáveis que evoluem durante o processo de deterioração. Essa característica limita esses modelos, devido à dificuldade de estabelecer leis de evolução para todos esses parâmetros. Um modelo ortotrópico, por exemplo, demanda leis de evolução para 21 parâmetros independentes.

Para contornar tais dificuldades são utilizadas grandezas que medem o quão degradado está o tensor de rigidez do material. Essas grandezas são as variáveis de dano, denotadas por  $\mathcal{D}_*$ . O símbolo “\*” representa a natureza escalar, vetorial ou tensorial que as variáveis podem assumir.

Nos modelos baseados em deformação, a rigidez passa a ser escrita como função das variáveis de dano e das constantes elásticas, na forma apresentada como:

$$E_{ijkl}^D = E_{ijkl}(E_{pqrs}^0, \bar{\mathcal{D}}_*). \quad (31)$$

Que pode ser diferenciada, resultando em



$$\dot{E}_{ijkl}^D = \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \dot{\mathcal{D}}_*, \quad (32)$$

com a regra de fluxo para dano escrita como

$$\dot{\mathcal{D}}_* = \dot{\lambda}_m \overline{\mathcal{M}}_{m*}, \quad (33)$$

em que  $\dot{\lambda}_m$  é o multiplicador inelástico, ou multiplicador de dano, e  $\overline{\mathcal{M}}_{m*}$  define a direção da taxa de mudança das variáveis de dano.

Substituindo a Eq. (27) e a Eq. (33) na Eq. (32), obtém-se a variação do tensor de rigidez em termos de variável de dano, conforme a Eq. (34).

$$\overline{M}_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \overline{\mathcal{M}}_{m*}. \quad (34)$$

O mesmo pode ser feito em relação à variação da flexibilidade dos modelos com formulação baseada em tensão.

A estrutura teórica unificada desenvolvida a partir dessa formulação permite a representação de diferentes modelos, como modelos baseados em tensão, modelos de plasticidade clássica, modelos baseados em deformação, modelos de fissuração distribuída e modelos de dano.

### 2.3 Tensores de efeito de dano

De acordo com Penna [10], em modelos de dano definem-se as variáveis de dano e sua dependência com os tensores de rigidez e flexibilidade. Modelos isotrópicos, por exemplo, apresentam uma relação trivial dada pela Eq. (35), em que  $D$  é a variável de dano.

$$E_{ijkl}^D = (1 - D) E_{ijkl}^0. \quad (35)$$

Modelos com degradação anisotrópica demandam relações mais complexas, que são definidas a partir dos conceitos da mecânica do dano contínuo. Nesses casos, torna-se necessário o uso da notação tensorial para apresentar os chamados tensores de efeito de dano.

Diferentes autores apresentaram propostas de tensores de efeito de dano capazes de relacionar os tensores de rigidez e flexibilidade do material íntegro com seu respectivo tensor secante, que representa a hipótese de degradação do material. Esse estudo foi desenvolvido a partir dos modelos propostos por Carol et al. [6] e [16], Pitangueira [9] e Darwin e Pecknold [8].

**Tensor de efeito de dano no sistema principal.** Os trabalhos de Carol et al. [6] e [16] partem do princípio de que as variáveis de dano relacionam grandezas efetivas com suas respectivas parcelas nominais por meio de um tensor de quarta ordem, o tensor de efeito de dano, representado por  $\overline{\alpha}_{ijkl}$ . Assim, escreve-se:

$$\sigma_{ij} = \overline{\alpha}_{ijkl} \sigma_{kl}^{ef}, \quad \varepsilon_{ij}^{ef} = \overline{\alpha}_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (36a,b)$$

Ou, na forma inversa, utilizando o tensor de efeito de dano dual  $\alpha_{ijkl}$ :

$$\sigma_{ij}^{ef} = \alpha_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = \alpha_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{ef}, \quad (37a,b)$$

Essas equações podem ser combinadas com as relações totais para tensão e deformação efetivas (Eq. (38)a e Eq. (38)b), conduzindo às relações expressas nas Eq. (39)a e Eq. (39)b, que permitem a obtenção dos tensores de rigidez e flexibilidade secantes.

$$\sigma_{ij}^{ef} = E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{ef}, \quad \varepsilon_{ij}^{ef} = C_{ijkl}^0 \sigma_{kl}^{ef}, \quad (38a,b)$$

$$E_{ijkl}^s = \bar{\alpha}_{ijpq} E_{pqrs}^0 \bar{\alpha}_{klrs}, \quad C_{ijkl}^s = \alpha_{pqij} C_{pqrs}^0 \alpha_{rskl}. \quad (39a,b)$$

Devido à natureza simétrica dos tensores de rigidez e flexibilidade do material íntegro e do tensor de efeito de dano, as relações obtidas para a rigidez e a flexibilidade secante também fornecem resultados simétricos.

Considerando o dano isotrópico, o tensor de efeito de dano pode ser escrito como:

$$\bar{\alpha}_{ijkl} = \bar{\phi} I_{ijkl}^{sim}, \quad (40)$$

com  $\bar{\phi}$ , associado a integridade do material, dado por:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\phi} = \sqrt{1 - D}. \quad (41)$$

Já para modelos de dano ortotrópico ou anisotrópico, as variáveis de dano são representadas por um tensor de segunda ordem, cujas componentes são dadas por  $D_{ij}$ , que varia de zero a  $\delta_{ij}$ .

São introduzidas ainda as grandezas  $\bar{w}_{ij}$  e  $w_{ij}$ , que são, respectivamente, a raiz quadrada do tensor integridade  $\bar{\phi}$  e da sua forma inversa  $\phi$ :

$$\bar{\phi}_{ij} = \bar{w}_{ik}\bar{w}_{kj}, \quad \phi_{ij} = w_{ik}w_{kj}. \quad (42a,b)$$

Para a formulação anisotrópica, entretanto, não há garantia de simetria dos tensores efetivos e, por isso, pode-se adotar um método de simetrização dos tensores, como o proposto por Cordebois e Sidoroff [17] apud Carol et al. [16]:

$$\sigma_{ij} = \bar{w}_{ik}\sigma_{kl}^{ef}\bar{w}_{lj}. \quad (43)$$

Tal forma permite rescrever os termos do tensor do efeito de dano, como:

$$\bar{\alpha}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\bar{w}_{ik}\bar{w}_{jl} + \bar{w}_{il}\bar{w}_{jk}). \quad (44)$$

Feitas tais considerações, o tensor de efeito de dano, no sistema principal de dano, pode ser escrito, para o caso plano, como:

$$\bar{\alpha}_{ijkl} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{(1)} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)}}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)}}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)}}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)}}}{2} & 0 & 0 & 0 & \bar{\phi}_{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Conhecido esse formato, foi feita sua implementação no software INSANE. Adotou-se ainda um formato matemático alternativo, a fim de reduzir a demanda por operações tensoriais. Esse novo formato parte da Eq. (46), sendo o tensor de efeito de dano alternativo  $\bar{\alpha}'$  estabelecido conforme a Eq. (47):

$$E_{ijkl}^s = \bar{\alpha}'_{ijpq} E_{pqkl}^0, \quad (46)$$

$$\bar{\alpha}'_{ijkl} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

com  $\nu$  representando o coeficiente de Poisson do material e as variáveis definidas como:

$$A_1 = \frac{\bar{\phi}_{(1)}^2 - \nu^2 \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)}}{1 - \nu^2}, \quad A_2 = \frac{\bar{\phi}_{(2)}^2 - \nu^2 \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)}}{1 - \nu^2}, \quad B_1 = \frac{\nu \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} - \nu \bar{\phi}_{(1)}^2}{1 - \nu^2}, \quad B_2 = \frac{\nu \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} - \nu \bar{\phi}_{(2)}^2}{1 - \nu^2} \text{ e } C_1 = \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)}}{2}.$$

**Tensor de efeito de dano conforme Darwin e Pecknold [8].** O modelo proposto por esses autores busca representar o comportamento do concreto, considerando a não linearidade e a ortotropia do material em análises de estado plano de tensões, por meio do tensor secante local:

$$E^s = \frac{1}{(1 - \nu_1\nu_2)} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_2 E_1 & 0 \\ \nu_1 E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_1\nu_2)G \end{bmatrix}, \quad (48)$$

em que  $E_i$  é o módulo de elasticidade secante na direção  $i$  e  $\nu_i$  refere-se ao coeficiente de Poisson, na direção  $i$ , com  $i = 1, 2$ . O módulo de elasticidade transversal no plano 1-2 é representado por  $G$  e dado pela equação:

$$G = \frac{E_1 E_2 - 2\sqrt{\nu_1\nu_2}\sqrt{E_1 E_2}}{4(1 - \nu_1\nu_2)}. \quad (49)$$

Considerando simetria da matriz constitutiva ( $\nu_1 E_2 = \nu_2 E_1$ ) e um coeficiente de Poisson equivalente dado por  $\nu = \sqrt{\nu_1\nu_2}$ , foi desenvolvido o tensor de efeito de dano para essa formulação, seguindo o formato alternativo proposto na equação Eq. (46) e a notação tensorial apresentada em Eq. (47).

$$\text{Nesse caso as variáveis assumem novos valores: } A_1 = \frac{\bar{\phi}_{(1)} - \nu^2 \sqrt{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)}}}{1 - \nu^2}, A_2 = \frac{\bar{\phi}_{(2)} - \nu^2 \sqrt{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)}}}{1 - \nu^2}, \\ B_1 = \frac{\nu(\sqrt{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)}} - \bar{\phi}_{(1)})}{1 - \nu^2}, B_2 = \frac{\nu(\sqrt{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)}} - \bar{\phi}_{(2)})}{1 - \nu^2} \text{ e } C_1 = \frac{\bar{\phi}_{(1)} + \bar{\phi}_{(2)} - 2\nu\sqrt{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)}}}{4}.$$

Nesse modelo, a variável relativa à integridade, dada por  $\bar{\phi}_i$ , é dada por  $(1 - D_i)$ .

**Tensor de efeito de dano conforme Pitangueira [9].** Nesse modelo, tem-se como premissa que o material torna-se ortotrópico na região danificada e seu desenvolvimento matemático adota estado plano de tensões e ortotropia nas direções principais. Essas considerações conduzem ao mesmo tensor secante local apresentado na Eq. (48), contudo, o que diferencia a formulação de Pitangueira [9] da proposta de Darwin e Pecknold [8] é a hipótese de simetria da matriz de flexibilidade, aqui dada por:

$$\frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_2}{E_2} = \frac{\nu}{E_0}. \quad (50)$$

Novamente, utilizando do formato alternativo do tensor de efeito de dano, é possível representá-lo pela Eq. (47).

$$\text{Para tanto, as variáveis assumem os valores: } A_1 = \frac{\bar{\phi}_{(1)}(1 - \nu^2\bar{\phi}_{(2)})}{1 - \bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)}\nu^2}, A_2 = \frac{\bar{\phi}_{(2)}(1 - \nu^2\bar{\phi}_{(1)})}{1 - \bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)}\nu^2}, B_1 = \frac{\nu\bar{\phi}_{(1)}(\bar{\phi}_{(2)} - 1)}{1 - \bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)}\nu^2}, B_2 = \frac{\nu\bar{\phi}_{(2)}(\bar{\phi}_{(1)} - 1)}{1 - \bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)}\nu^2} \text{ e } C_1 = \frac{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)}(1 + \nu)}{\bar{\phi}_{(1)} + \bar{\phi}_{(2)} + 2\nu\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)}}.$$

A variável relativa à integridade, cuja representação é  $\bar{\phi}_i$ , é obtida por  $(1 - D_i)$ .

Ressalta-se que a formulação de Pitangueira [9] foi previamente implementada no software INSANE no trabalho de Penna [10], contudo tal implementação não utiliza da generalização propiciada pelos tensores de efeito de dano, uma vez que faz a implementação direta do tensor secante. Essa formulação, já bem estabelecida, foi utilizada como referência nas simulações numéricas apresetadas a seguir, a fim de validar as implementações baseadas em tensores de efeito de dano.

### 3 Simulações numéricas

Feito o desenvolvimento matemático dos tensores de efeito de dano, foi possível implementar esses recursos no software INSANE. As análises não lineares utilizaram o processo incremental-iterativo

Newton Raphson Padrão e equilíbrio tangente. As simulações incluíram modelos de tração pura (a), compressão pura (b), flexão em três pontos (c) e compressão diametral (d), conforme representado na Fig. 3. Os nós e as direções de controle dos deslocamentos são destacados pelas setas em verde (para deslocamento vertical) e azul (para deslocamento horizontal).

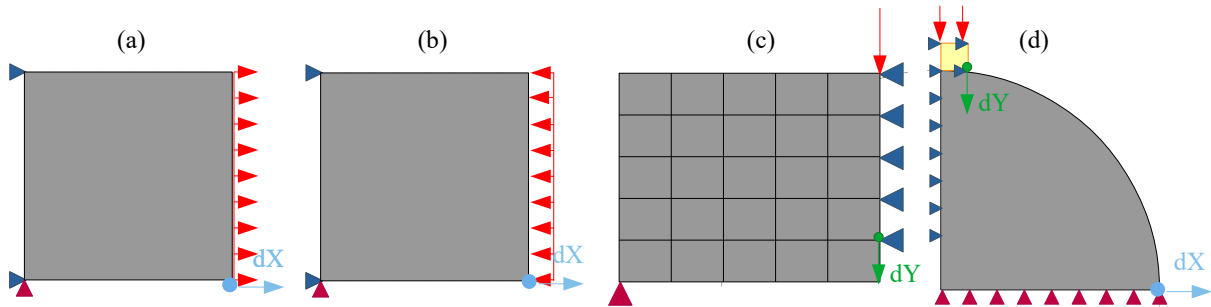


Figura 3. Simulações numéricas.

### 3.1 Tração

O primeiro modelo analisado foi uma chapa em estado plano de tensões, modelada com um único elemento finito do tipo Q4, com dimensões unitárias, submetida a um carregamento de tração pura também unitário aplicado em sua face direita. As restrições nodais foram aplicadas na face esquerda do elemento, permitindo a ocorrência do efeito de Poisson. A solução não linear contou com um limite de passos igual a 200 e um número máximo de iterações por passo limitado a 100, com tolerância para convergência de 0.0001. O incremento do fator de carga foi definido como 0.000005 e o método de controle utilizado foi o controle de deslocamentos. O modelo constitutivo adotado foi modelo de fissuração distribuída com direção fixa de propagação. O material segue a lei de Carreira e Chu [18] para compressão e de Boone et al. [19] para tração, com resistência do concreto à compressão de  $f_c = 20 \text{ MPa}$  e à tração de  $f_t = 2 \text{ MPa}$ . A deformação limite do regime elástico para compressão foi imposta como  $\varepsilon_{cu} = 0.0002$ , o módulo de elasticidade elástico foi considerado como  $E = 20000 \text{ MPa}$  e o coeficiente de Poisson dado como  $\nu = 0.2$ . A energia de fratura adotada foi de  $G_f = 0.00002 \text{ MN/m}$ , o comprimento característico foi  $h = 0,05 \text{ m}$  e o fator de retenção ao cisalhamento foi de  $\beta_r = 0.05$ . Os tensores de efeito de dano foram diferentes para cada simulação e os resultados são apresentados no gráfico da Fig. 4.

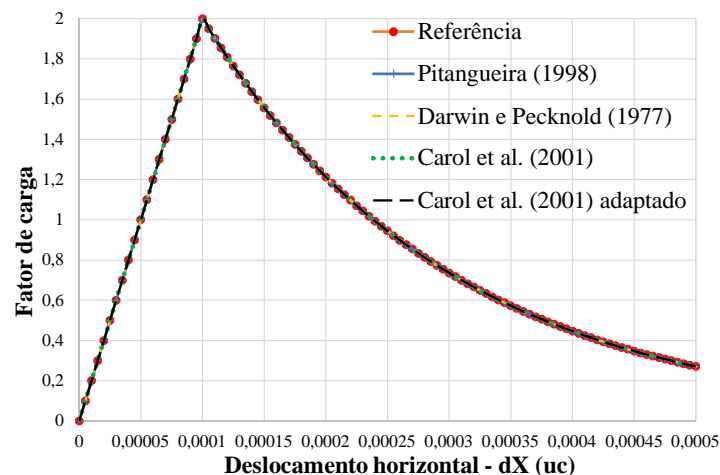


Figura 4. Trejetória de equilíbrio - tração.

**Discretização da malha.** Com o objetivo de avaliar a estabilidade numérica dos modelos baseados em tensores de efeito de dano diante do refinamento da malha, o exemplo anterior foi simulado com malhas

de 4, 16 e 64 elementos, sendo que a malha mais refinada sempre está contida na malha menos refinada, (conforme indicado na Fig. 5a). Os tensores de efeito de dano no sistema principal, no formato convencional e alternativo, e o tensor de efeito de dano proposto por Pitangueira [9] apresentaram resultados idênticos aos obtidos com a malha de um só elemento. Contudo, a hipótese de tensor de efeito de dano de Darwin e Pecknold [8] apresentou comportamento instável da trajetória de equilíbrio com o refinamento da malha, ilustrado na Fig. 5b, o que indica que esse modelo apresenta dependência da discretização adotada.

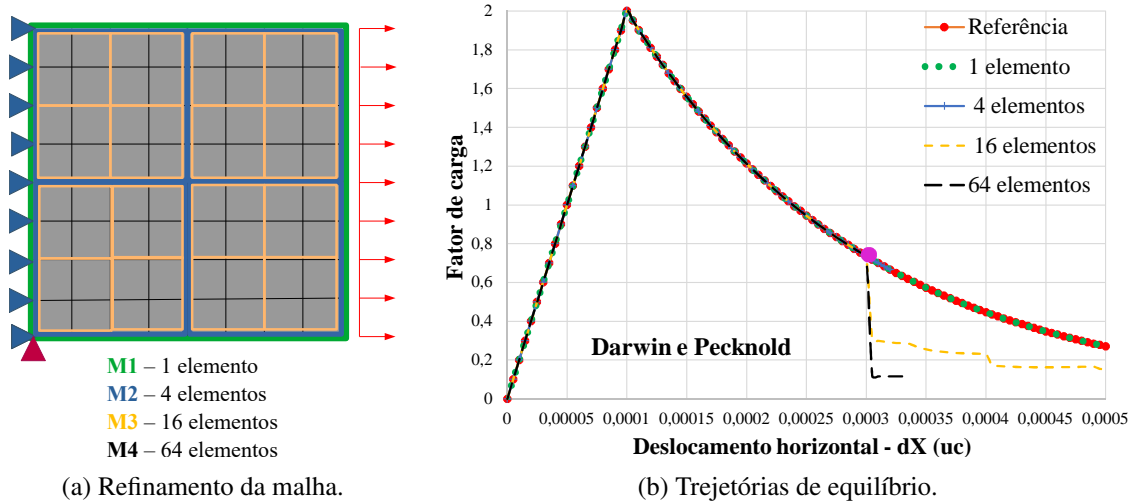


Figura 5. Discretização da malha e fenômeno de localização de deformações

A partir desses resultados, constata-se que as simulações numéricas realizadas a partir dos tensores de efeito de dano apresentaram resultados ótimos para a tração pura, com exceção do modelo proposto por Darwin e Pecknold [8], que apresentou comportamento irregular da trajetória de equilíbrio com a discretização da malha. Supõe-se que esse modelo é mais sensível a variações na discretização, pois, sua hipótese de simetriação do tensor secante local inclui raízes nesse operador, o que pode conduzir a instabilidades numéricas.

### 3.2 Compressão

Para a compressão foi realizado procedimento análogo ao descrito para a tração. Os parâmetros de entrada do modelo foram os mesmos aplicados à tração, feita a ressalva que o carregamento, que agora representa uma compressão pura, teve seu sentido de aplicação invertido. Os resultados dessa simulação são apresentados na Fig. 6.

Percebe-se, portanto, que apenas a proposta de tensor de efeito de dano formulada a partir de Pitangueira [9] foi capaz de representar adequadamente a trajetória de equilíbrio, em concordância com a referência. Os demais modelos divergiram no passo 12, em que há acentuação do comportamento não linear do material. Mais estudos são necessários para compreender as limitações das respectivas propostas de tensores de dano e porque elas não apresentaram resultados satisfatórios para a compressão pura.

### 3.3 Flexão

A simulação do exemplo de flexão em três pontos partiu da análise de uma viga com 2,50 m de comprimento, 1,00 m de altura e espessura unitária. A modelagem considerou a simetria do modelo em relação ao eixo y, simulando apenas metade da geometria. A malha utilizada foi de  $5 \times 5$  elementos do tipo quadriláteros de 4 nós. A fim de simular os efeitos de uma fissura inicial, foi retirado o apoio horizontal no nó inferior na face direita da viga, como apresentado na Fig. 3c. As propriedades do material foram as mesmas utilizadas nos exemplos de tração e compressão, assim como o modelo constitutivo

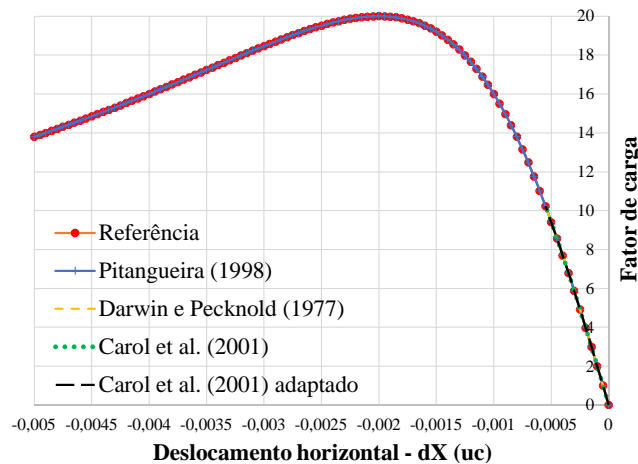


Figura 6. Trejetória de equilíbrio - compressão.

de fissuração distribuída com direção de propagação fixa. O carregamento é composto por uma carga incremental de módulo unitário, no sentido negativo do eixo  $y$  (foi aplicada uma carga de  $-0.05MN$  devido à simetria do modelo). A solução não linear foi limitada em 500 passos e em 200 iterações por passo, com tolerância para convergência de 0.0001. O incremento do fator de carga foi definido como 0.01 e o método de controle adotado foi o controle de deslocamentos generalizado, conforme apresentado por Fuina [20]. Os resultados obtidos para as diferentes formulações de tensores de efeito de dano são apresentados na Fig. 7:

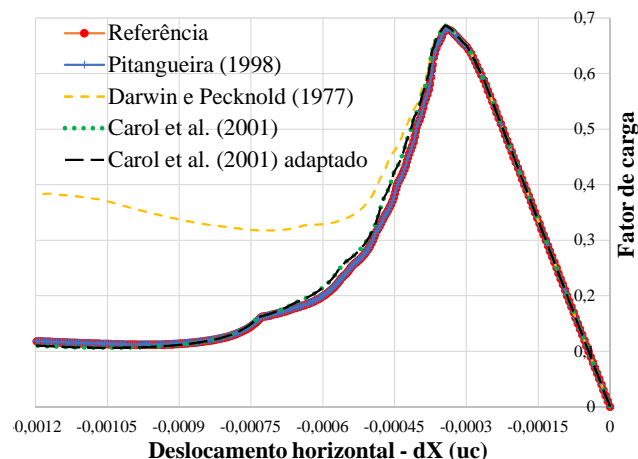


Figura 7. Trejetória de equilíbrio - flexão.

Observa-se que nas análises para flexão, os modelos se mostraram estáveis. Ressalta-se que o modelo de Darwin e Pecknold [8] apresentou um enrijecimento observado no ramo pós-pico, o que pode estar relacionado à forma particular proposta pelos autores para o cálculo do módulo de elasticidade transversal do material, sob o qual atua o fator de retenção ao cisalhamento e tende a induzir um travamento artificial de tensões.

### 3.4 Compressão diametral

O ensaio de compressão diametral busca obter de forma indireta a resistência a tração do material, utilizando um corpo de prova cilíndrico. A geometria do corpo ensaiado permite que a simulação numérica se beneficie da simetria do modelo. Feitas essas considerações, foi realizada a análise de um quarto do corpo de prova, com 40 mm de raio, adaptando as restrições nodais de forma adequada. Foi adotada uma malha de 130 elementos do tipo triangulares de três nós. Os dois nós inferiores da face esquerda do modelo (como apresentado na Fig. 3d) foram liberados a fim de representar os efeitos de uma trinca

inicial. Cada uma das cargas aplicadas tem valor de  $-0.25N$ , sendo aplicadas em um bloco rígido.

Novamente foi utilizado o modelo de fissuração distribuída e as leis de compressão de Carreira e Chu [18] e de tração de Boone et al. [19] para o concreto. Os parâmetros de entrada desse material foram a resistência do concreto à compressão de  $f_c = 25 \text{ N/mm}^2$  e à tração de  $f_t = 2.5 \text{ N/mm}^2$ . A deformação limite do regime elástico para compressão foi imposta como  $\varepsilon_{cu} = 0.01$ , o módulo de elasticidade elástico foi considerado como  $E = 20000 \text{ N/mm}^2$  e o coeficiente de Poisson dado como  $\nu = 0.2$ . A energia de fratura adotada foi de  $Gf = 0.1 \text{ N/mm}$ , o comprimento característico foi  $h = 50.0 \text{ mm}$  e o fator de retenção ao cisalhamento foi de  $\beta_r = 0.05$ . O bloco rígido foi considerado linear elástico, com  $E = 2000000000 \text{ N/mm}^2$  e  $\nu = 0.1$ . A análise não linear foi restrita a 1000 passos com até 200 iterações por passo e tolerância para convergência de 0.001. O incremento do fator de carga foi definido como 0.0001334 e o método de controle adotado foi o controle de deslocamentos. Os resultados obtidos para os tensores de efeito de dano implementados podem ser observados nas Fig. 8 e Fig. 9:

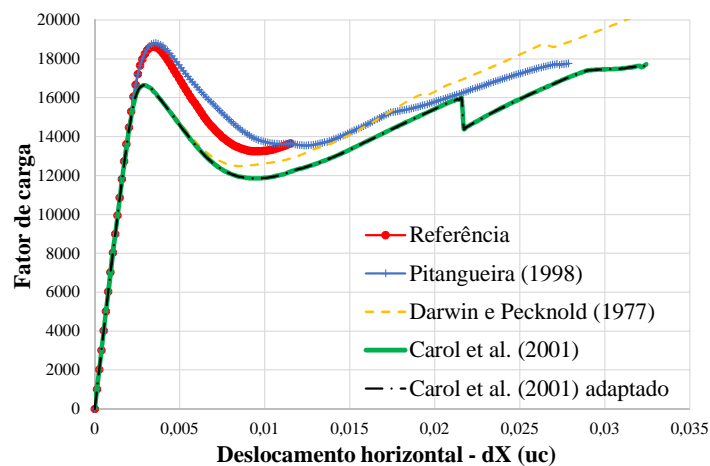


Figura 8. Trajetória de equilíbrio - compressão diametral (dX).

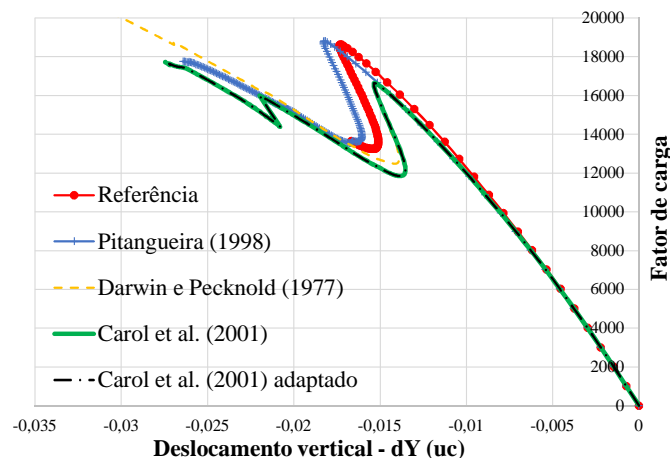


Figura 9. Trajetória de equilíbrio - compressão diametral (dY).

Tendo em vista as trajetórias de equilíbrio apresentadas, os resultados foram considerados bastante satisfatórios. A trajetória que representa ao modelo de Pitangueira [9] foi a que mais se aproximou da referência, o que é explicado pelo fato de ambas partirem do mesmo princípio teórico, apresentando diferenças apenas quanto ao seu desenvolvimento matemático. Já as propostas de tensor de efeito de dano no sistema principal e por Darwin e Pecknold [8] resultaram em trajetórias muito similares, ainda que apresentem um pico levemente inferior ao da referência. Ressalta-se que modelos distintos, em geral, podem representar esse tipo de disparidade, devido às suas hipóteses iniciais.



## 4 Considerações finais

As simulações numéricas realizadas a partir dos tensores de efeito de dano apresentaram resultados ótimos para a tração pura, entretanto, o modelo de Darwin e Pecknold [8] mostrou-se instável diante do refinamento da malha, o que pode estar relacionado com sua formulação matemática e a hipótese de simetria do tensor de rigidez secante local.

Para a compressão, o único modelo capaz de representar trajetória de equilíbrio foi o desenvolvido por Pitangueira [9]. A compressão pura pode ser uma solicitação de difícil modelagem considerando modelos de fissuração distribuída, já que a direção de aplicação da carga é perpendicular a direção de ruptura da estrutura. Mais estudos serão realizados a fim de compreender as limitações dos modelos baseados em tensores de efeito de dano associados à compressão, avaliando também as respostas dessas hipóteses para carregamentos combinados.

Em relação à flexão, os modelos apresentaram trajetórias de equilíbrio bem comportadas, ressaltando o efeito de enrijecimento para a análise utilizando o tensor de efeito de dano de Darwin e Pecknold [8], que foi atribuído ao cálculo do módulo de elasticidade transversal do material.

Por fim, no exemplo referente à compressão diametral, os resultados apresentaram concordância com a referência, ainda que em alguns modelos o pico da trajetória de equilíbrio tenha sido inferior ao da referência. Acredita-se que essa diferença tenha como origem as hipóteses iniciais dos modelos de degradação, que apresentam particularidades entre si.

Sugere-se que essa pesquisa tenha continuidade com um maior aprofundamento das análises para carregamento de compressão pura e análise da estabilidade numérica dos modelos desenvolvidos. Deve ser evidenciado que o método de implementação utilizado favorece a generalização e, portanto, o software está preparado para receber novas formulações de tensores de efeito de dano.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o relevante apoio das agências de pesquisa brasileiras FAPEMIG - Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais e CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ - grant nº 311663/2017-6).

## References

- [1] Luccioni, B. M., 1993. *Formulación de un modelo constitutivo para materiales ortotropos*. Tese (Doutorado) — Universidad Nacional de Tucumán, San Miguel de Tucumán, Argentina, 1993.
- [2] Pituba, J. J. C., 1998. *Estudo de aplicação de modelos constitutivos para concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil, 1998.
- [3] Lemaitre, J. e Desmorat, R., 2005. *Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures*. Cachan: Springer, 2005.
- [4] Kachanov, L. M., 1986. *Introduction to continuum damage mechanics*. Brookline: Springer, 1986.
- [5] Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 1994. A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface. *Int. J. Solids Structures*, vol. 31, pp. 2835–2865.
- [6] Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 2001a. On the formulation of anisotropic elastic degradation. I. Theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate. *Int. J. Solids Structures*, vol. 38, pp. 491–518, 2001a.
- [7] Voyiadjis, G. Z. e PARK, T., 1997. Anisotropic damage effect tensor for the symmetrization of the effective stress tensor. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 64 pp. 106–110, 1997.

- [8] Darwin, D. e Pecknold, A., 1977. Nonlinear biaxial stress-strains law for concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 10, pp. 229–241, 1977.
- [9] Pitangueira, R. L. S., 1998. *Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade*. Tese (Doutorado) — PUC - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Agosto 1998.
- [10] Penna, S. S., 2011. *Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica - Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Novembro 2011.
- [11] Kachanov, L. M., 1958. Time of the rupture process of no-linear solid mechanics. *Otd. Tech. Nauk.*, vol.8, pp. 28–31, 1958.
- [12] Mazars, J. e Pijaudier-Cabot, G., 1989. Continuum damage theory - application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, vol. 115, pp. 345–365, 1989.
- [13] Lemaitre, J. e Chaboche, J. L., 1990. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [14] de Vree, J. H., Brekelmans, W. A. M. e Gils, M. A. J. van., 1995. Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers e Structures* 55 (4), pp. 581–588, 1995.
- [15] Rots, J. G., 1988 *Computational modeling of concrete fracture*. Tese (Doutorado) — Delft University of Technology, Delft, Holanda, 1988.
- [16] Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 2001b. On the formulation of anisotropic elastic degradation. II. Generalized pseudo-Rankine model for tensile damage. *Int. J. Solids Structures*, vol. 38, pp. 519–546, 2001b.
- [17] Cordebois, J. P. e Sidoroff, F., 1982. Endommagement anisotrope en élasticité at plasticité. *J. Mécanique Théorique et Appliquée Numéro Spécial*, pp. 45–60, 1982.
- [18] Carreira, D. J. e Chaboche, K. H., 1985. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. *Journal of the American Concrete Institute*, vol. 82 (6), pp. 797–804, 1985.
- [19] Boone, T., Wawrzynek, P. A., e Ingraffea, A. R., 1986. Simulation of the fracture process in rock with application to hydrofracturing. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*, vol. 23 (3), pp. 255–265, 1986.
- [20] Fuina, J. S., 2004. *Métodos de Controle de Deformações para Análise Não-Linear de Estruturas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, Fevereiro 2004.