

VANTAGENS COMPUTACIONAIS DA UTILIZAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE ELEMENTOS SEGMENTADOS NA ANÁLISE NÃO LINEAR DE ELEMENTOS DE CONCRETO ARMADO TIPO PÓRTICO

Juan Martínez

Luiz C. de Almeida

juandeesusmartinezp@gmail.com

almeida@fec.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Campinas, 13083-852, SP, Brasil

Leandro M. Trautwein

leandromt@fec.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Campinas, 13083-852, SP, Brasil

Abstract. A segmented element can be defined as a structural member that is composed of segments whose properties cannot be expressed as a continuous function and vary randomly throughout the element (e.g. modulus of elasticity, cross section, length). The present work aimed to develop the stiffness matrix of a segmented element to compare the computational performance of this in relation to the conventional stiffness matrix. A simply supported reinforced concrete beam was analyzed linearly and not linearly. The non-linear analysis with stiffness degradation was based on the moment-curvature relationship of the cross section of the beam, where the stiffness of a segment depends on the bending moment acting at the midpoint of it. The results confirmed that it is possible to significantly reduce the time of analysis of a reinforced concrete structure using the stiffness matrix of a segmented element. The numerical models were able to represent the behavior of the tested beam to values above 95% of the ultimate load

Keywords: physical non-linear analysis, moment-curvature relationship, stiffness reduction.

1 Introdução

Leone et. al. [1] apresentaram em 2017 um método de análise não linear física de estruturas de concreto armado chamado Método dos Elementos Segmentados (M.E.S.). Nesse estudo, os autores obtiveram bons resultados em termos de comportamento carga versus deslocamento, conseguindo um bom ajuste para níveis de carga superiores a 90% da carga última.

Um elemento segmentado pode ser definido como um membro estrutural que está composto por segmentos com: módulo de elasticidade, seção transversal e comprimento; aleatoriamente variável, cuja variação (dessas propriedades) ao longo do elemento, não pode ser expressada como uma função contínua. Um exemplo desse tipo de elementos é uma viga de concreto armado fissurada, onde sua rigidez não é uniforme ao longo desta. Na Figura 1, apresenta-se um esquema de um elemento segmentado.

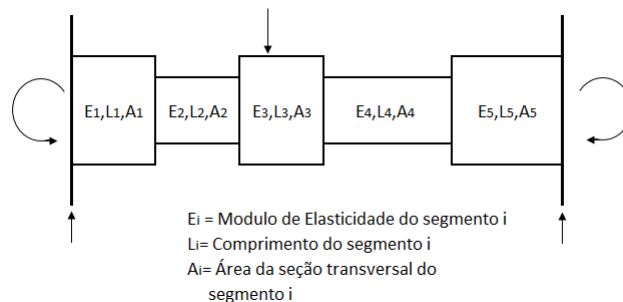


Figure 1. Representação de um elemento segmentado.

As estruturas com elementos segmentados podem ser analisadas com a matriz de rigidez convencional decorrente do Método da Rigidez Direta (D.S.M. pelas suas iniciais em inglês). Porém, para um grande número de segmentos, o tamanho da matriz de rigidez também será grande e o tempo de processamento pode aumentar de maneira considerável. Os autores em [1] não analisaram o desempenho computacional do M.E.S. em relação ao D.S.M.

Nessa ordem de ideias, o presente trabalho visa desenvolver a matriz de rigidez de um elemento segmentado (M.R.E.S.) para comparar o desempenho desta em relação a matriz de rigidez convencional.

2 Derivação da matriz de rigidez de um elemento segmentado

Para cada um dos esforços será determinado o correspondente coeficiente da matriz de rigidez como segue.

2.1 Coeficiente de força axial (k1,1)

Para um elemento de 4 segmentos submetido a força axial (Figura 2), tem-se que o valor do alongamento (Δ) é dado pela Equação 1:

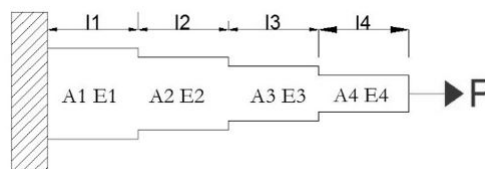


Figure 2. Representação de um elemento segmentado com 4 segmentos submetido a força axial

$$\Delta = \frac{Pl_1}{E_1 A_1} + \frac{Pl_2}{E_2 A_2} + \frac{Pl_3}{E_3 A_3} + \frac{Pl_4}{E_4 A_4}. \quad (1)$$

Fatorando P na Equação 2, tem-se:

$$\Delta = P \left(\frac{l_1}{E_1 A_1} + \frac{l_2}{E_2 A_2} + \frac{l_3}{E_3 A_3} + \frac{l_4}{E_4 A_4} \right) \quad (2)$$

e generalizando a Equação 2 para uma viga com um número n de seções, obtém-se a Equação 3:

$$\Delta = P \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{E_i A_i} \quad (3)$$

Simplificando convenientemente obtém-se a Equação 4,

$$C_1 = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{E_i A_i} \quad (4)$$

A partir da Equação 4 pode-se obter o coeficiente de força axial da matriz de rigidez de um elemento segmentado, que é dado pela Equação 5:

$$k_{1,1} = \frac{1}{C_1} \quad (5)$$

2.2 Coeficientes de cortante e flexão (k_{2,2}; k_{2,3}; k_{3,2} e k_{3,3})

Para deduzir os coeficientes de cortante e flexão de uma viga com um número n segmentos e engastada nos dois extremos, é assumido um deslocamento positivo Δ no extremo esquerdo e são feitos cortes sucessivos nos primeiros 3 segmentos (Figura 3) calculando para cada um destes, as equações de rotação e deslocamento.

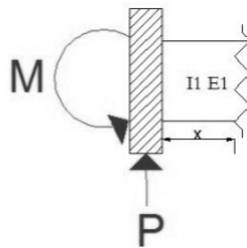


Figure 3. Corte de um elemento segmentado, no segmento 1

Para o segmento n=1, o momento fletor é dado pela Equação 6:

$$M_x = Px - M \quad (6)$$

Integrando a Equação 6 chega-se à equação da rotação da viga em função da distância x, mostrada na Equação 7:

$$E_1 I_1 \theta = \frac{P x^2}{2} - M x + K_1 \quad (7)$$

Com as condições de contorno indicadas na Equação 8:

$$x = 0; \theta = 0 \rightarrow K_1 = 0 \quad (8)$$

Tem-se que a rotação da viga, ao final do segmento 1 é dada pela Equação 9:

$$\theta_1 = \frac{P l_1^2}{2 E_1 I_1} - \frac{M l_1}{E_1 I_1} \quad (9)$$

Integrando a Equação 7, obtém-se a equação do deslocamento da viga em função da distância x , como apresentado na Equação 10:

$$E_1 I_1 y = \frac{P x^3}{6} - \frac{M x^2}{2} + K_2 \quad (10)$$

Com as condições de contorno indicadas na Equação 11:

$$x = 0; y = \Delta \rightarrow K_2 = \Delta E_1 I_1 \quad (11)$$

Tem-se que o deslocamento da viga ao final do segmento 1, é dado pela Equação 12:

$$y_1 = \frac{P l_1^3}{6 E_1 I_1} - \frac{M l_1^2}{2 E_1 I_1} + \Delta \quad (12)$$

Fazendo cortes sucessivos em cada um dos segmentos e calculando θ , tem-se a equação da rotação da viga ao final do segmento 3, dado pela Equação 13:

$$\theta_3 = \frac{P l_2 l_3}{E_3 I_3} + \frac{P l_1 l_3}{E_3 I_3} + \frac{P l_3^2}{2 E_3 I_3} - \frac{M l_3}{E_3 I_3} + \frac{P l_1 l_2}{E_2 I_2} + \frac{P l_2^2}{2 E_2 I_2} - \frac{M l_2}{E_2 I_2} + \frac{P l_1^2}{2 E_1 I_1} - \frac{M l_1}{E_1 I_1} \quad (13)$$

Fatorando P e M na equação 13 é obtida a Equação 14,

$$\theta_3 = P \left[\frac{l_1^2}{2 E_1 I_1} + \frac{l_2^2}{2 E_2 I_2} + \frac{l_3^2}{2 E_3 I_3} + \frac{l_1 l_2}{E_2 I_2} + \frac{l_1 l_3}{E_3 I_3} + \frac{l_2 l_3}{E_3 I_3} \right] - M \left[\frac{l_1}{E_1 I_1} + \frac{l_2}{E_2 I_2} + \frac{l_3}{E_3 I_3} \right] \quad (14)$$

e fazendo as simplificações indicadas nas Equação 15 e 16,

$$C_2 = \frac{l_1^2}{2 E_1 I_1} + \frac{l_2^2}{2 E_2 I_2} + \frac{l_3^2}{2 E_3 I_3} + \frac{l_1 l_2}{E_2 I_2} + \frac{l_1 l_3}{E_3 I_3} + \frac{l_2 l_3}{E_3 I_3} \quad (15)$$

$$C_{2,1} = \frac{l_1}{E_1 I_1} + \frac{l_2}{E_2 I_2} + \frac{l_3}{E_3 I_3} \quad (16)$$

Desta forma é possível reescrever a Equação 14 na Equação 17:

$$\theta_3 = P[C_2] - M[C_{2,1}] \quad (17)$$

Logo, para um número n de segmentos, é possível generalizar as Equação 15 e 16 como expressado nas Equação 18 e 19:

$$C_2 = \sum_{i=1}^n \frac{l_i^2}{2E_i I_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i l_{i+1}}{E_{i+1} I_{i+1}} \quad (18)$$

$$C_{2,1} = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{E_i I_i} \quad (19)$$

Notando que:

$$C_{2,1} = \frac{\partial C_2}{\partial l_i} = C'_2 \quad (20)$$

Para uma viga com um número n de segmentos, tem-se que a rotação no segmento n será dada pela Equação 21:

$$\theta_n = P[C_2] - M[C'_2] \quad (21)$$

Fazendo um processo similar com a equação da linha elástica, chega-se às Equações 22 - 24:

$$y_n = P[C_3] - M[C'_3] + \Delta \quad (22)$$

Onde:

$$C_3 = \sum_{i=1}^n \frac{l_i^3}{6E_i I_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{l_i^2 l_j}{2E_i I_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i l_{i+1}^2}{2E_{i+1} I_{i+1}} + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+2}^n \frac{x_i l_{i+1} l_j}{E_{i+1} I_{i+1}} \quad (23)$$

$$C'_3 = \sum_{i=1}^n \frac{l_i^2}{2E_i I_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{l_i l_j}{E_i I_i} \quad (24)$$

Levando em conta que as condições de contorno são dadas pelas Equação 25 e 26:

$$\theta_n = 0.0 \quad (25)$$

$$y_n = 0.0 \quad (26)$$

Tem-se:

$$PC_2 - MC'_2 = 0 \quad (27)$$

$$PC_3 - MC'_3 = -\Delta \quad (28)$$

Resolvendo o sistema de Equações 27 e 28 e simplificando como mostrado na Equação 29,

$$C = C_2C'_3 - C'_2C_3 \quad (29)$$

Calculam-se os coeficientes de cortante e flexão devido a deslocamento (Equações 30 e 31) :

$$P_A = \frac{C'_2}{C} \Delta = k_{2,2} \Delta \quad (30)$$

$$M_A = \frac{C_2}{C} \Delta = k_{3,2} \Delta \quad (31)$$

Assim, assumindo uma rotação positiva θ no extremo esquerdo de uma viga como um número n segmentos, engastada nos dois extremos e fazendo um procedimento análogo ao anterior, chega-se aos coeficientes de cortante e flexão devido a rotação (Equações 32 e 33):

$$P_A = \frac{C'_2L - C'_3}{C} \theta = k_{2,3} \theta \quad (32)$$

$$M_A = \frac{C_2L - C_3}{C} \theta = k_{3,3} \theta \quad (33)$$

Os demais coeficientes podem ser calculados com as equações da estática e por simetria da matriz de rigidez. Na Figura 4, apresenta-se a o quadrante superior esquerdo da matriz de rigidez de um elemento segmentado no plano.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C'_2}{C} & \frac{C'_2 L - C'_3}{C} \\ 0 & \frac{C_2}{C} & \frac{C_2 L - C_3}{C} \end{bmatrix}$$

Figure 4. Quadrante superior esquerdo da matriz de rigidez de um elemento segmentado

2.3 Momentos de engastamento (Fixed End Moments)

Realizando um procedimento similar ao anterior é possível calcular as reações e os momentos de engastamento, devido a carregamentos externos, os quais têm a seguinte forma geral (Equações 34 e 35):

$$P_A = \frac{S(C'_3 C_{s1} - C'_2 C_{s2})}{C} \quad (34)$$

$$M_A = \frac{S(C_3 C_{s1} - C_2 C_{s2})}{C} \quad (35)$$

Onde S é o valor numérico do tipo de carregamento (carga concentrada, carga distribuída, momento fletor, etc.) e Cs1 e Cs2 são funções que dependem deste último.

3 Exemplo

O teste da viga A3 de Bresler e Scordelis [2] foi modelado. Trate-se de uma viga de concreto armado simplesmente apoiada que foi analisada linear e não linearmente. Na Figura 5 é apresentada a seção transversal da viga.

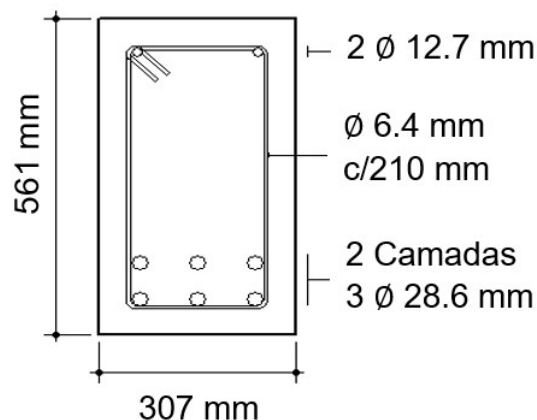


Figure 5. Seção transversal da viga A3

A análise não linear com degradação de rigidez, baseia-se na relação momento-curvatura da seção transversal, onde a rigidez de um segmento de viga depende do momento fletor atuante nele. Na Figura 6 mostra-se a relação momento-curvatura da viga em estudo, calculada com auxílio do programa Response-2000 [3].

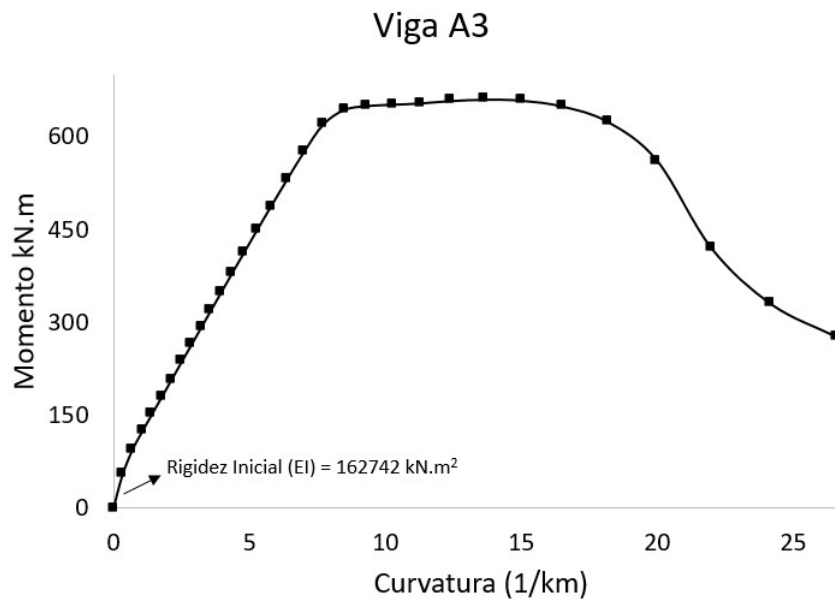


Figure 6. Diagrama momento - curvatura da viga A3

Na Figura 7 apresenta-se o gráfico momento versus percentagem de rigidez inicial. Esse gráfico é feito com base no diagrama momento-curvatura, onde é admitido um modelo de fissuração discreto, isto é, para um determinado intervalo de momento fletor, a rigidez de um segmento permanece constante. Em outras palavras, não são usados valores de rigidez secante, senão os valores de rigidez dos trechos compreendidos entre os pontos calculados do gráfico momento-curvatura. Além disso, este modelo de fissuração não leva em conta aumentos de rigidez nem rigidezes negativas.

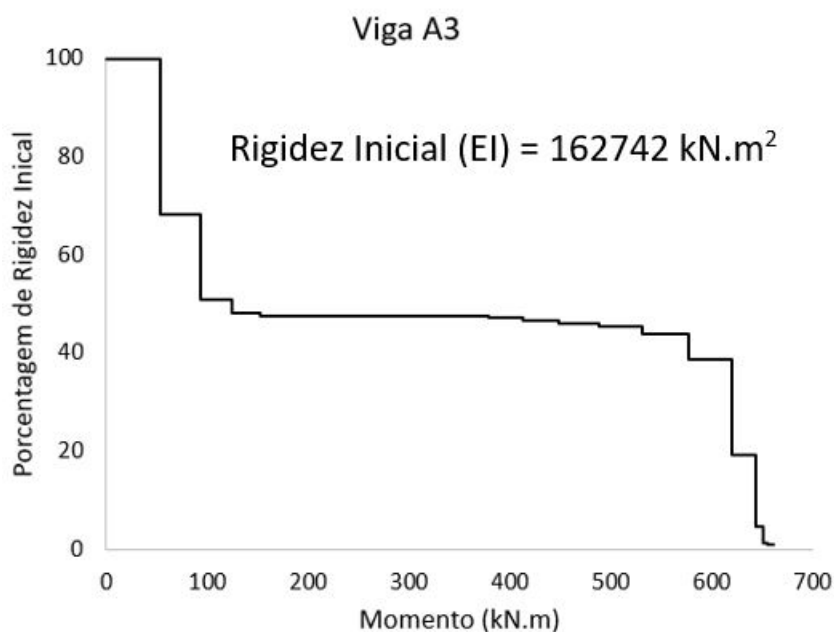


Figure 7. Diagrama momento – percentagem de rigidez inicial da viga A3

As formulações deduzidas na seção anterior foram programadas em Scilab 6.0.1 [4] (programa computacional) para realizar as análises. O objetivo destas análises, foi avaliar a resposta carga versus deslocamento e o tempo empregado pelo código de programação, usando a matriz de rigidez de um elemento segmentado e a matriz de rigidez convencional. As características do teste, da viga e dos

materiais são apresentados na Figura 8 e nas Tabelas 1 - 3.

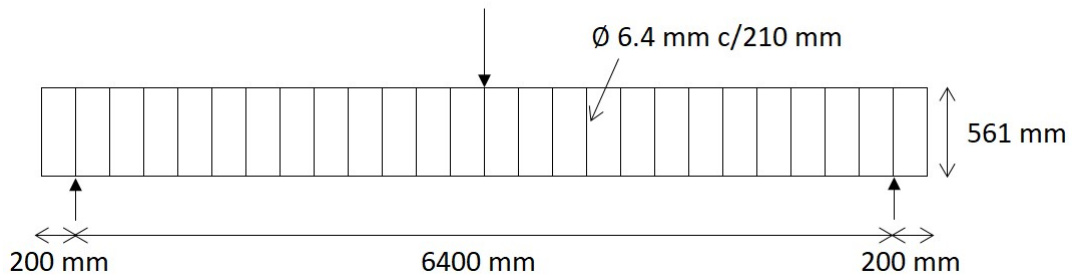


Figure 8. Seção longitudinal da viga A3

Table 1. Detalhes da seção transversal e longitudinal da viga A3

Viga	b (mm)	h (mm)	d (mm)	L (mm)	Vão (mm)
A3	307	561	466	6840	640

Table 2. Detalhes da seção transversal e propriedades do concreto da viga A3

Viga	Aço de tração	Aço de compressão	Estribos	f'c (MPa)	fr (MPa)
A3	6 Ø 28.6 mm	2 Ø 12.7 mm	Ø 6.4 mm c/210 mm	35.1	4.34

Table 3. Características geométricas e mecânicas do reforço empregado na viga A3

Diâmetro (mm)	Área (mm ²)	fy (MPa)	fu (MPa)	Es (MPa)
6.4	32.2	325	430	190,000
12.7	127	345	542	201,000
28.7	645	555	933	218,000

No caso do M.E.S., o modelo 5 (Tabela 4) teve 4 elementos. O elemento n°1 e n°4 tiveram 1 segmento cada um e os elementos n°2 e n°3 tiveram 6 segmentos cada um. O número total de nós foi 5. Na Figura 9 apresenta-se o esquema, donde os círculos representam os nós.

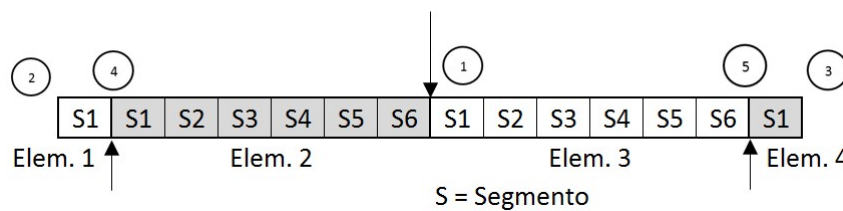


Figure 9. Configuração do modelo, usando a matriz de rigidez de um elemento segmentado.

No caso da matriz de rigidez convencional (D.S.M.), o modelo 5 (Tabela 4) teve 14 elementos e 15 nós. Na Figura 10 apresenta-se o esquema, onde de novo, os círculos representam os nós.

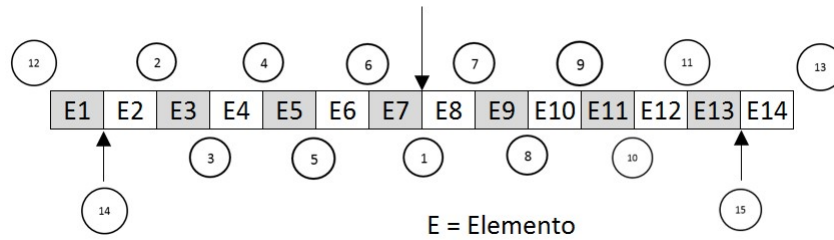


Figure 10. Configuração do modelo usando a matriz de rigidez convencional.

No total, foram feitas 5 modelagens variando o número de segmentos e elementos, mas mantendo o comprimento original da viga, a posição da carga e as distâncias entre os apoios. Na Tabela 4, são apresentadas as configurações de cada uma das modelagens. Nessa tabela indica-se por exemplo, que para a modelagem 5, usando o M.E.S., o elemento nº1 tem 1 segmento, o elemento nº2 tem 6 segmentos, o elemento nº3 tem 6 segmentos e o elemento nº4 tem 1 segmento, cuja soma de segmentos (um total de 14), vem ser o número de elementos quando usar a matriz de rigidez convencional (D.S.M.).

Table 4. Configurações de cada uma das modelagens.

Mod	D.S.M		M.E.S		
	Número de elementos	Número de nós	Número de elementos	Configuração dos segmentos	Número de nós
1	6	7	4	1-2-2-1	5
2	8	9	4	1-3-3-1	5
3	10	11	4	1-4-4-1	5
4	12	13	4	1-5-5-1	5
5	14	15	4	1-6-6-1	5

4 Resultados

Para a medição do tempo empregado pelo código de programação, foram usados os comandos “tic” e “toc”.

Table 5. Tempo de processamento na análise linear.

Mod	Análise Linear (A.L.)		
	D.S.M. (segundos)	M.E.S (segundos)	D.S.M/M.E.S
1	0.1035	0.0732	1.4144
2	0.1369	0.0741	1.8471
3	0.1907	0.0763	2.4984
4	0.2229	0.0817	2.7269
5	0.2896	0.0842	3.4371

Na análise linear (Tabela 5), na modelagem n°5, os tempos foram de 0.0842 segundos e 0.2896 segundos para M.E.S. e D.S.M., respectivamente; quer dizer, 3.44 vezes mais rápido do que com a matriz de rigidez convencional.

Table 6. Tempo de processamento na análise não linear.

Análise Não Linear (A.N.L.)			
Mod	D.S.M. (segundos)	M.E.S (segundos)	D.S.M/M.E.S
1	4.7230	3.3903	1.3931
2	9.9236	5.6334	1.7616
3	17.2697	6.9136	2.4979
4	23.3355	8.0648	2.8935
5	34.5800	10.6293	3.2533

Na análise não linear (Tabela 6), na modelagem n°5, os tempos foram de 10.6293 segundos e 34.5800 segundos para M.E.S. e D.S.M., respectivamente; isto é, 3.25 vezes mais rápido do que com a matriz de rigidez convencional.

Usando a matriz de rigidez convencional, na análise linear (Figura 11), a variação do tempo teve um comportamento linear na medida que o número de elementos foi aumentado. Na análise não linear (Figura 12), o comportamento foi parabólico. Pelo outro lado, usando a matriz de rigidez de um elemento segmentado, o comportamento foi quase constante no caso da análise linear (Figura 11) e teve um comportamento linear na análise não linear (Figura 12).

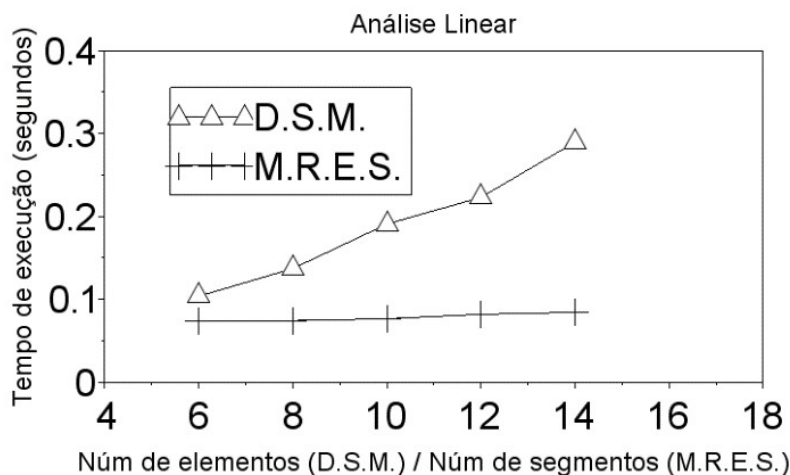


Figure 11. Variação do tempo versus número de elementos/segmentos na análise linear.

Na Figura 13 apresenta-se as três respostas carga versus deslocamento: experimental, usando a matriz de rigidez de um elemento segmentado e usando a matriz de rigidez convencional, na modelagem n°5. As curvas dos dois modelos numéricos ajustaram-se muito bem. Como evidenciado no gráfico, os modelos numéricos conseguiram representar de boa maneira o comportamento da viga testada até valores acima do 95% da carga última. Os modelos apresentaram uma carga última de 450 kN e um deslocamento último de 39.8 mm. A relação entre a carga última obtida numericamente e a carga última do teste foi de 0.96 e a relação entre o deslocamento último obtido nos modelos numéricos e o deslocamento último do teste foi de 1.11.

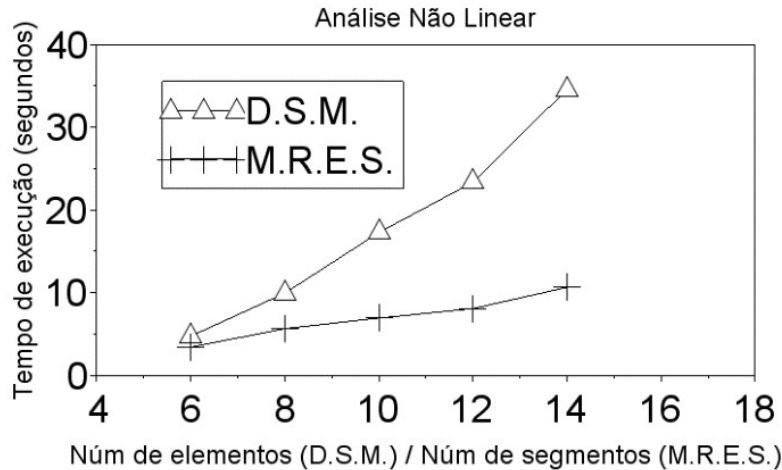


Figure 12. Variação do tempo versus número de elementos/segmentos na análise não linear.

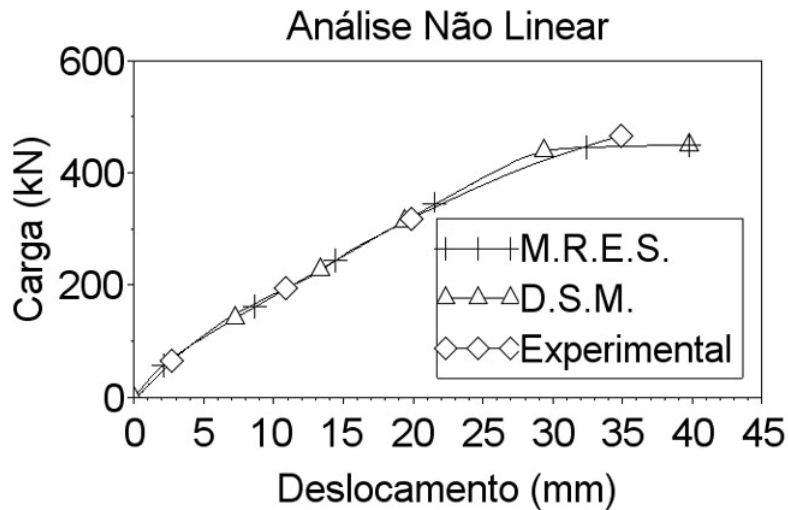


Figure 13. Respostas carga versus deslocamento, analíticas e experimental, da viga A3 na modelagem 5.

5 Conclusões

Os resultados anteriores confirmam que usando a matriz de rigidez de um elemento segmentado, é possível diminuir significativamente o tempo de processamento computacional de uma estrutura de concreto armado, diminuindo em um grau à função que descreve a variação do tempo de processamento em função do número de elementos. Com a utilização da matriz de rigidez de um elemento segmento foi possível obter uma resposta de carga versus deslocamento similar ao obtido experimentalmente, indicando uma boa técnica para prever este comportamento, com uma redução significativa do tempo de processamento. Maiores reduções de tempo de processamento podem ser medidas ao analisar uma estrutura de maior complexidade.

Agradecimentos

O presente trabalho não teria sido possível sem o apoio da Coordenação De Aperfeiçoamento De Pessoal De Nível Superior (CAPES) e do Laboratório de Modelagem Estrutural e Monitoração (LAB-MEM UNICAMP).

Referências

- [1] Leone, J; Barrios, F; Salas, A & Martinez, J., 2017. Segmental elements for non-linear analysis of reinforced concrete frames. Em *Second International Conference on Structural Engineering, New Technology and Methods*, (ICSENM'17- ICSENM 145), Barcelona, ESP.
- [2] Bresler, B. & Scordelis, A. C., 1963. Shear strength of reinforced concrete beams. No *Instituto Americano do concreto*, vol. 60(1), pp. 51–72.
- [3] Bentz, E. & Collins, M. P., 2001. Response 2000 software. Versão 1.0.5. *Universidade de Toronto*.
- [4] SCILAB ENTERPRISES. Scilab Software. Versão 6.0.1. *Instituto Nacional de Pesquisa em Ciências da Computação e Automação* (INRIA pelas suas iniciais em francês).