

COMPARATIVE ANALYSIS BETWEEN THE CLASSICAL ANALYTICAL METHODS AND THE FINITE ELEMENTS METHOD (FEM) IN OBTAINING EFFORTS ON SUPPORTED AND FREE STANDING STAIRS IN REINFORCED CONCRETE

Jônatas G. Mafaldo

jonatasmafaldo@gmail.com

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Departamento de Engenharia Civil, 59078-970, Natal/Rio Grande do Norte, Brasil.

José N. Silva Filho

jneres@ect.ufrn.br

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Departamento de Engenharia Civil, 59078-970, Natal/Rio Grande do Norte, Brasil.

Pedro M. Coutinho

pedromitzcun@gmail.com

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Departamento de Engenharia Civil, 59078-970, Natal/Rio Grande do Norte, Brasil.

Joel A. Nascimento

joelneto@ct.ufrn.br

Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Departamento de Engenharia Civil, 59078-970, Natal/Rio Grande do Norte, Brasil.

Normando L. Oliveira Filho

normfilho@yahoo.com.br

DNIT- Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes - DNIT/13ª UNIT-PB.

Abstract. Free standing stairs in reinforced concrete are important structural elements that make up the buildings. They are designed and executed to join, through successive steps, without intermediate support, in a comfortable way the different levels of a building. In this context, the objective of this research is to realize a comparative study of internal forces of the bending moment, shearing and torsion in free standing stairs considering two methodologies: (a) one using classical analytical methods for obtaining efforts in stairs and (b) other using Finite Element Method (FEM). In the analytical modeling, the free standing stairs were treated as structures composed of: (1) isolated slabs through the Plate Theory with resolution of Lagrange's non-homogeneous fourth-order differential equation, (2) simplified method proposed by Araújo [1] and (3) Knijnik & Tavares' simplified method [2]. In order to obtain FEM efforts, the free standing stair were modeled using the SAP2000® [3] program, using frame elements, both individual and in grid structures, and shell elements. The structures were made considering discretized finite element meshes with dimensions varying from 20 cm to 25 cm, sufficient to obtain the satisfactory efforts and with low computational cost. The results showed that on average the analytical models overestimated the values of internal forces (bending moments in the transversal direction in the landing and in the longitudinal direction of the stair), mainly by the fact of not considering the three-dimensionality of the stairs, redistribution of efforts and the consequent interaction among the bending and torsion efforts. It was also observed that shell element modeling, when compared to the frame elements, presented results closer to the analytical models considering the supported stairs. Finally, the conclusions of the research indicated that although free standing stairs present much greater efforts and require higher thicknesses of bids and levels than ladders supported in beams, however, the lack of intermediate and adjacent structural elements results in a much more accelerated constructive process.

Keywords: Stairs; Bending Moment; Finite Element Method.

1 Introdução

As escadas são importantes elementos estruturais que compõem os edifícios, projetados e executados para unir, por meio de degraus sucessivos, de maneira confortável e sem que haja um grande gasto de energia, os diferentes níveis de uma edificação. Contudo, observam-se, na obra, dificuldades de execução das escadas devido ao sistema estrutural adotado e no posicionamento na armação. Ademais, a concretagem, demanda um tempo considerável de execução e cuidados especiais, principalmente para que não ocorra a segregação do concreto durante seu lançamento na forma. Os modelos estruturais para cálculos desses elementos especiais devem ser eficientes a fim de retratar o seu comportamento estrutural na ruptura (ELU) e em serviço (ELS). Vale ressaltar que esses modelos podem ser gerados de maneiras mais simples através de modelos analíticos simplificados, ou mais complexos, com o emprego de modelos estruturais mais arrojados utilizando métodos numéricos. Contudo, não se pode a priori afirmar a melhor ou maior eficiência de um ou outro, mas sim entender que cada modelo tem características próprias, sendo sua utilização baseada na resposta que se pretende obter da estrutura. Devido à suas formas não convencionais, e por serem destaque do ponto de vista arquitetônico, as escadas especiais passaram a ter mais espaço nas construções com o decorrer do tempo, tendo como exemplo as escadas autoportantes retas, curvas e helicoidais. Segundo Knijnik & Tavares [2], o fato de não necessitarem de estruturas auxiliares para sua sustentação faz com que este tipo de escada se apresente como a solução ideal, tanto em termos de funcionalidade, com sob o ponto de vista da estética. Entretanto, em consequência de sua relativa complexidade no processo de dimensionamento, essas escadas demandam um trabalho especializado, no qual o calculista precisa ter conhecimento e experiência necessários para a análise dos esforços internos gerados e para o dimensionamento, a fim de que sejam garantidas a segurança e a economia desses elementos estruturais. Neste contexto, esta pesquisa propõe-se a realizar a análise dos momentos fletores e deformações de escadas autoportantes, obtidos a partir de modelos analíticos clássicos (MAC) e numéricos, por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando para este último caso, o programa de análise estrutural SAP2000® [3].

2 Análise do comportamento estrutural de escadas autoportantes

As escadas autoportantes apresentam um funcionamento típico que em escadas apoiadas não se tornam tão evidentes. Por não possuírem apoio intermediário o elemento apresenta uma tendência a rotação. Assim, de acordo com os trabalhos de Chriss *et al.* [4] e de Cusens & Kuang [5], o aparecimento das primeiras fissuras é devido a esforços torcionais. Essas fissuras aparecem com uma carga ligeiramente superior ao dobro da carga de projeto e são diagonais localizadas no apoio inferior do lance descendente da escada. Portanto, com o acréscimo de carga aparecem fissuras na intersecção do lance inferior com o patamar e na junção com o lance superior, sendo a ruptura final ocorrida ao longo da linha de junção entre lances e patamar.

Foi verificado também na análise de Knijnik & Tavares [2], a partir dos estudos anteriores, que há uma concentração de tensões na chamada “bomba” da escada, localizada entre faces internas dos lances. Foi constatado o aparecimento de fissuras neste local, aproximadamente perpendiculares à linha de intersecção do patamar com os lances (Figura 1). Essas fissuras tinham abertura considerável junto aos lances e, à medida que se dirigiam à face externa do patamar, elas se reduziam a quase zero.

Para a obtenção dos esforços de dimensionamento de uma escada autoportante, algumas considerações, simplificações e métodos de cálculo analíticos ou numéricos podem ser aplicados. Nestes casos, as escadas são tratadas como estruturas compostas por: **(a)** lajes isoladas onde os esforços internos são obtidos através da Teoria de Placas, com resolução da equação diferencial de quarta ordem, não homogênea, de Lagrange, **(b)** método simplificado, apresentado por Araújo [1], **(c)** método simplificado de Knijnik & Tavares [2] e, **(d)** consideração dos esforços obtidos pelos métodos numéricos.

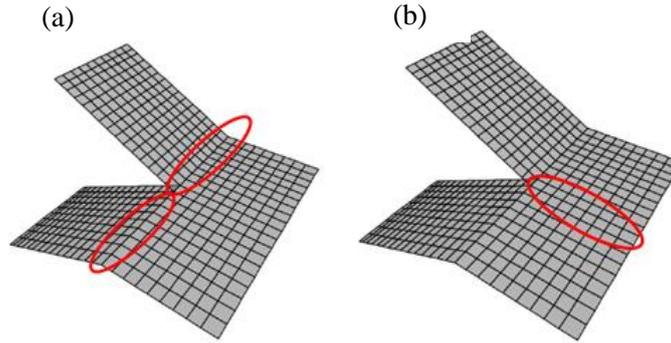


Figura 1. Localização das fissuras: (a) Intersecção dos lances com patamar e (b) “bomba” da escada.

Os momentos fletores podem ser basicamente obtidos por método elástico por meio da Teoria Clássica de Placas Delgadas (Teoria de Kirchhoff), que supõe material homogêneo, isotrópico, elástico, linear e desconsidera a deformabilidade por esforço cortante. Já pela análise simplificada apresentada por Araújo [1], para projetos de escadas autoportantes, é possível realizar um cálculo simplificado para a obtenção de esforços de flexão. De acordo com o autor, os momentos fletores médios no patamar, segundo a direção transversal possuem a variação indicada na Figura 2 (a).

Para efeito de cálculo desses momentos, pode-se considerar que o patamar seja uma laje independente dos lances, possuindo um engaste perfeito ao longo da linha s-s'. Assim o momento fletor M_y , por unidade de comprimento, vale:

$$M_y = \frac{p_1 \cdot b^2}{8}, kNm/m \quad (1)$$

Contudo, para o efeito de cálculo dos momentos fletores segundo a direção longitudinal da escada, admite-se que o patamar seja uma laje engastada nos dois lances (Figura 2 (b)). Assim, o momento negativo por unidade de comprimento M_{xp} , é dado por:

$$M_{xp} = \frac{p_1 \cdot c^2}{2}, kNm/m \quad (2)$$

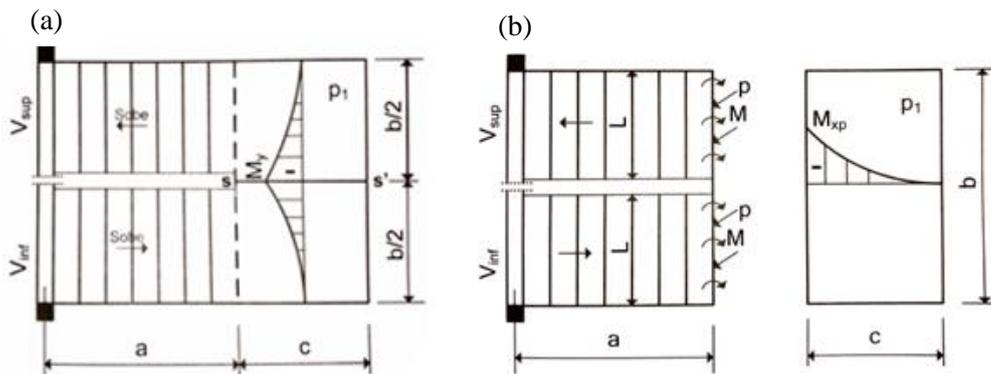


Figura 2. (a) Momentos transversais médios no patamar; (b) Consideração do patamar engastado nos lances. Fonte: Araújo [1].

A partir das premissas de Cusens & Kuang [5], ou seja, uma análise da escada através da aproximação, substituindo um sistema espacial de lajes pelo de uma estrutura de barras espacial, Knijnik & Tavares [2] desenvolveram um método de análise para escadas autoportantes. O esquema de cálculo encontra-se representado na Figura 3 (a). As grandezas hiperestáticas escolhidas foram o momento fletor \overline{M} e o esforço \overline{H} no ponto O, ponto médio do sistema A B O B' A'. Mediante a

aplicação destas forças uma das partes em que a estrutura fica dividida é garantida a manutenção do estado equilibrado e pode-se trabalhar com um sistema estaticamente determinado. A determinação de grandezas hiperestáticas, indispensável para que sejam explicitadas as solicitações internas e reações, deve ser efetuada através da aplicação do Teorema de Castigliano a uma das metades, a superior. Segundo Knijnik & Tavares [2], em termos de aplicação prática, certas simplificações podem ser adotadas, oriundas de análise e comparação de uma série de escadas deste tipo já projetadas por outros autores. Tais simplificações tornam menor número de variáveis envolvidas no processo, facilitando assim, sobremaneira, o cálculo propriamente dito. Mediante tal artifício, é possível determinar famílias de curvas que dão diretamente os valores de $\frac{\bar{M}}{q_p \cdot a^3}$ e $\frac{\bar{H}}{q_p \cdot a^2}$ em função dos parâmetros $\frac{b}{a}$, $\frac{b_1}{b}$ e $\frac{t_l}{t_p}$ (Figura 3 (b)).

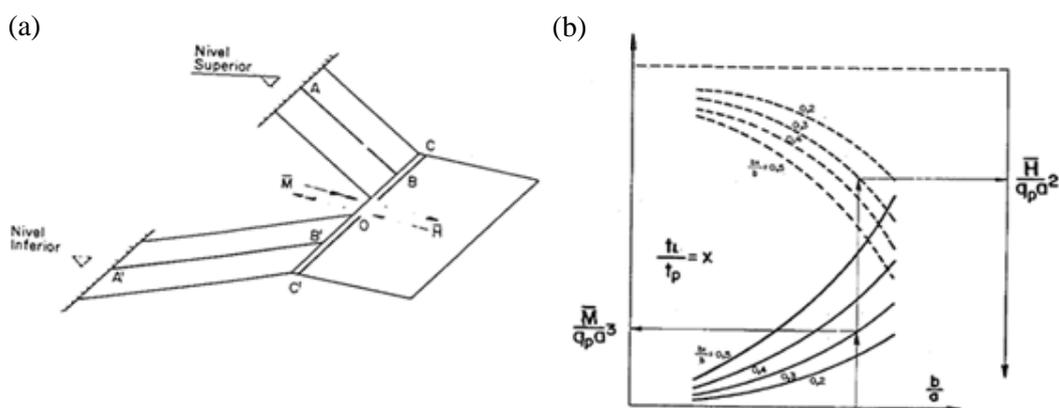


Figura 3. (a) Modelo analítico adotado; (b) Curvas para obtenção dos esforços. Fonte: Knijnik & Tavares [2].

Outra forma de obtenção dos esforços é através da utilização de métodos numéricos como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos (MEF), que consiste na discretização de um meio contínuo em uma malha de elementos em quantidade e dimensões definidas, de modo que sejam mantidas as propriedades do meio original. Nesta pesquisa a modelagem foi feita utilizando o programa de análise estrutural SAP2000® [3].

3 Metodologia

No desenvolvimento desta pesquisa foi seguida uma metodologia, dividida em três etapas principais, sendo elas: (a) definição da geometria da escada, considerando seu sistema, e da espessura, (b) obtenção dos esforços internos solicitantes por modelos analíticos e numéricos e, por fim, (c) as análises e comparações no Estado Limite de Serviço (ELS). Estas etapas podem ser visualizadas no fluxograma apresentado na Figura 4.

O estudo se constitui na comparação de quatro tipos de métodos de análise, sendo os dois primeiros analíticos e os outros dois métodos numéricos. Para cada um deles, foi inicialmente definida a geometria (comprimento, altura, largura) a partir de um projeto já existente, adotando somente a espessura variável. Posteriormente, foram levantadas as ações atuantes, para que se pudessem obter os esforços existentes de flexão e deformações imediatas considerando duas formas: (a) através de métodos analíticos e, (b) por meio de método numérico, sendo neste último utilizando elementos de barra (*frame element*) e elementos de casca (*shell element*). Assim, a partir dos valores encontrados, procedeu-se a análise e comparação de resultados frente aos diversos modelos e da variação na espessura da escada.

Para as escadas foi considerada um classe de agressividade ambiental (CAA) II (ambiente de agressividade moderada), exigindo, assim, um concreto com resistência mínima à compressão de 25 MPa e cobrimento mínimo de 25 mm. Porém neste estudo foi adotado uma resistência de 30 MPa e cobrimento de 30 mm, respeitando as condições da NBR 6118 [6].

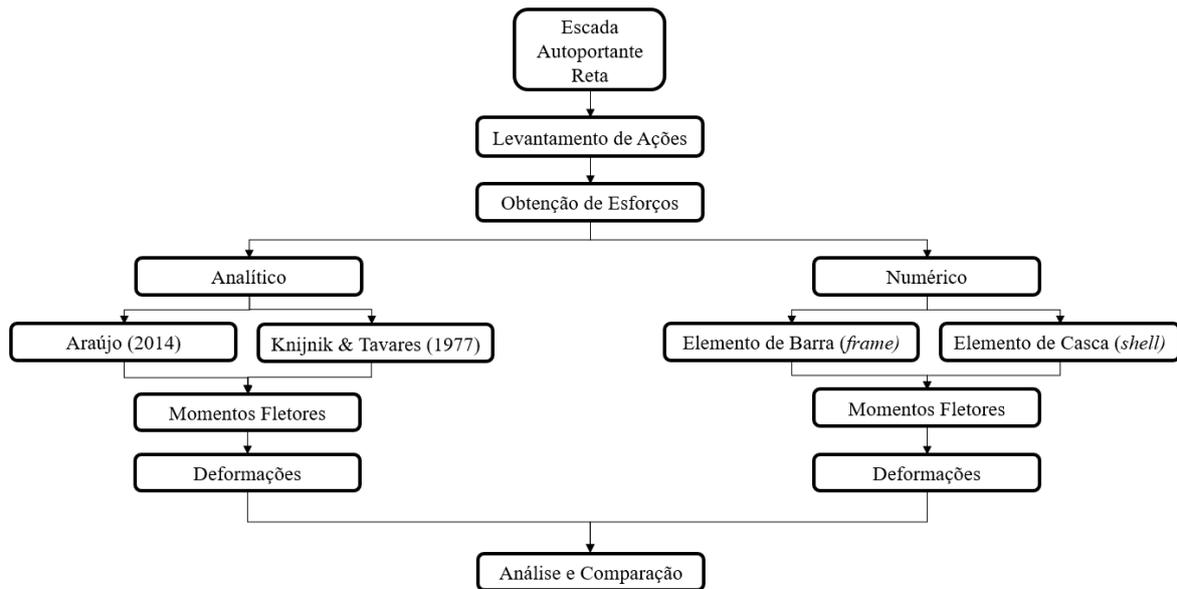


Figura 4. Fluxograma de desenvolvimento da pesquisa.

Os modelos de escada estudados nesse trabalho foram concebidos a partir de um projeto base de uma escada autoportante desenvolvida pela Superintendência de Infraestrutura (INFRA), na ampliação do Restaurante Universitário da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) (Figura 5).

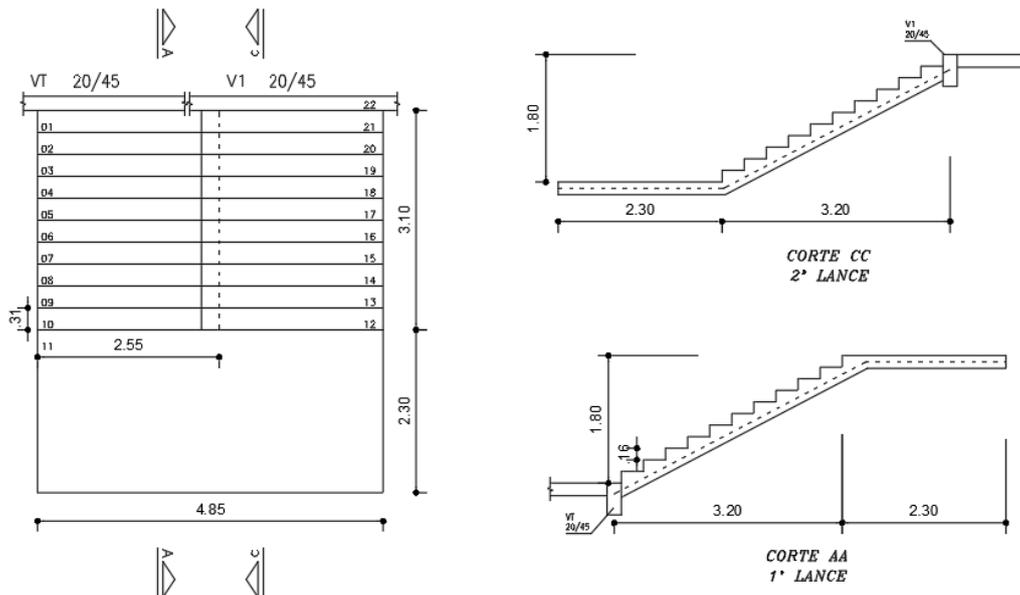


Figura 5. Planta de forma da escada em análise. (a) Planta, (b) corte do lance superior e (c) corte do lance inferior.

Assim, a partir dessa geometria estabelecida, foram determinadas algumas condições de projeto, estabelecendo três grupos de modelos de escadas a serem analisadas. O primeiro grupo se refere aos métodos analíticos, mais precisamente aos métodos simplificados de Araújo [1] e Knijnik & Tavares [2]. O segundo e terceiro grupo são compostos, respectivamente, pelos modelos em MEF formados por elementos de barra e elementos de casca. Nos grupos referentes aos modelos numéricos, foram definidas variações nas vinculações do apoio, sendo estas apoiadas, engastadas e apoiadas com continuidade. Além das mudanças nas condições de apoio, para cada modelo estabelecido também houve uma variação na espessura. Foram determinadas três dimensões padrão de 12 cm, 18 cm e

25 cm, apresentando uma variação média de 30 %. Com isso, foram caracterizados três grupos de análise a parte da geometria adotada, condições de apoio e método de análise. A Tabela 1 apresenta um resumo dos modelos estudados na pesquisa.

Tabela 01. Grupos de análise

GRUPOS	MODELOS	TIPOS	MODELAGEM	ESPESSURA (h)
G1	MAA12	Araújo (2014)	Modelo Analítico	12
	MAA18			18
	MAA25			25
	MAK12	Knijnik (1977)		12
	MAK18			18
	MAK25			25
G2	MEBA12	Apoio	Modelo com Elemento de Barra	12
	MEBA18			18
	MEBA25			25
	MEBE12	Engaste		12
	MEBE18			18
	MEBE25			25
	MEBC12	Apoio com Continuidade		12
	MEBC18			18
	MEBC25			25
G3	MECA12	Apoio	Modelo com Elemento de Casca	12
	MECA18			18
	MECE25			25
	MECE12	Engaste		12
	MECE18			18
	MECE25			25
	MECC12	Apoio com Continuidade		12
	MECC18			18
	MECC25			25

MAA: Escada Autoportante em Modelo Analítico de Araújo [1]; **MAK:** Escada Autoportante em Modelo Analítico de Knijnik & Tavares [2]; **MEBA:** Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Barra Apoiado; **MEBE:** Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Barra Engastado; **MEBC:** Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Barra com Continuidade; - **MECA:** Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Casca; **MECE:** Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Casca Engastado; **MECC:** Escada Autoportante em Modelo com Elementos de Casca com Continuidade.

4 Modelagem numérica das escadas autoportantes

A obtenção dos momentos fletores nas escadas autoportantes foi realizada com o auxílio do programa de análise estrutural SAP2000® [3] considerando o regime linear elástico, portanto, desconsiderando a fissuração ou plastificação do concreto, e as ações com valores característicos.

4.1 Modelagem com elementos de barra (*frame element*)

As escadas foram modeladas primeiramente com elementos de barra (*frame element*). Para construção do modelo, as barras foram posicionadas no plano médio das lajes da escada, obtido através da planta de forma. A seção transversal do elemento de barra foi definida a partir da altura real da estrutura e com comprimento de base unitário, a fim de possibilitar uma análise comparativa das escadas visto que os métodos analíticos e de casca fornecem esforços por metro. Ao todo, nove tipos de modelos foram propostos com elementos de barra. Para o estudo foram variadas as vinculações das escadas em: apoiada, engastada e apoiada com continuidade. Em complemento, para cada tipo de vinculação, foram utilizadas três espessuras de lances e patamares (Figura 6).

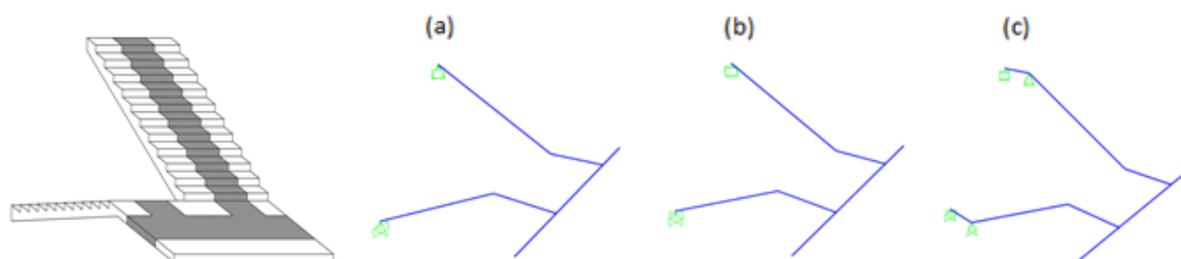


Figura 6. Faixa de um metro: Modelo com elementos de barra: (a) escada apoiada; (b) escada engastada e (c) escada apoiada com continuidade.

4.2 Modelagem com elementos de casca (*shell element*)

Em segunda análise, as escadas foram modeladas como elementos de casca (*shell element*), visto que estes se assemelham mais às lajes que as compõem. A geometria de cada elemento foi considerada como consta na planta de forma mostrada na Figura 5, resultando em um prisma com as dimensões passando pelos planos médios das lajes. Todos os elementos planos modelados foram discretizados em uma malha com dimensões suficientes para a obtenção de resultados satisfatórios, como mostrado na Figura 7. Nos patamares e lances foram utilizados elementos de quatro nós e com dimensões entre 20 cm e 25 cm.

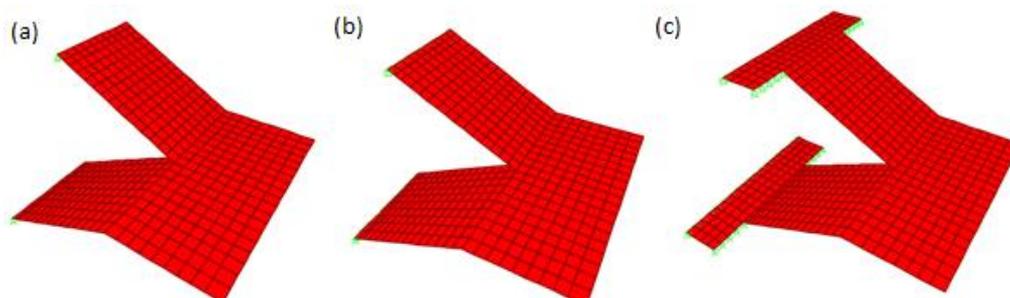


Figura 7. Modelo com elementos casca: (a) escada apoiada; (b) escada engastada e (c) escada apoiada com continuidade.

Os esforços de flexão foram coletados em pontos das cascas onde ocorreram os máximos valores positivos e negativos, em cada direção. Eles são resultantes da integração das tensões na espessura do elemento, os quais são forças e momentos por unidade de comprimento em cada ponto da superfície média do elemento. As Figuras 8 (a) e (b) mostram o sistema de eixos locais que é adotado pelo programa para um elemento de casca de 4 nós e as convenções de sinal para os esforços internos de flexão e momentos de torção, respectivamente.

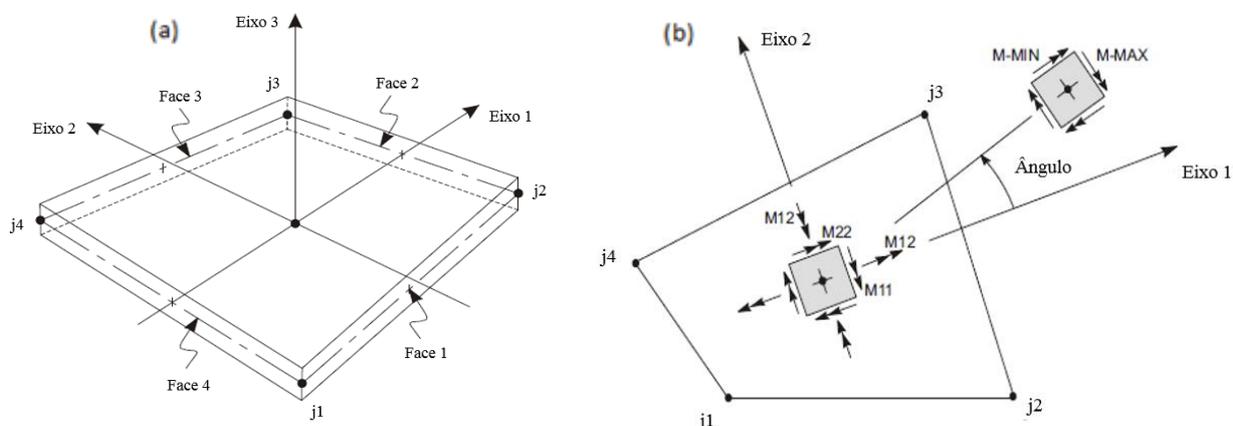


Figura 8. (a) Eixos locais de um elemento de casca de 4 nós; (b) Esforços internos de flexão e torção no elemento de casca. Fonte: Adaptado de *CSI Analysis Reference Manual - SAP2000®* [3]

Sendo:

- M11: Momento por unidade de comprimento atuando à meia altura do elemento nas faces 2 e 4 em torno do eixo 2;
- M22: Momento por unidade de comprimento atuando à meia altura do elemento nas faces 1 e 3 em torno do eixo 1;
- M12: Momento por unidade de comprimento atuando à meia altura do elemento nas faces 2 e 4 em torno do eixo 1 e nas faces 1 e 3 em torno do eixo 2.

5 Análise dos resultados

Para efeito comparativo, na análise seccional local foi utilizada a seguinte equação para determinação do percentual de variação:

$$\text{variação} = \frac{\text{valor analisado} - \text{valor de comparação}}{\text{valor de comparação}} \cdot 100 \quad (3)$$

5.1 Esforços de flexão (momentos fletores)

A partir dos cálculos analíticos e da modelagem numérica, obtiveram-se os valores de momentos fletores nas interfaces lance-piso (m_{lp}), lance-patamar (m_{lpa}), região central do patamar (m_{pa}) entre lances e nos lances (m_l). Para os modelos compostos por elementos de casca, os resultados foram coletados em um ponto médio da região.

As Figuras 9 a 11 mostram os esforços de momento fletor obtidos utilizando elementos de barra e casca para as escadas com 18 cm de espessura. Vale salientar que na modelagem com elemento de barra, embora em alguns trechos os diagramas apresentem como retas, na verdade são curvas (carga uniformemente distribuída). Isso ocorreu devido ao “fator escala” adotado na plotagem dos desenhos dos modelos, não comprometendo os resultados obtidos na pesquisa.

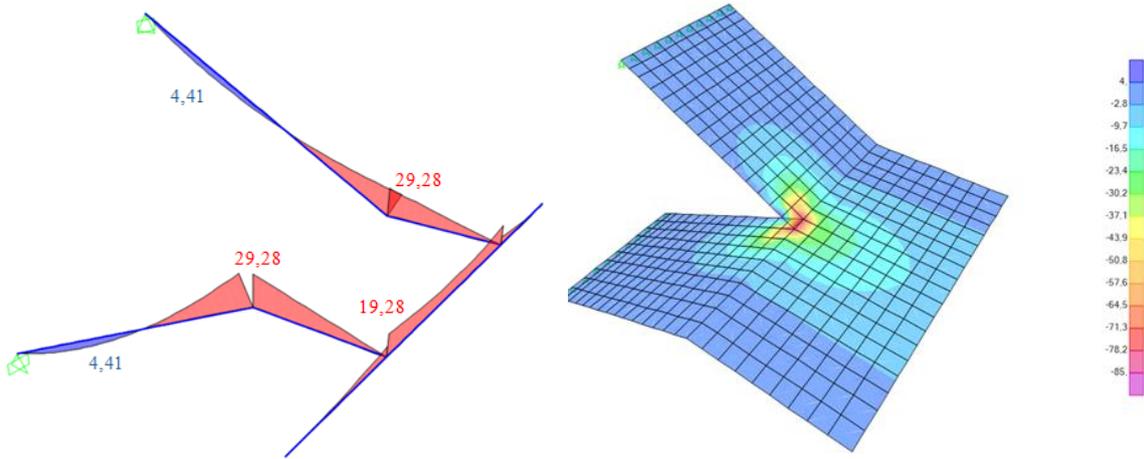


Figura 9. Momentos fletores na escada apoiada com laje de 18 cm, em kNm/m modeladas como elementos de barra e de casca.

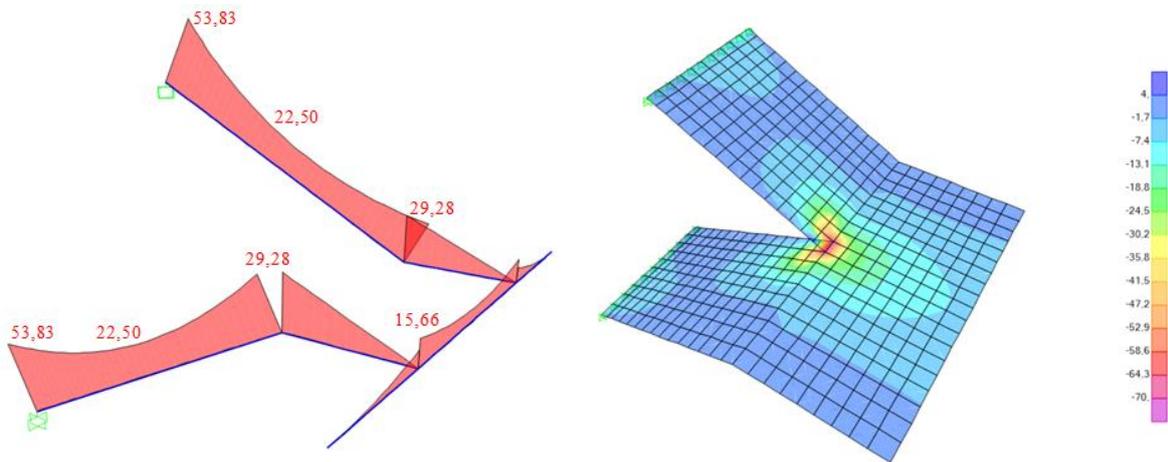


Figura 10. Momentos fletores na escada engastada com laje de 18 cm, em kNm/m modeladas como elementos de barra e de casca.

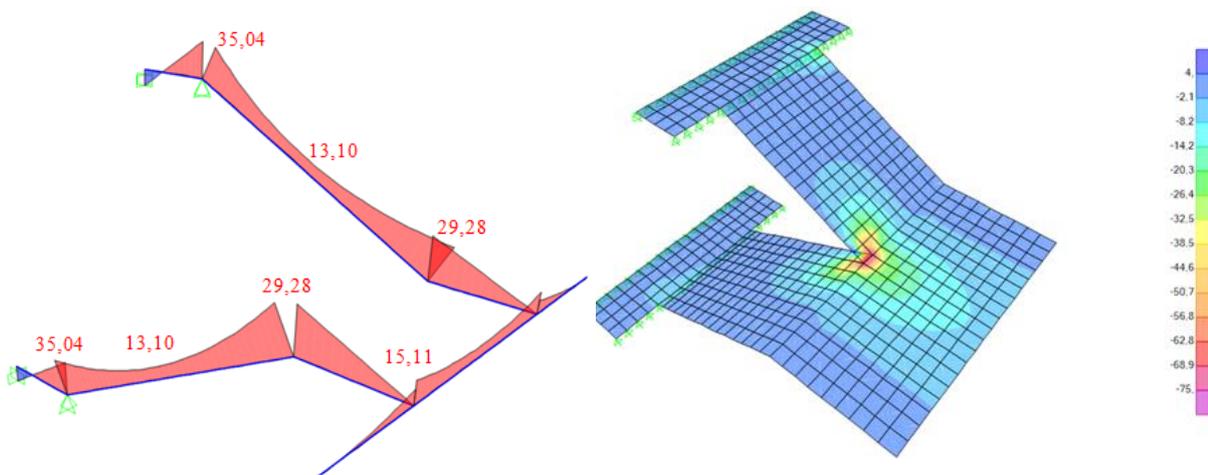


Figura 11. Momentos fletores em escada com continuidade com laje de 18 cm, em kNm/m modeladas como elementos de barra e de casca.

As Tabelas 2 a 4 mostram os resultados para os modelos: analíticos, numérico com elementos de barra e numérico com elementos de casca.

Tabela 2. Valores de momentos fletores para os modelos analíticos.

MODELO	$m_{lp'}$ (kN.m/m)	$m_{lpa'}$ (kN.m/m)	m_l (kN.m/m)	$m_{pa'}$ (kN.m/m)
MAA12	-	-23,81	5,51	-26,46
MAA18	-	-27,77	6,19	-30,87
MAA25	-	-32,40	7,00	-36,02
MAK12	-	-	-	-20,52
MAK18	-	-	-	-23,93
MAK25	-	-	-	-27,93

Tabela 3. Valores de momentos fletores para os modelos numéricos com elementos de barra.

MODELO	$m_{lp'}$ (kN.m/m)	$m_{lpa'}$ (kN.m/m)	m_l (kN.m/m)	$m_{pa'}$ (kN.m/m)
MEBA12	-	-25,10	4,05	-13,57
MEBA18	-	-29,28	4,41	-19,28
MEBA25	-	-34,16	4,85	-24,92
MEBE12	-40,57	-25,10	-16,23	-11,56
MEBE18	-53,83	-29,28	-22,50	-15,66
MEBE25	-73,78	-34,16	-32,04	-19,18
MEBC12	-21,74	-25,10	-6,92	-11,33
MEBC18	-35,04	-29,28	-13,10	-15,11
MEBC25	-53,15	-34,16	-21,75	-18,53

Tabela 4. Valores de momentos fletores para os modelos numéricos com elementos de casca.

MODELO	$m_{lp'}$ (kN.m/m)	$m_{lpa'}$ (kN.m/m)	m_l (kN.m/m)	$m_{pa'}$ (kN.m/m)
MECA12	-	-20,22	7,19	-21,11
MECA18	-	-22,86	8,13	-27,49
MECA25	-	-26,75	9,23	-32,57
MECE12	-16,07	-20,89	-3,18	-18,39
MECE18	-19,98	-23,77	-5,36	-23,86
MECE25	-25,84	-27,78	-7,12	-27,11
MECC12	-7,35	-20,54	1,92	-19,93
MECC18	-11,04	-23,38	0,40	-25,38
MECC25	-15,76	-27,45	-1,52	-29,35

Para esta análise comparativa foram escolhidos o método simplificado de Araújo [1] e os modelos em MEF com elementos de barra e casca apoiados (Figura 9), visto que este método analítico utiliza um modelo estrutural de vinculação rotulada, não apresentando momentos fletores negativos no apoio. Portanto para efeitos de comparação, esses são os modelos que mais se aproximam entre si.

Observa-se, a partir dos Gráficos 1 ao 3, que de maneira geral, em todos os modelos existe o incremento dos esforços à medida que a espessura da laje da escada é aumentada. Porém esse aumento varia de maneira específica para cada modelo.

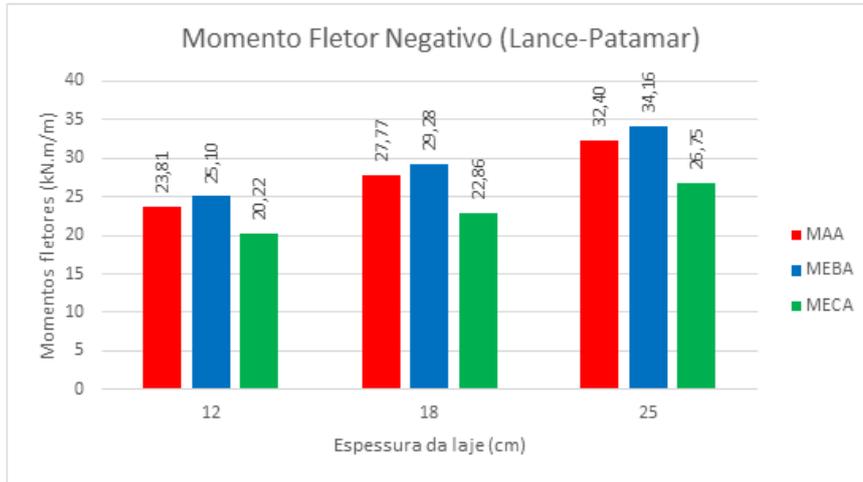


Gráfico 1. Momentos fletores negativos na região lance-patamar.

Nas Tabelas 5 a 7 são apresentadas as diferenças percentuais dos momentos, em relação ao modelo de referência, para cada modelo analisado.

Tabela 5. Comparativo entre modelos.

MOMENTO NEGATIVO (LANCE-PATAMAR)			
MODELO	MAA	MEBA	MECA
12 cm	18%	24%	-
18 cm	21%	28%	-
25 cm	21%	28%	-

Pode-se observar que o modelo de casca possui os valores de momentos fletores inferiores. Isso pode ser explicado devido a melhor distribuição de esforços que acontece neste modelo, o que não acontece no modelo formado por elementos de barra. Assim, percebe-se uma variação de 18% a 21%, dependendo da espessura, entre o modelo analítico e o modelo de casca, e uma variação de 24% a 28% para o modelo de elementos de barra. Portanto, o método analítico proposto por Araújo [1] possui uma melhor aproximação frente ao modelo numérico com elementos de barra.

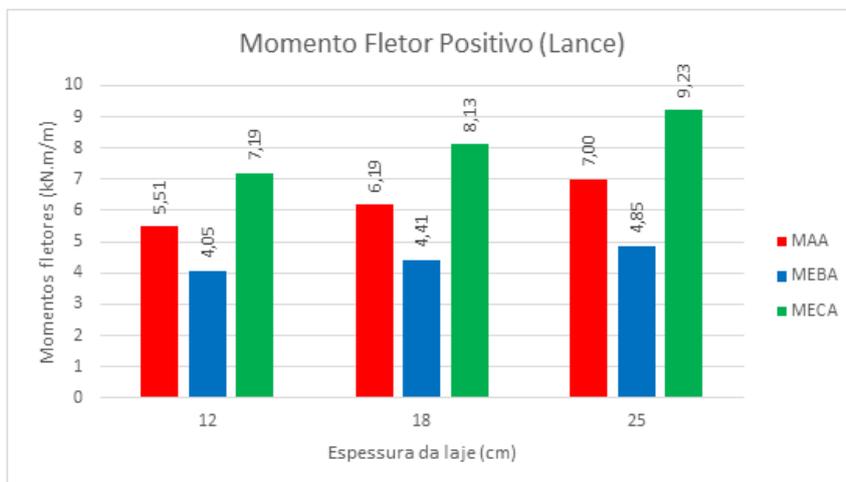


Gráfico 2. Momentos fletores positivos na região do lance.

Tabela 6. Comparativo entre modelos.

MOMENTO FLETOR POSITIVO (LANCE)			
MODELO	MAA	MEBA	MECA
12 cm	-23%	-44%	-
18 cm	-24%	-46%	-
25 cm	-24%	-47%	-

Percebe-se pelo Gráfico 2 uma coerência frente aos resultados analisados anteriormente. Como foi visto os momentos negativos na região lance-patamar nos modelos de casca, independente da espessura, foram sempre inferiores aos apresentados nos outros dois modelos, refletindo assim em maiores momentos positivos na região do lance. Mais uma vez o método analítico simplificado apresentou valores mais próximos aos obtidos pelos elementos de casca, com uma variação de -23% a -24%, ao passo que o modelo composto por elementos de barras obteve uma divergência de -44% a -47%.

Na comparação dos momentos fletores na região central do patamar, destaca-se uma aproximação do método analítico ao modelo com elementos de casca à medida que a espessura da laje aumenta e conseqüentemente os carregamentos, variando de 25% a 11%, como mostra a Tabela 7. Os modelos compostos por elemento de barra apresentaram valores bem inferiores. Isso pode ser justificado pela aproximação devido à simplificação da geometria real no modelo de barra, não refletindo os esforços apresentados pelos outros dois modelos, apresentando uma variação de -36% a -23% comparada ao modelo de casca.

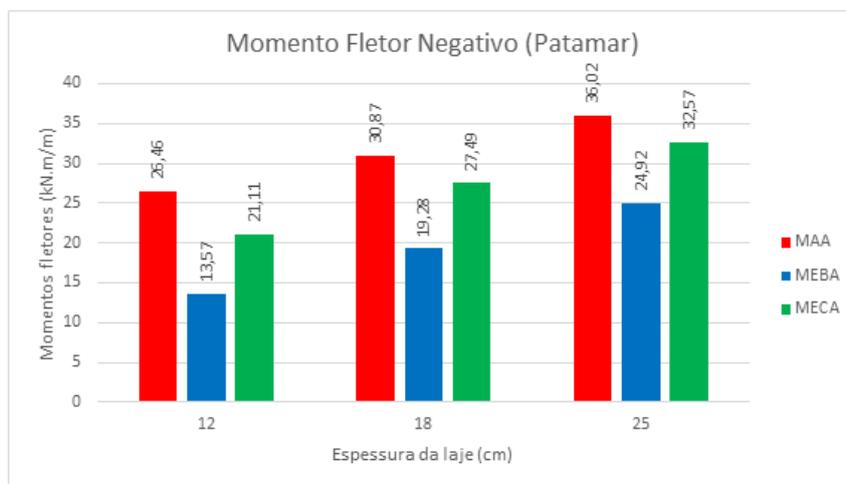


Gráfico 3. Momentos fletores negativos na região central do patamar.

Tabela 7. Comparativo entre modelos.

MOMENTO NEGATIVO (PATAMAR)			
MODELO	MAA	MEBA	MECA
12 cm	25%	-36%	-
18 cm	12%	-30%	-
25 cm	11%	-23%	-

Fazendo uma análise comparativa entre os métodos analíticos de Knijnik & Tavares [2] e Araújo [1], modelos com elementos de barra (apoiado, engastado e com continuidade) e modelos com elementos de casca (apoiado, engastado e com continuidade), observou-se na região central do patamar próximo aos lances valores relevantes de momentos fletores negativos (Figura 12).

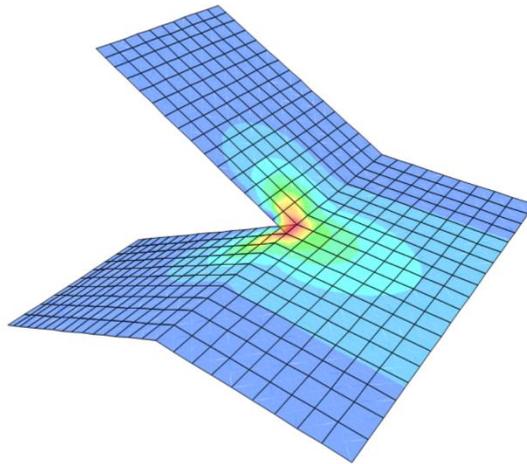


Figura 12. Concentração de esforços na região central do patamar.

A partir dos modelos propostos foram obtidos os seguintes esforços, descritos no Gráfico 4 e na Tabela 8.

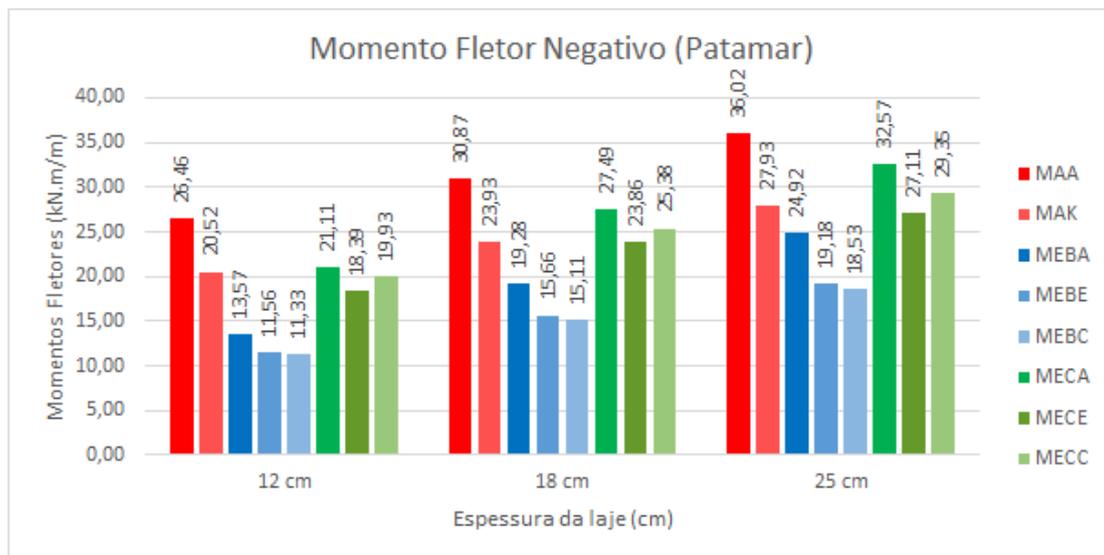


Gráfico 4. Momentos fletores positivos na região central do patamar.

Tabela 8. Comparativo entre modelos.

MODELO	MAA	MAK	MEBA	MEBE	MEBC	MECA	MECE	MECC
12 cm	33%	3%	-32%	-42%	-43%	6%	-8%	-
18 cm	22%	-6%	-24%	-38%	-40%	8%	-6%	-
25 cm	23%	-5%	-15%	-35%	-37%	11%	-8%	-

Dentre os métodos analíticos, o método de Araújo [1] apresentou maiores valores frente a todos outros modelos, independente da espessura, porém com uma maior divergência para a laje de 12 cm, 33% maior. O método de Knijnik & Tavares [2] mostrou resultados bem satisfatórios devido à uma boa aproximação aos modelos de casca, variando de -5% a 3%. Considerando os modelos compostos por elementos de barra, de uma maneira geral os esforços se mostram muito aquém ao apresentado pelos outros modelos, não sendo a melhor alternativa para obtenção de momentos nessa região, com diferenças percentuais de -43% a -15%. Em relação aos modelos compostos por elementos de casca, os esforços foram semelhantes variando de -8% a 11%, independente das vinculações. De maneira geral, os modelos que possuíam menor rigidez na vinculação, por conseguinte uma maior deformação da estrutura geraram maiores esforços na região central do patamar.

Em complemento, fez-se uma análise comparativa global dos momentos fletores máximos devido à variação de espessura na laje da escada. Para esta análise foram utilizados o método analítico simplificado de Araújo [1] e modelos numéricos de barra e casca, ambos apoiados. Esta comparação tem por objetivo demonstrar a variação dos esforços obtidos, em cada modelo, frente à mudança na espessura da laje de 12 cm para 25 cm. A seguir serão apresentados os dados de esforços de flexão em cada região da escada com a variação de espessura da laje.

A partir dos dados obtidos para os esforços presentes na interface lance-patamar (Tabela 9), o modelo de casca apresentou uma menor variação frente à alteração de espessura, e consequente aumento de carregamento. Porém, quando foi analisado o momento fletor positivo no lance, o modelo de barra apresentou menor variação. De modo geral, as maiores alterações ocorreram para os esforços presentes na região central do patamar, que se mostrou mais sensível ao incremento de carga, com variações de 27% a 46%.

Tabela 9. Comparativo entre modelos.

MOMENTO NEGATIVO (LANCE-PATAMAR)			
MODELOS	MAA	MEBA	MECA
12 cm	23,81	25,10	20,22
25 cm	32,40	34,16	26,75
VARIAÇÃO	27%	27%	24%
MOMENTO FLETOR POSITIVO (LANCE)			
MODELOS	MAA	MEBA	MECA
12 cm	5,51	4,05	7,19
25 cm	7,00	4,85	9,23
VARIAÇÃO	21%	16%	22%
MOMENTO NEGATIVO (PATAMAR)			
MODELOS	MAA	MEBA	MECA
12 cm	26,46	13,57	21,11
25 cm	36,02	24,92	32,57
VARIAÇÃO	27%	46%	35%

5.2 Deslocamentos verticais (flechas)

Na análise de deformações foram observados os deslocamentos máximos fornecidos pelo método analítico simplificado de Araújo [1] através da Equação 4, e pelos modelos compostos por elementos de barra e casca, nas diferentes vinculações, submetidos à carregamentos característicos.

Os dados foram obtidos a partir de um ponto localizado no extremo do patamar, como mostrado na Figura 13.

$$W_o = \frac{1}{E_{cs}I_c} \cdot \left(\frac{p_l c^4}{8} + \frac{Mac}{3 \cos \alpha} \right) \quad (4)$$

Onde:

E_{cs} = é o módulo secante do concreto;

$I_c = h^3/12$, em que h é a espessura da laje da escada.

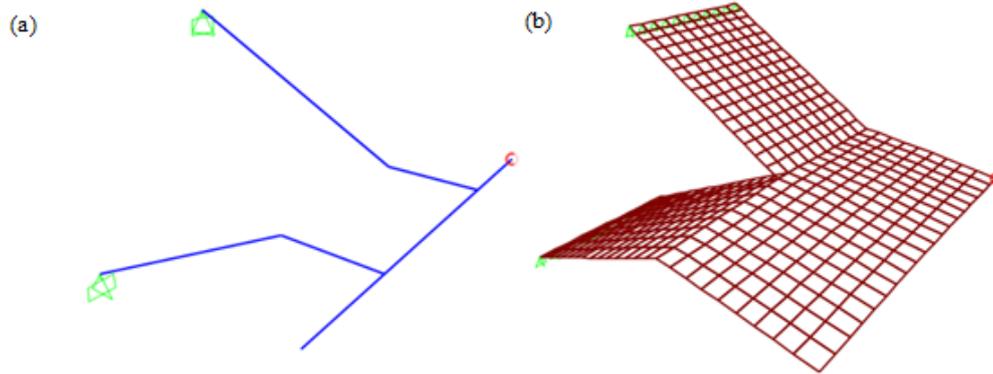


Figura 13. Localização da obtenção de flechas no (a) modelo de barra e no (b) modelo de casca.

A Tabela 10 e o Gráfico 5, mostram os valores em milímetros das deformações.

Tabela 10. Valores de flecha máxima.

MODELO	MAA (mm)	MEBA (mm)	MEBC (mm)	MEBE (mm)	MECA (mm)	MECC (mm)	MECE (mm)
12 cm	24,4	18,9	18	16,7	13,5	13,6	13,7
18 cm	8,4	10,2	9,4	8,5	5,9	5,9	5,9
25 cm	3,7	6,6	5,9	5,2	3,1	3,2	3,2

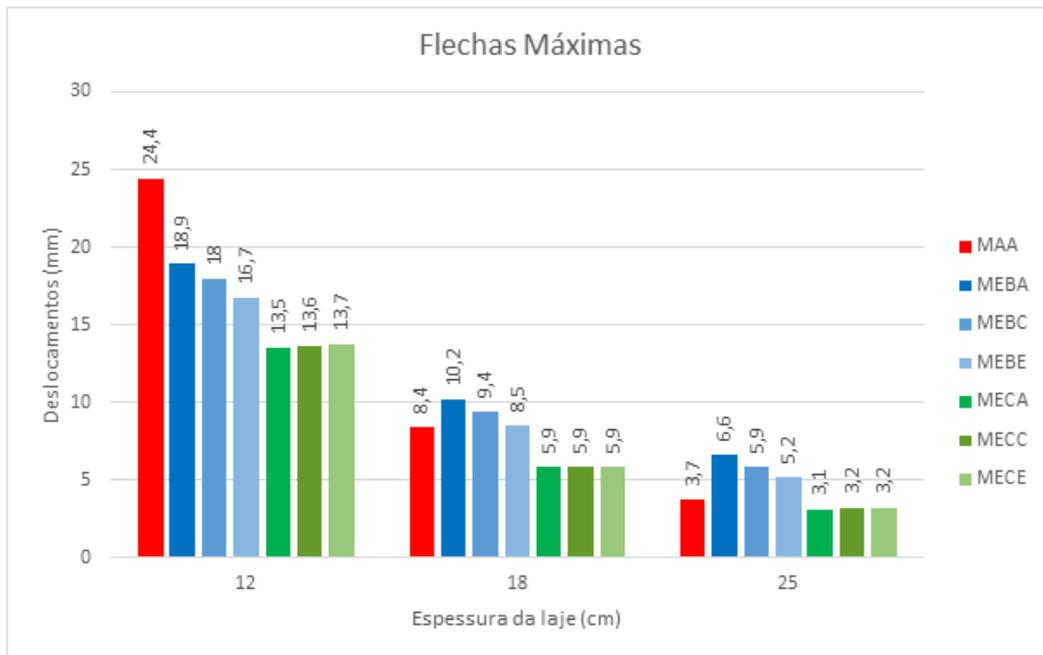


Gráfico 5. Valores de flecha máxima nos diferentes modelos.

Assim como nas comparações dos esforços de flexão, novamente tomar-se-á como base o modelo com elementos de casca. Assim, a Tabela 11 apresenta os resultados percentuais para os modelos estudados.

Tabela 11. Comparativo entre modelos.

MODELO	MAA (mm)	MEBA (mm)	MEBC (mm)	MEBE (mm)	MECA (mm)	MECC (mm)	MECE (mm)
12 cm	79%	39%	32%	23%	-1%	-	1%
18 cm	42%	73%	59%	44%	0%	-	0%
25 cm	16%	106%	84%	63%	-3%	-	0%

Em primeira análise, percebe-se uma diminuição nas deformações à medida que se tem o aumento da espessura da escada. Isso se dá pelo aumento da rigidez da estrutura, apesar do acréscimo de carga. Pode-se observar também de maneira geral que os modelos de barras são mais sensíveis à mudança de vinculação, apresentando maiores flechas para os apoios rotulados e menores para engaste; diferente dos modelos de casca que obtiveram valores bastante semelhantes, variando de -3% a 1%. Quanto ao método analítico, para menores alturas de laje, os valores de deslocamento foram bastante expressivos, superando todos os outros modelos. Porém, ao passo que a espessura aumenta, seus resultados se aproximam dos modelos de casca.

6 Conclusões

A partir dos resultados obtidos e apresentados, verifica-se que de maneira geral, ambos modelos analíticos apresentaram boa aproximação na obtenção dos momentos fletores. O método simplificado de Araújo [1] obteve uma variação máxima de 25% nos valores comparado ao modelo de casca apoiado, entretanto, se for considerado todas as situações de vinculações analisadas, essa variação cai para uma média de 20%. O que é justificável, pois métodos analíticos tendem a ser mais conservadores em relação ao modelo de casca devido à simplificação da análise da estrutura.

Apesar do método de Knijnik & Tavares [2] fornecer somente os momentos fletores na região central do patamar, próximo aos lances, em sua comparação com o modelo de casca com continuidade, seus resultados se mostraram bastante satisfatórios, com variações menores de 10%.

Ao se analisar os modelos formados por elementos de barra, constatou-se que estes divergem de certo modo dos outros modelos analisados. Isso pode ser causado devido à uma tentativa de aproximação do comportamento de uma laje através de elementos de barras com largura unitária. Assim, os momentos fletores encontrados nas interfaces piso-lance e lance-patamar apresentaram valores acima do esperado, resultando no aparecimento de fletores negativos elevados na região central do lance. Ao passo que na região central do patamar, os valores de esforços foram muito inferiores aos apresentados nos outros métodos. Isso pode refletir em uma escada superdimensionada em alguns trechos e subdimensionadas em outros.

Desta forma, comparado aos outros modelos apresentados, aqueles compostos por elementos de casca apresentaram menores valores de momento fletor, devido à uma melhor distribuição de rigidez e conseqüentemente uma melhor distribuição de esforços na estrutura. É importante salientar também que, nesse modelo é possível visualizar uma concentração de esforços na região central do patamar entre os lances, exigindo uma armadura complementar para reforço no local.

Finalmente, em relação aos deslocamentos analisados, percebe-se que apesar do incremento de carregamento, em todos os modelos existe uma redução nas flechas com o aumento da espessura da laje; o que pode ser relacionado ao aumento da rigidez da estrutura. Para menores alturas de laje, o método simplificado de Araújo [1] apresentou maior valor de deformação entre todos, contudo à medida que a espessura aumenta seus valores de flecha se tornam menores do que os modelos de barra, se aproximando do modelo com elementos de casca. Ao contrário dos modelos de barra, aqueles com elementos de casca não sofreram interferência significativa nas deformações devido à vinculação.

Referências

- [1] ARAÚJO, José Milton de. **Curso de Concreto Armado: Volume 4.** 4. ed. Rio Grande: Dunas, 2014.
- [2] KNIJNIK, A, TAVARES, J. J. A. **Escada autoportante sem apoio no patamar.** Revista Estrutura, n.81, 109-126, 1977.
- [3] CSI ANALYSIS REFERENCE MANUAL: for SAP2000[®][5], ETABS[®], SAFE[®] and CSiBridge[®], 2017.
- [4] CHRISS, S., GLOGAU, O. A., LIEBENBERG, A. C., CUSENS, A. R., KUANG, J. G. **“Discussion of the paper: Experimental Study of a Free-Standing Staircase”**, Journal of the American Concrete Institute, v. 63, 1966.
- [5] CUSENS, A. R., KUANG, J. G. **Experimental study of a free-standing staircase.** In: Journal of the American Concrete Institute, 63(5), 587-604, 1966.
- [6] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento.** Rio de Janeiro, 2014. 238 p.