

## MODELAGEM NUMÉRICA DO ENSAIO DE VIGA EM DUPLO BALANÇO UTILIZANDO UM MODELO PROBABILÍSTICO

**Mariane R. Rita**

**Magno T. Mota**

**Henrique C. C. de Andrade**

**Eduardo de M. R. Fairbairn**

**Fernando L. B. Ribeiro**

*mariane\_rita@coc.ufrj.br*

*magnomota@coc.ufrj.br*

*henriqueconde@coc.ufrj.br*

*eduardo@coc.ufrj.br*

*fernando@coc.ufrj.br*

*Programa de Engenharia Civil - Universidade Federal do Rio de Janeiro*

*Centro de Tecnologia, Ilha do Fundão, CEP: 21941-909, Rio de Janeiro, Brasil*

**Jean-Louis Tailhan**

**Pierre Rossi**

*jean-louis.tailhan@ifsttar.fr*

*pierre.rossi@ifsttar.fr*

*Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFST-TAR), Université Paris-Est.*

**Abstract.** In most published studies with the objective of characterizing the concrete fracture under tensile loads, the Double Cantilever Beam (DCB) test has been used. This test provides information that allows to determine the critical stress intensity factor ( $K_{IC}$ ) and the critical energy release rate ( $G_{IC}$ ) of concrete which are values that qualify the toughness of material. Therefore, in this work is presented a numerical model of the DCB test, performed by means of the finite element method (FEM) considering a probabilistic approach. The stochastic process is introduced in the model at the local scale of the material by considering a random distribution of the tensile strength and the local cracking energy, assuming that cracks are created within the concrete with different energy dissipation depending on the spatial distribution of constituents and initial defects. The Monte Carlo method whose main idea is to compute the results based on repeated random sampling and statistical analysis is used to statistically validate the probabilistic numerical model.

**Keywords:** Numerical Modeling, DCB test, Concrete Cracking, Probabilistic Approach

## 1 Introdução

Na literatura existem diferentes modelos disponíveis que descrevem a fissuração do concreto, considerando desde o seu início até a propagação de fissuras. Dentre os quais, existem os modelos que utilizam uma abordagem probabilística, em que propriedades mecânicas do material são distribuídas aleatoriamente nos elementos da malha, de acordo leis de distribuição estatísticas, cujos parâmetros são obtidos por meio de análise inversa de dados experimentais (Rossi and Wu [1]; Rossi et al. [2]; Rossi et al. [3]; Fairbairn et al. [4]; Tailhan et al. [5]; Tailhan et al. [6] e Tailhan et al. [7]).

No âmbito da modelagem probabilística dois tipos de formulações tem sido propostas, dependendo da escala de observação do problema a primeira possui um foco mais local e a segunda um mais no comportamento global da estrutura, são elas: o modelo discreto, com um padrão explícito de fissuração, e o modelo macroscópico ou contínuo, com um padrão semi explícito de fissuração.

O modelo discreto baseia-se em um comportamento probabilístico local elástico-frágil e faz uso de elementos de interface para a descrever as descontinuidades cinemáticas do campo de deslocamentos quando as fissuras aparecem. Esta abordagem é bem adequada para modelar padrões de fissuração a nível local. No entanto, o uso dos elementos de interface tem um efeito prejudicial quanto ao tamanho do problema, implicando em alto custo computacional quando se trata de grandes estruturas de concreto (Tailhan et al. [7]).

Por outro lado, o modelo macroscópico (semi explícito) tem sido proposto como uma alternativa para superar o problema do alto custo computacional (o sistema a ser resolvido possui menor número de equações devido a não utilização dos elementos de interface) e por possuir a característica de ser mais eficaz ao representar o comportamento global das estruturas de concreto, identificando um padrão global de fissuração.

Portanto, como neste trabalho tem-se o objetivo de simular o comportamento de um elemento estrutural submetido ao teste *Double Cantilever Beam (DCB)*, em português, teste de viga em duplo balanço, será utilizado o modelo probabilístico macroscópico. Análises tridimensionais do problema proposto são realizadas e a validação estatística dos resultados é feita por meio do procedimento de Monte Carlo, que consiste na realização de várias simulações do problema, modificando-se as propriedades aleatórias do material (de acordo com a mesmas funções de distribuição), a fim de fornecer um resultado médio dentre as análises realizadas.

O modelo foi implementado dentro do quadro do método dos elementos finitos (MEF) em uma plataforma desenvolvida e aperfeiçoada por pesquisadores do Laboratório de Modelagem Numérica, associado ao Laboratório de Estruturas e Materiais professor Lobo Carneiro (LABEST), vinculado ao programa de engenharia civil da COPPE/UFRJ. Esta plataforma é implementada em linguagem de programação FORTRAN e já foi utilizada em trabalhos publicados na literatura para diferentes aplicações (Ribeiro and Ferreira [8]; Ferreira [9]; Ainsworth et al. [10]; Silva et al. [11]; Silva et al. [12]; Rita et al. [13]; Mota et al. [14]; Rita et al. [15]; Silva et al. [16]).

## 2 Modelo Probabilístico Macroscópico de Fissuração do Concreto

A ideia básica do modelo original, desenvolvido por Rossi and Wu [1], considera que cada elemento finito é caracterizado como representativo de um volume de material heterogêneo cujo comportamento é controlado pelo seu grau de heterogeneidade ( $r_e$ ), definido como a razão entre o volume do elemento finito ( $V_e$ ) e o volume do maior agregado ( $V_g$ ). Esta heterogeneidade do material é incorporada ao modelo por meio da distribuição aleatória de propriedades mecânicas do concreto na malha de elementos finitos. Dessa forma, considera-se, portanto, que o comportamento mecânico de cada elemento finito depende do seu tamanho e está sujeito à variações aleatórias.

Quanto ao processo de fissuração, o modelo não aborda explicitamente a propagação de fissuras, ou seja, não utiliza-se uma lei de propagação de fissuras, pelo menos não no sentido de mecânica da fratura, mas trata-se de uma criação aleatória de fissuras elementares. Assim, considera-se que a propagação de macro fissuras, em um nível macroscópico, é dada como consequência da fissuração de sucessivos

elementos (Tailhan et al. [17], Rastiello et al. [18]).

Do ponto de vista elementar, o processo de fissuração induz à uma dissipação local de energia. Este processo dissipativo é matematicamente representado através de uma lei de dano isotrópica probabilística que começa a atuar quando a máxima tensão principal  $\sigma_1$  do elemento atinge o valor da resistência a tração  $f_t$  do mesmo. Neste momento, inicia-se o processo de evolução do dano e quando a quantidade de energia disponível para o elemento for totalmente dissipada, ele será considerado fissurado e sua matriz de rigidez é considerada como nula. (Rastiello [19]).

## 2.1 Formulação do Modelo

Existem diversas leis constitutivas que são utilizadas para simular o comportamento de amolecimento dos materiais. Mas neste trabalho, optou-se por fazer duas considerações: (1) que o comportamento de amolecimento do material é linear e (2) que a energia de fissuração do concreto é uma propriedade intrínseca do material.

Sendo assim, a lei constitutiva  $(\sigma, \varepsilon)$  é completamente definida pelas propriedades do material de resistência a tração ( $f_t$ ) e densidade volumétrica de energia dissipada ( $g_c$ ) (Rastiello et al. [18]). Uma técnica de regularização energética permite calcular o valor de  $g_c$  a partir da energia de fratura  $G_c$  de acordo com a Equação 1, onde  $l_e$  representa o tamanho característico elementar e é calculado como  $l_e = \sqrt[3]{V_e}$  (Bazant and Oh [20]).

$$g_c = \frac{G_c}{l_e}. \quad (1)$$

De acordo com a lei de Lemaitre, uma relação de tensão-deformação que envolva a danificação do material pode ser expressa em termos de uma relação tensão-deformação não danificada, como segue nas Equações 2 e 3.

$$\sigma = \tilde{\mathbf{E}}\varepsilon. \quad (2)$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0(1 - D), \quad (0 \leq D \leq 1). \quad (3)$$

Onde  $\tilde{\mathbf{E}}$  representa o módulo de elasticidade do material danificado e  $E_0$  o módulo do material não danificado;  $D$  é a variável que conduz a evolução do dano, caracterizada por um parâmetro de equivalente proposto por Mazars [21], e é calculada conforme a Equação 4.

$$D = 1 - \frac{\tilde{\varepsilon}_0}{\tilde{\varepsilon}^k} \left[ 1 - \frac{(\tilde{\varepsilon}^k - \tilde{\varepsilon}_0)}{(\tilde{\varepsilon}_{fi} - \tilde{\varepsilon}_0)} \right]. \quad (4)$$

Onde  $\tilde{\varepsilon}_0$  representa a deformação de inicialização do dano,  $\tilde{\varepsilon}_{fi}$  representa a deformação máxima crítica e  $\tilde{\varepsilon}^k$  representa a deformação equivalente.

Dessa forma, observa-se que quando tem-se a inicialização do dano ( $\tilde{\varepsilon}_0$ ) a variável de dano é igual a zero ( $D = 0$ ) e para o estado final de danificação ( $\tilde{\varepsilon}_{fi}$ ) a variável de dano é igual a um ( $D = 1$ ). Durante o processo de danificação ( $\tilde{\varepsilon}_0 < \tilde{\varepsilon}^k < \tilde{\varepsilon}_{fi}$ ) o valor da variável de dano é crescente até atingir o seu valor máximo ( $0 < D < 1$ ).

## 2.2 Distribuição de propriedades aleatórias

Com o intuito de descrever a heterogeneidade do material de forma probabilística, as propriedades de resistência à tração ( $f_t$ ) e a energia de fratura ( $G_c$ ) do concreto foram consideradas como variáveis aleatórias a serem distribuídas na malha de elementos finitos. Para realizar a distribuição aleatória destas variáveis, duas sub-rotinas foram implementadas, seguindo as distribuições de Weibull (Weibull [22], Weibull [23]) e lognormal, que serão descritas brevemente nas seções abaixo.

## Distribuição de Weibull

Uma variável aleatória  $x$  segue a distribuição de Weibull (com dois parâmetros) se sua função densidade de probabilidade é definida pela função  $f(x, b, c) : x \in (0, \infty] \rightarrow \mathcal{R}$ , tal como:

$$f(x, b, c) = \frac{b}{c} \left(\frac{x}{c}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x}{c}\right)^b}. \quad (5)$$

onde  $b > 0$  é chamado de parâmetro de forma que altera o comportamento da distribuição, por exemplo, para  $b < 1$  o fator exponencial da distribuição é predominante, para  $b = 1$  ela se reduz a distribuição exponencial e para  $b > 1$  o fator polinomial da distribuição é predominante; e  $c > 0$  é chamado de parâmetro de escala da distribuição.

A função de distribuição acumulada  $F(x, b, c)$  da distribuição de Weibull é dada pela Eq. 6 e sua função inversa  $F^{-1}(x, b, c)$  é dada pela Eq. 7.

$$F(x, b, c) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{c}\right)^b}. \quad (6)$$

$$F^{-1}(x, b, c) = c (\ln(1 - x))^{\frac{1}{b}}. \quad (7)$$

## Distribuição Lognormal

A distribuição lognormal também é muito utilizada e tem sido aplicada numa grande variedade de campos, incluindo-se, as ciências sociais, as ciências físicas, e engenharias (Howell and Rheinfurth [24]); sua função de densidade de probabilidade é definida por  $f(x, \mu, \sigma) : x \in (0, \infty] \rightarrow \mathcal{R}$  como segue na Eq. 8.

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\mu\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (8)$$

Onde,  $\mu$  é a média e  $\sigma$  é o desvio padrão do logaritmo natural da variável. O seu valor esperado (ou esperança matemática)  $E(X)$  e sua variância  $Var(X)$  são calculados de acordo com a Eq. 9 e Eq. 10, respectivamente.

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (9)$$

$$Var(x) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right) e^{2\mu + \sigma^2} \quad (10)$$

A variância será considerada como a medida de dispersão da distribuição aleatória e será denotada aqui como  $d_{log} = Var(X)$ .

## Métodos de Geração das Variáveis aleatórias

As sub-rotinas de geração dos valores aleatórios foram implementadas tendo como base os chamados geradores de números pseudoaleatórios que fornecem valores uniformemente compreendidos entre 0 e 1. Para isso, são utilizadas duas sub-rotinas fornecidos a partir do FORTRAN 90 (RANDOM\_NUMBER e RANDOM\_SEED).

A partir disso, para gerar números distribuídos conforme a lei de Weibull utilizou-se a técnica da inversão que é baseada na Teoria das Probabilidades. Esta técnica se resume basicamente em duas etapas: (1) geração de números aleatórios com distribuição uniforme no intervalo entre 0 e 1 ( $U(0, 1)$ ) e (2) atribuição destes números aleatórios à função inversa acumulada descrita na Eq. 7, considerando os parâmetros  $b$  e  $c$ .

Contudo, como nem todas as funções possuem uma expressão analítica para sua inversa, caso da função de densidade de probabilidade lognormal, foi necessário escolher outro método para realizar a geração aleatória dos valores da energia de fratura. Escolheu-se o método de convolução, baseado no

teorema central do limite (TCL), que em termos gerais afirma que o somatório de um grande número de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (idd), como a distribuição uniforme  $U(0,1)$ , tende aproximadamente para uma distribuição normal.

Dessa forma, utilizou-se a expressão descrita na Eq. 11 para obter um número aleatório seguindo a distribuição normal  $N(0, 1)$  e, posteriormente, realizou-se a operação descrita na Eq. 12 para gerar o número aleatório desejado, seguindo a distribuição lognormal.

$$X = \frac{\left(\sum_{i=1}^n u_i\right) - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \rightarrow N(0, 1). \quad (11)$$

Onde  $n$  é o número de variáveis aleatórias  $u_i$  e de acordo com a literatura (Atkinson and Pearce [25], Howell and Rheinfurth [24]), neste caso, pode ser satisfatoriamente considerado igual a 12.

$$Z = e^{\mu + \sigma X}. \quad (12)$$

Onde  $X$  é uma dada variável aleatória distribuída normalmente com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$ ; e  $Z$  é o número aleatório log-normalmente distribuído.

### 3 Estudo de Caso

O caso de estudo analisado neste trabalho consiste na simulação de um ensaio de viga em duplo balanço (DCB). Este teste é um método amplamente utilizado para medir a tenacidade à fratura Modo I de compósitos unidirecionais, sob condições de carga estática e cíclica (Ramamurty [26], Broughton [27]), onde uma carga de tração é aplicada ao espécime e atua em uma direção normal à superfície do entalhe.

Neste trabalho, o teste permitirá o estudo da propagação de macro fissuras em um espécime de concreto com grande dimensão (ver Figura 1) a fim de simular os efeitos mecânicos do ensaio a um nível estrutural. As características geométricas e condições do ensaio tem como base a campanha experimental realizada por Rossi [28], cujo objetivo foi estudar a aplicabilidade da mecânica linear da fratura em estruturas de concreto. Estes ensaios foram idealizados por ele após um período de desenvolvimento dos experimentos e interpretação teórica dos testes realizados inicialmente por Benkirane [29].

Devido ao fato de ter sido levado em consideração um espécime de grande dimensão (3,5m de altura e 1,1m de largura), a resposta mecânica dos testes experimentais pode ser considerada como representativa do comportamento intrínseco do material Tailhan et al. [7].

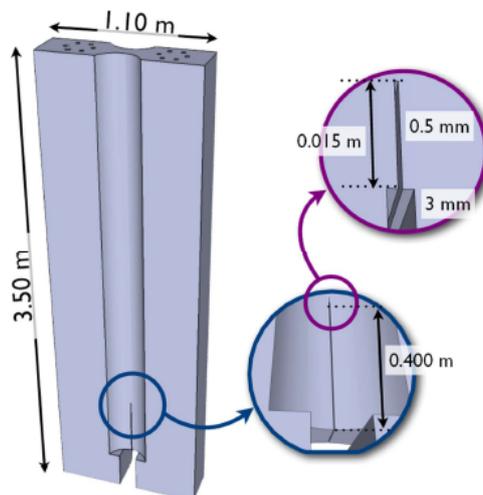


Figura 1. Características Geométricas do espécime DCB analisado. Fonte da imagem: Nader [30]).

Os dados utilizados na simulação correspondem a um concreto simples, semelhante ao descrito por Tailhan et al. [7], cuja composição está disposta na Tabela 1. As propriedades mecânicas deste material são: módulo de elasticidade  $E = 35GPa$ , resistência à compressão  $f_c = 50MPa$  e resistência à tração  $f_t = 4.0MPa$ . Para o modelo numérico utilizou-se: coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ ; parâmetros da lei de Weibull  $b = 1.0$  e  $c = 4.8$  - para a distribuição da resistência à tração; como parâmetros da distribuição log-normal, referente à energia de fratura, utilizou-se valor médio  $G_c = K_{Ic}^2/E = 1.314 \times 10^{-4}MNm/m^2$  (valor obtido experimentalmente por Rossi [28] ) e desvio padrão  $7.23 \times 10^{-4}MNm/m^2$ .

Tabela 1. Formulação do Concreto

Material Constitutivo	Quantidade ( $kg/m^3$ )
Agregados (4 - 12 mm)	1105
Areia	700
Cimento (0 - 5 mm)	400
Água	190

A malha de elementos finitos pode ser vista na Figura 2 e é composta de elementos tetraédricos (número de elementos  $numel = 19395$  e número de nós  $nnode = 4496$ ), aproximados por funções de interpolação lineares. De acordo com Tailhan et al. [7], o uso de elementos lineares em conjunto com uma formulação dissipativa dos processos de fissuração é bastante razoável. As condições de contorno são compatíveis com os ensaios experimentais e os deslocamentos foram aplicados nos pontos em vermelho indicados na Figura 2.

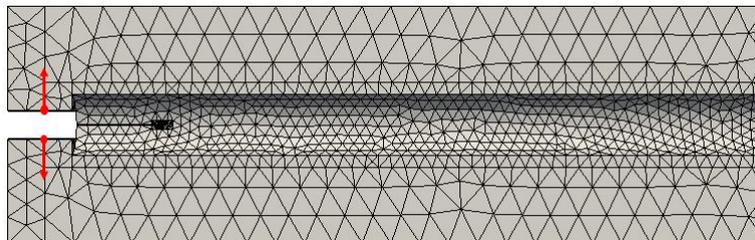


Figura 2. Características da malha de elementos finitos.

#### 4 Resultados e Discussões

Os deslocamentos aplicados durante as simulações possuem incremento de  $0.25 \times 10^{-3}dm$  num número total de 50 incrementos para cada amostra. A resposta do comportamento global da estrutura é obtida pelo método de Monte Carlo onde, neste caso, foram realizadas 10 simulações do ensaio. Estes resultados são apresentados na Figura 3 por meio das curvas de carga  $\times$  deslocamento.

Neste gráfico, as curvas em vermelho representam as respostas do comportamento mecânico das simulações numéricas, os círculos em negrito fornecem o resultado médio destas simulações numéricas e a curva em negrito representa o resultado experimental obtido por Rossi [28].

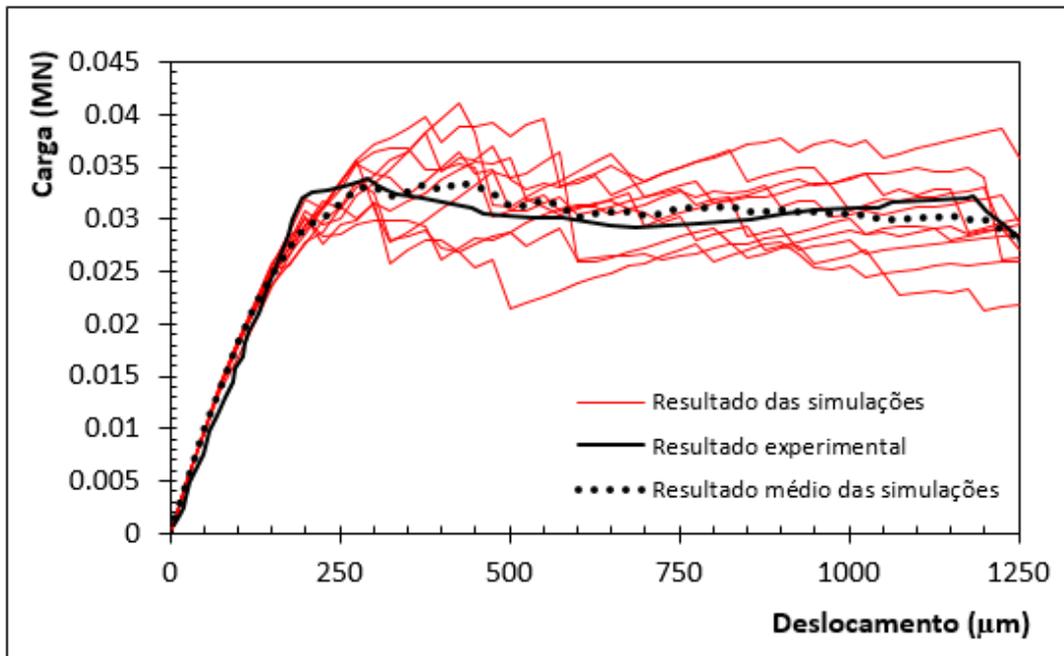


Figura 3. Resposta do comportamento global das simulações do espécime DCB.

Pode-se considerar que a correlação entre o resultado experimental e a resposta global média obtida com simulações do modelo macroscópico probabilístico é satisfatória, tendo em vista que o resultado experimental encontra-se permeado entre o conjunto de respostas numéricas e está suficientemente próximo da resposta média destas análises.

Para ilustrar o processo de fissuração do modelo, apresenta-se na Figura 4 a resposta de uma das amostras simuladas, representando o estado de danificação dos elementos ao final da simulação do ensaio (malha deformada com escala de 50 vezes). Em vermelho tem-se os elementos que atingiram o valor máximo do dano ( $D = 1$ ) e, portanto, são considerados danificados (fissurados); em azul escuro tem-se elementos cuja máxima tensão principal não atingiu o valor da resistência à tração, distribuída aleatoriamente, ( $\sigma_1 < f_t \Rightarrow D = 0$ ) e os demais indicam elementos que entraram em processo de danificação mas ainda não são considerados fissurados ( $0 < D < 1$ ).

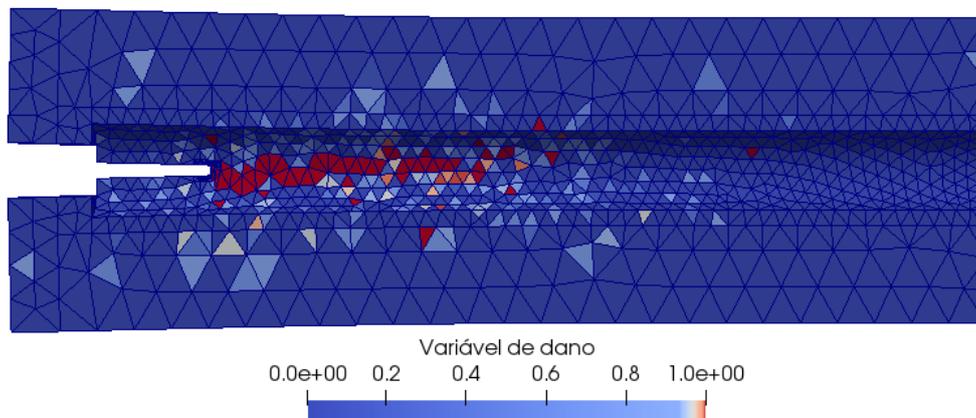


Figura 4. Exemplo do padrão de fissuração obtido com o modelo probabilístico macroscópico.

## 5 Conclusão

Este trabalho apresenta um modelo probabilístico macroscópico de fissuração do concreto que foi utilizado para a simulação do ensaio de viga em duplo balanço, em um espécime de grande dimensão, a fim de representar o comportamento estrutural do material. O modelo é probabilístico no que se refere à incorporação da heterogeneidade característica do material por meio da distribuição aleatória das propriedades mecânicas de resistência à tração e energia de fissuração. No nível elementar o modelo também considera uma dissipação local de energia que tem por objetivo representar macroscopicamente o consumo local de energia para a criação e propagação das fissuras, considerado como difuso nos elementos finitos até a sua falha, portanto, aleatório.

Verifica-se através dos resultados expostos que o modelo probabilístico aqui proposto, que faz utilização de uma abordagem de dano acoplada com elementos lineares pode ser eficientemente utilizado para representar o comportamento global de estruturas de concreto, fornecendo uma descrição suficiente das macro fissuras envolvidas nos processos de fissuração.

No entanto, deve-se salientar que os resultados aqui apresentados não representam em sua totalidade as características do concreto analisado, eles apenas fornecem uma boa indicação do comportamento mecânico do mesmo. Pois para se obter resultados precisos e condizentes de fato com o material se faz necessária a realização de uma análise inversa, tomando como base os resultados experimentais apresentados por Rossi [28], com o intuito estimar adequadamente os parâmetros das leis de distribuição estatísticas. Pois é através dessas funções que a heterogeneidade intrínseca do material é caracterizada e relacionada com o volume dos elementos finitos.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001; do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil (CNPq) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro - FAPERJ.

## Referências

- [1] Rossi, P. & Wu, X., 1992. Probabilistic model for material behavior analysis and appraisalment of concrete structures. *Magazine of Concrete Research*, vol. 44, pp. 271–280.
- [2] Rossi, P., Wu, X., Le Maou, F., & Belloc, A., 1992. Effet d'échelle sur le comportement du béton en traction. *BLPC*, vol. 182, pp. 11–20.
- [3] Rossi, P., Wu, X., Le Maou, F., & Belloc, A., 1994. Scale effect on concrete in tension. *Materials and Structures*, vol. 27, pp. 437–444.
- [4] Fairbairn, E., Q., G., & Ulm, J., 1999. An inverse problem analysis for the determination of probabilistic parameters of concrete behavior modeled by a statistical approach. *Materials and Structures*, vol. 32, pp. 9–13.
- [5] Tailhan, J.-L., Rossi, P., & Dal Pont, S., 2008. Macroscopic probabilistic modelling of cracking processes in concrete structures. In *Proceedings of World Conference on Computational Mechanics - European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering (WCCM-ECCOMAS)*, Venice, Italy.
- [6] Tailhan, J.-L., Rossi, P., Phan, T., & Foulliaron, J., 2012. Probabilistic modelling of crack creation and propagation in concrete structures: some numerical and mechanical considerations. In *Proceedings of Numerical Modeling Strategies for Sustainable Concrete Structures (SSCS)*, Aix-en-Provence, France.

- [7] Tailhan, J.-L., Rossi, P., Phan, T., Rastiello, G., & Foulliaron, J., 2013. Multiscale probabilistic approaches and strategies for the modelling of concrete. In *Proceedings of FRAMCOS-8*, Toledo, Spain.
- [8] Ribeiro, F. L. B. & Ferreira, I. A., 2007. Parallel implementation of the finite element method using compressed data structures. *Computational Mechanics*, vol. 41, pp. 31–48.
- [9] Ferreira, I., 2008. *Solução em paralelo de um modelo termo-químico-mecânico para concreto jovem*. PhD thesis, Programa de Engenharia Civil, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- [10] Ainsworth, G., Ribeiro, F., & Magluta, C., 2011. A parallel subdomain by subdomain implementation of the implicitly restarted arnoldi/lanczos method. *Computational Mechanics*, vol. 48, pp. 563–577.
- [11] Silva, A. B., Telles, J. C. F., Fairbairn, E. M. R., & Ribeiro, F., 2015. A general tangent operator applied to concrete using a multi-surface plasticity model. *Computers and Concrete, an International Journal (Print)*, vol. 16, pp. 329–342.
- [12] Silva, A. B. C. G., Laszczyk, J., Wrobel, L. C., Ribeiro, F. L. B., & Nowak, A. J., 2016. A thermoregulation model for hypothermic treatment of neonates. *MEDICAL ENGINEERING & PHYSICS*, vol. 38, pp. 988–998.
- [13] Rita, M., Fairbairn, E., Ribeiro, F., Andrade, H., & Barbosa, H., 2018a. Optimization of mass concrete construction using a twofold parallel genetic algorithm. *Applied Sciences*, vol. 8.
- [14] Mota, M. T., Rita, M. R., Fairbairn, E., & Ribeiro, F., 2018. Reprodução do comportamento de amolecimento do concreto por meio de modelo probabilístico tridimensional de fissuração. In *Anais do XIII SIMMEC 2018 - Simpósio de Mecânica Computacional*, Vitória, Brasil.
- [15] Rita, M. R., Mota, M. T., Fairbairn, E., & Ribeiro, F., 2018b. Verificação de efeito escala em concreto sob tração utilizando um modelo probabilístico. In *Anais do XIII SIMMEC 2018 - Simpósio de Mecânica Computacional*, Vitória, Brasil.
- [16] Silva, A. B. C. G., Wrobel, L. C., & Ribeiro, F. L. B., 2018. A thermoregulation model for whole body cooling hypothermia. *JOURNAL OF THERMAL BIOLOGY*, vol. 78, pp. 122–130.
- [17] Tailhan, J.-L., Dal Pont, S., & Rossi, P., 2010. From local to global probabilistic modeling of concrete cracking. *Annals of Solid and Structural Mechanics*, vol. 1, pp. 103–115.
- [18] Rastiello, G., Tailhan, J.-L., Rossi, P., & Dal Pont, S., 2015. Macroscopic probabilistic cracking approach for the numerical modelling of fluid leakage in concrete. *Annals of Solid and Structural Mechanics*, vol. 7, pp. 1–16.
- [19] Rastiello, G., 2013. *Influence de la fissuration sur le transfert de fluides dans les structures en béton. Stratégies de modélisation probabiliste et étude expérimentale*. PhD thesis, Université Paris-Est, IFSTTAR, Paris, France.
- [20] Bazant, Z. & Oh, B., 1983. Crack band theory for fracture of concrete. *Material and Structures*, vol. 3, pp. 155–177.
- [21] Mazars, J., 1984. *Application de la Mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de Structure*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Laboratoire de Mécanique et Technologie, Paris, France.
- [22] Weibull, W., 1939. A statistical theory of the strength of materials. In *Proceedings of The Royal Swedish Institute for Engineering Research*.
- [23] Weibull, W., 1951. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of applied mechanics*, vol. 18, pp. 293–297.

- [24] Howell, L. W. & Rheinfurth, M. H., 1982. Generation of pseudo-random numbers. Technical Report NASA Technical Paper 2105, NASA.
- [25] Atkinson, A. C. & Pearce, M. C., 1976. The computer generation of beta, gamma and normal random variables. *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 139, pp. 431–461.
- [26] Ramamurty, U., 2001. Mechanical testing methods of fibers and composites. *Encyclopedia of Materials: Science and Technology (Second Edition)*, pp. 5271–5274.
- [27] Broughton, W., 2012. *Testing the mechanical, thermal and chemical properties of adhesives for marine environments*. Adhesives in Marine Engineering. Woodhead Publishing Series in Welding and Other Joining Technologies.
- [28] Rossi, P., 1988. *Fissuration du béton: du matériau à la structure-application de la mécanique lineaire de la rupture*. PhD thesis, L'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France.
- [29] Benkirane, M., 1982. *Propagation d'une fissure dans le béton précontraint-interaction avec des armatures passives*. PhD thesis, Université de technologie de Compiègne, Compiègne, France.
- [30] Nader, C., 2017. *A Multi-Scale Strategy for the Probabilistic Modeling of Reinforced Concrete Structures*. PhD thesis, Université Paris-Est, IFSTTAR, Paris, France.