

ANÁLISE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO BASEADA NA ABORDAGEM MOMENTO-ROTAÇÃO

Gilcyvania Castro Corvelo Costa

Daniel Carlos Taissum Cardoso

gilcyvania@gmail.com

dctcardoso@puc-rio.br

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rua Marquês de São Vicente 225, 22451-900, RJ, Rio de Janeiro, Brasil

Resumo. Neste trabalho, um modelo numérico para análise de vigas de concreto armado estaticamente determinadas é desenvolvido com base na abordagem momento-rotação para avaliar a rigidez e a flexibilidade do elemento pós fissuração. Essa abordagem é baseada no deslocamento de corpo rígido de um comprimento de prisma entre fissuras e nos mecanismos de interação parcial. Esses mecanismos retratam efeitos importantes que tem como base a fissuração do concreto e o deslizamento entre interfaces, sendo fundamentados em expressões que utilizam propriedades adicionais dos materiais. A propriedade *bond-slip* da interface é base para o mecanismo de enrijecimento à tração, enquanto que o mecanismo de amolecimento do concreto é tratado por meio de expressões embasadas na teoria do atrito-cisalhamento. O modelo numérico apresentado permite obter a capacidade resistente da seção crítica do elemento considerando os efeitos supracitados, além de apresentar uma resposta carga-deslocamento para vigas. Por fim, os resultados numéricos são comparados com resultados de ensaios experimentais disponíveis na literatura, além de serem confrontados com resultados oriundos de uma análise baseada na premissa de interação completa entre materiais.

Palavras-chave: Concreto armado, Rigidez, Abordagem momento-rotação, Interação parcial.

1 Introdução

A análise de estruturas de concreto armado por meio de modelos mecânicos tem sido objeto de estudo a partir de diversas abordagens. Para isso, tal análise vem sendo aprimorada cada vez mais para considerar fenômenos importantes que ocorrem no concreto. Além disso, com o surgimento de novos produtos, como o concreto com armaduras ou reforços não metálicos, a criação ou atualização de códigos normativos é imprescindível. A fim de proporcionar rapidez, economia e segurança no desenvolvimento dessas normas, estudar modelos mecânicos faz-se necessário para o desenvolvimento de modelos numéricos ou analíticos, pois resulta na diminuição de modelos empíricos ou semi-empíricos dependentes de condições de contorno específicas de ensaios.

Com o intuito de abranger pontos importantes, conforme citados acima, apresenta-se nesse trabalho uma abordagem baseada em deslocamentos de corpo rígido, nomeada momento-rotação ($M - \theta$). A mesma incorpora dois fenômenos de interação parcial que impactam significativamente no comportamento à flexão de elementos de concreto armado. Os fenômenos inseridos por meio da abordagem são: a formação e crescimento de fissuras no concreto, levando à contribuição do concreto entre fissuras, e a formação de cunhas de concreto, que leva à deformações residuais de compressão. Sendo assim, a abordagem momento-rotação é a base principal para o modelo numérico implementado para análise de vigas de concreto armado, que utiliza ainda princípios da analogia da viga conjugada.

2 Conceitos Básicos e Fundamentação da Abordagem

O modelo numérico apresentado permite avaliar o acréscimo de rigidez e de ductilidade conferido a um elemento de concreto armado ao se considerar, por meio da abordagem momento-rotação, o comportamento pós-pico do concreto à tração e à compressão na análise de vigas.

Para isso, relações constitutivas pré-pico também devem ser especificadas e estas são obedecidas até que o concreto atinja as resistências de pico à tração, formando a primeira fissura, e à compressão, que forma cunhas de concreto. As relações utilizadas na implementação são as sugeridas pela norma brasileira, NBR 6118 [1].

No entanto, com a abertura da fissura e com a formação da cunha de concreto, ou seja, quando o concreto atinge sua tensão de pico de tração e de compressão, tem-se que as relações constitutivas de amolecimento passam a ser válidas. Inserir tais relações no modelo, levando em conta os deslizamentos que ocorrem nas interfaces dos materiais, e que produzem a redução de tensão com o aumento da deformação, significa considerar em sua formulação mecanismos de interação parcial. Sendo, portanto, os fenômenos de interação parcial aqueles que envolvem deslizamentos entre interfaces, seja uma interface concreto-concreto ou uma interface armadura-concreto, o que contrapõem a uma análise de aderência perfeita, chamada de interação completa.

Os efeitos dos fenômenos de interação parcial como a contribuição à tração do concreto entre fissuras e o acréscimo de deformações residuais à compressão são inseridos matematicamente no modelo a partir dos mecanismos de interação parcial de enrijecimento à tração (do inglês *Tension Stiffening*) e de amolecimento do concreto (do inglês *Concrete Softening*), respectivamente. O entendimento desses mecanismos é fundamental para compreensão da abordagem momento-rotação.

2.1 Mecanismo de Enrijecimento à Tração

O mecanismo de enrijecimento à tração avalia de forma quantitativa a contribuição do concreto entre fissuras e, conseqüentemente, possibilita determinar o acréscimo de rigidez conferido a um elemento de concreto. Além disso, o mecanismo permite obter a abertura e espaçamento entre fissuras, e a identificar o estágio de formação e estabilização das mesmas. Esse mecanismo está diretamente associado ao deslizamento concreto-armadura e a conseqüente abertura de fissuras.

Essa contribuição do concreto é obtida a partir da transferência de tensão do concreto entre faces

fissuradas por meio da barra que constitui a armadura. Essa transferência, em suma, depende do diâmetro da barra do concreto circundante e da qualidade da aderência entre o concreto e o material que constitui a barra.

Os deslizamentos são convertidos em tensão por meio das relações *bond-slip*, que é uma propriedade constitutiva da interface e que representa a capacidade de ligação entre dois materiais. As relações *bond-slip* são inseridas matematicamente no mecanismo de enrijecimento à tração, que é desenvolvido a partir da simulação de um ensaio de arrancamento de barra em um prisma, como é encontrado nos estudos de Gupta e Maestrini [2] e Muhamad *et al.* [3].

A relação *bond-slip* é dependente de inúmeros fatores, como o tratamento superficial, diâmetro e módulo de elasticidade da barra, além da resistência do concreto. Sendo assim, a relação pode assumir diversos formatos que podem ser matematicamente idealizados a partir de modelos linear ascendente ou descendente, bilinear ou não linear. Seguindo as sugestões dos trabalhos de Muhamad *et al.* [3], Taheri e Barros [4] e Ohelers *et al.* [5], é utilizado nesse estudo um modelo idealizado linear ascendente, como mostra a Figura 1, cujo resultados são bastante confiáveis para situações em serviço. Tal modelo é definido conforme a expressão a seguir, em que k_e é o principal parâmetro.

$$\tau = k_e s \quad (1)$$

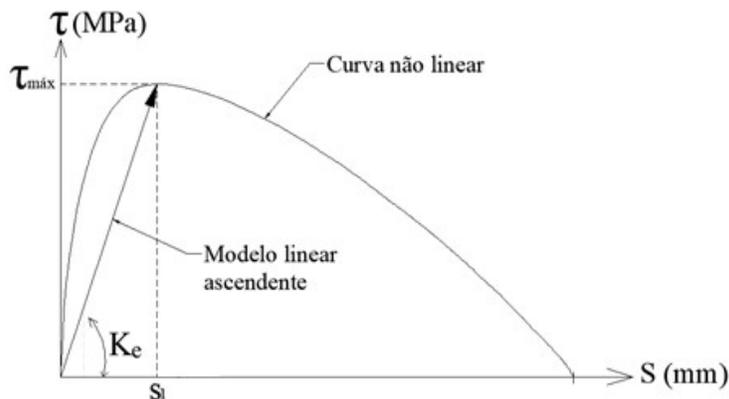


Figura 1. Modelo *bond-slip* linear ascendente idealizado (Adaptado – Taheri e Barros [4])

O mecanismo é idealizado a partir da simulação de um ensaio de tração em prisma, como mostra a Figura 2. A figura ainda apresenta as considerações feitas na formulação do mecanismo, como equilíbrio de forças normais na seção transversal e de forças cisalhantes no comprimento dx ($\tau L_p/A_c$) na interface entre materiais.

Em síntese, o mecanismo resulta em uma força de contribuição do concreto que depende do deslizamento sofrido na face fissurada. Tal deslizamento está relacionado a abertura de fissuras e as propriedades da barra e concreto, como mostra a equação (11). A obtenção dessa equação se dá pela solução da equação diferencial que descreve o deslizamento que ocorre na face fissurada.

Esse deslizamento é de suma importância para o completo entendimento do mecanismo, pois refere-se ao deslocamento relativo entre concreto e barra. Não sendo importante, portanto, quanto barra e concreto deslocam individualmente, mas sim o deslizamento na face fissurada, que se configura como a metade da abertura da fissura.

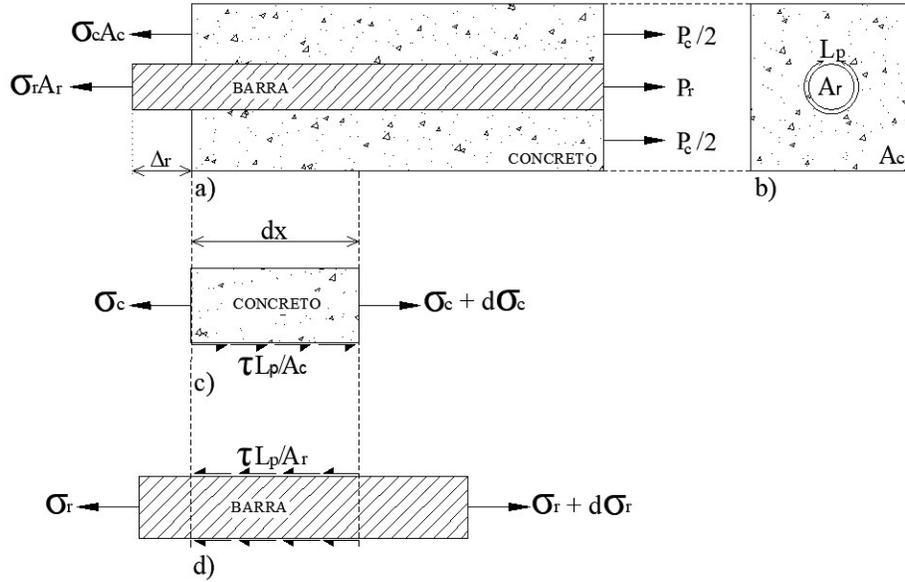


Figura 2. a) Prisma infinitamente longo; b) Seção transversal do prisma; c) Equilíbrio na interface do concreto; d) Equilíbrio na interface da barra (Adaptada – Muhamad *et al.* [3])

A Figura 2.a) apresenta um prisma de concreto armado carregado axialmente sob tração uniforme; a Figura 2.b) mostra a seção transversal do prisma evidenciando a área de concreto circundante, A_c . A barra está sujeita a uma força de arrancamento P_r , que induzirá um deslizamento regido pela lei *bond-slip* característica da interface concreto-barra. Esse deslizamento é obtido pelo deslocamento relativo entre concreto e barra (Equação (2)) e a deformação é a primeira derivada do deslocamento (Equação (3)):

$$\Delta_r = \delta = u_r + u_c \quad (2)$$

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{du_r}{dx} + \frac{du_c}{dx} \quad (3)$$

Diferenciando a expressão que rege os deslocamentos (3), deve-se resolver a Equação Diferencial Ordinária (EDO) a seguir, sendo A_r a área da seção transversal da barra; L_p o perímetro da barra e, E_r e E_c os módulos de elasticidade do material da barra e do concreto, respectivamente.

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{1}{E_r} \left(\frac{\tau L_p}{A_r} \right) + \frac{1}{E_c} \left(\frac{\tau L_p}{A_c} \right) \quad (4)$$

Sendo beta (β) expresso em (5), é possível obter a expressão (6) para inserir uma relação *bond-slip* qualquer.

$$\beta = \frac{L_p}{A_r} \left(\frac{1}{E_r} + \frac{A_r}{E_c A_c} \right) \quad (5)$$

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} - \beta k_e \delta = 0 \quad (6)$$

A solução da EDO é dada pela Equação (7). Nesta, A e B são constantes de integração e λ um parâmetro dependente das propriedades dos materiais e do formato da lei *bond-slip*.

$$\delta(x) = A \cosh(\lambda x) + B \sinh(\lambda x) \quad (7)$$

$$\lambda^2 = \beta k_e \quad (8)$$

Substituindo a expressão (7) na expressão linear da relação *bond-slip*, tem-se:

$$\tau(x) = k_e [A \cosh(\lambda x) + B \sinh(\lambda x)] \quad (9)$$

- Soluciona-se a EDO para as condições de contorno enunciadas a seguir e como mostra a Figura 3.
- Deformações no concreto são tão pequenas a ponto de serem negligenciadas junto à face fissurada ($x = 0$);
 - O deslizamento e a diferença entre deformação nulos no centro do prisma ($x = S_p$).

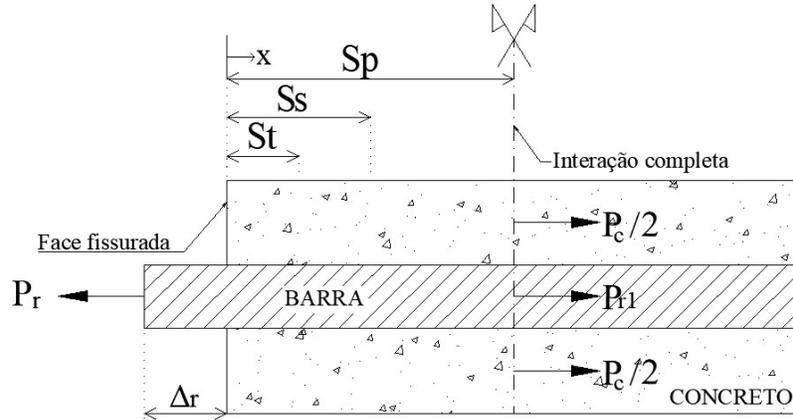


Figura 3. Condições de contorno (Adaptada – Muhamad *et al.* [3])

Em um prisma continuamente carregado, as fissuras continuam a surgir (estágio de formação de fissuras) até o momento em que não aparecem fissuras novas e as existentes se estabilizam (estágio de estabilização de fissuras) e passam apenas a apresentar aumento de sua abertura (w). Portanto, considerando o prisma de tamanho S_p (delimitação pelas fissuras primárias), submetido a um carregamento ainda no estágio de formação de fissuras, surgirá então a formação de uma fissura secundária (S_s) localizada em $S_s = S_p/2$. Estendendo a mesma ideia para a formação de uma fissura terciária localizada no ponto intermediário do comprimento de prisma S_s , tem-se então um novo prisma de tamanho $S_t = S_s/2$.

Portanto, a solução da EDO pode ser direcionada para a consideração de um prisma com surgimento de fissuras primárias, secundárias ou terciárias. Conforme afirma Haskett *et. al* [6], a consideração de uma fissura primária leva a resultados similares aos obtidos considerando múltiplas fissuras. Sendo assim, nesse artigo, a implementação é desenvolvida considerando o surgimento de fissuras primárias, sendo a solução da EDO conduzida nesse sentido.

Dessa forma, a partir dos equilíbrios impostos na seção e interface (Figura 2), da solução da EDO e encontrando as constantes de integração, chega-se a força de contribuição do concreto entre fissuras (P_{cont}) (Equação (11)). A Equação (11 é dependente do deslizamento na face fissurada na posição da barra (Δ_r); da relação tensão-abertura de fissuras ($\sigma_{ct}(w)$); dos módulos de elasticidades dos materiais (E_c e E_r); da área da seção da barra (A_r) e do parâmetros λ , expresso em (8). Além disso, ela é oriunda da expressão (10), sendo P_c é a parcela de contribuição do concreto; P_r a força de tração que atua na barra na face fissurada e P_{r1} a parcela resistida pela barra na região de interação completa. Maiores detalhes a respeito da solução podem ser encontradas em Costa [7].

$$P_c = P_r - P_{r1} \quad (10)$$

$$P_{cont} = \frac{(\Delta_r \lambda E_c + 0,96 \sigma_{ct}(w)) A_r E_r}{0,96 E_c} \quad (11)$$

2.2 Mecanismo de Amolecimento do Concreto

A relação constitutiva do concreto à compressão é essencial para qualquer modelagem estrutural. As propriedades do trecho ascendente são bem definidas na literatura, sendo portanto, as propriedades do trecho de amolecimento do concreto o foco principal de diversas pesquisas recentes. De acordo com Visintin [8], as propriedades do amolecimento do concreto podem ser obtidas com base na teoria atrito-cisalhamento, em que se considera a formação de cunhas de concreto delimitadas pela formação e alargamento de uma fissura localizada à uma inclinação de ângulo φ formado com a vertical (Figura 4). Tal ângulo, conforme Haskett *et al.* [9], varia entre 26° e 38°, sendo adotado nesse trabalho o valor de 37°, conforme é sugerido no estudo de Taheri e Barros [4].

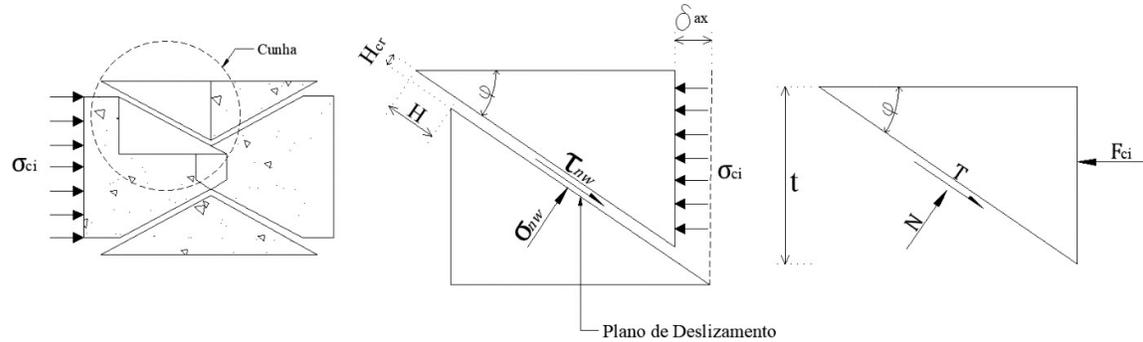


Figura 4. Elemento de concreto sob compressão e as forças atuantes no plano deslizante

Com a formação das cunhas de concreto, as propriedades do trecho de amolecimento podem ser definidas conforme é apresentado na Figura 4. São elas: deslocamento relativo tangencial (H) no plano da cunha; abertura da fissura delimitante da cunha (H_{cr}); tensão cisalhante (τ_{nw}) e normal (σ_{nw}) atuantes no plano de deslizamento.

Visintin [8] afirma que o deslizamento atuante no plano de formação da cunha é responsável pela diminuição da tensão axial no trecho de amolecimento. Devido ao deslizamento, há também o aumento da contração axial (δ_{ax}), que por sua vez, é responsável pelo aumento da deformação axial no trecho de amolecimento do concreto.

A determinação do deslocamento relativo tangencial, H , pode ser feita conforme procedimento descrito por Taheri e Barros [4]. Esta depende da contração axial δ_{ax} , do ângulo φ e da abertura H_{cr} . Porém, devido ao insignificante valor de H_{cr} , este é desprezado, resultando em (12):

$$H = \frac{\delta_{ax}}{\cos \varphi} \quad (12)$$

Já para determinar a tensão cisalhante atuante no plano de deslizamento, adota-se a expressão matemática desenvolvidas por Visintin [8], que dependem da tensão de pico da relação $\sigma \times \varepsilon$ do concreto à compressão:

$$\tau_{nw} = \left[\left(-30,142 + 51,623 \frac{\sigma_{nw}}{\sigma_{cc,p}} \right) H \right] \left(\frac{\sigma_{cc,p}}{30} \right)^{0,91} + 0,497 \sigma_{cc,p} \quad (13)$$

Com a expressão para tensão cisalhante, a tensão normal é facilmente obtida geometricamente:

$$\sigma_{nw} = \tau_{nw} \tan \varphi \quad (14)$$

Conseqüentemente, também é possível obter as componentes (força normal - N e força cisalhante - T) de forças internas atuantes na cunha, como mostra a Figura 4. Com as componentes de forças internas é possível obter a força resultante (F_{ci}) e sua correspondente tensão compressiva (σ_{ci}) que atua na cunha e que corresponde ao trecho de amolecimento da relação constitutiva.

2.3 Fundamentação da Abordagem Momento-Rotação

A abordagem momento-rotação corresponde a um modelo mecânico em que é possível inserir mecanismos fundamentais para a avaliação da rigidez de elementos fletidos após a abertura de fissuras, permitindo uma análise mais completa de elementos de concreto.

A abordagem momento-rotação trata-se de um modelo mecânico baseado em deslocamentos discretos (rotações) que ocorrem na seção transversal (face) fissurada. O modelo avalia a rigidez de elementos fletidos após a abertura de fissuras a partir da consideração dos mecanismos de interação parcial. As rotações incrementadas são responsáveis pelos deslocamentos de corpo rígido que o prisma idealizado (Figura 5) está sujeito.

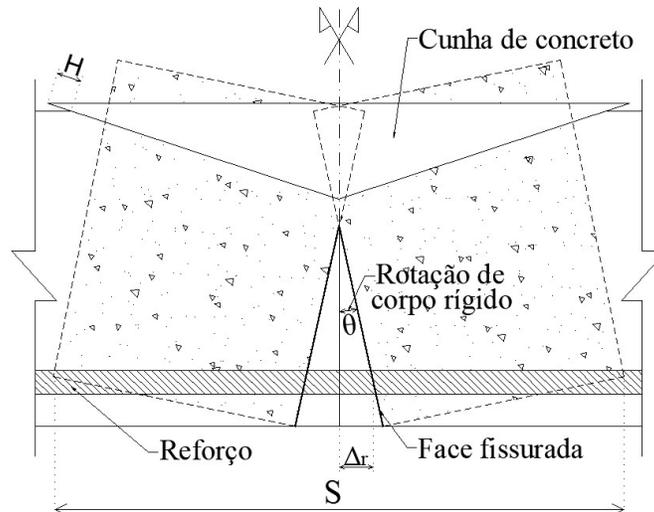


Figura 5. Mecanismo idealizado da rotação de corpo rígido do prisma de concreto

A principal diferença entre a abordagem momento rotação e momento-curvatura, é que a última é baseada na hipótese da perfeita aderência entre materiais, o que configura em uma análise de interação completa. Além disso, por conta da perfeita aderência, os deslocamentos são contínuos, o que leva a diversos autores como Visintin *et al.* [10], Haskett *et al.* [6], Oehlers *et al.* [5], classificá-la como uma abordagem bidimensional, enquanto que a abordagem momento-rotação é nomeada como sendo tridimensional.

O prisma idealizado, cujo comprimento S equivale ao espaçamento entre fissuras, é formado a partir do surgimento da fissura principal. Na face dessa fissura principal as rotações do modelo são incrementadas.

Segundo Oehlers *et al.* [11], antes de iniciar os mecanismos de interação parcial, a abordagem momento-rotação fornece exatamente os mesmos resultados de uma análise momento-curvatura. Uma vez determinado o diagrama momento-rotação, a obtenção do diagrama momento-curvatura equivalente é facilmente realizada. Sendo assim, para fins de comparação e validação, são também apresentados resultados de uma implementação numérica do modelo de análise de vigas baseado em interação completa, ou seja, utilizando os diagramas momento-curvatura. Detalhes sobre a implementação do diagrama momento-curvatura são apresentados por Costa [7].

A fundamentação do modelo mecânico de momento-rotação é idealizada na Figura 6 e é discutida por Haskett *et al.* [6]; Ali *et al.* [12]; Haskett *et al.* [13]; Muhamad *et al.* [14]; Taheri e Barros [4]; Visintin *et al.* [10]; Haskett *et al.* [15]. Ela é baseada em três princípios fundamentais: no deslocamento de corpo rígido da cunha em relação ao prisma de concreto e da face fissurada, e nos dois mecanismos de interação parcial: enrijecimento à tração e amolecimento do concreto (OEHLERS *et al.* [11]).

3 Implementação Numérica

Nessa seção são apresentados os algoritmos utilizados na implementação do modelo numérico de análise de vigas de concreto armado baseado na abordagem momento-rotação. A priori, apresenta-se o algoritmo utilizado para obtenção da relação momento-rotação, onde a partir das rotações incrementadas, momentos resistentes correspondentes são calculados, além de ser realizada a transformação das rotações em curvaturas. Posteriormente, apresenta-se o algoritmo utilizado para a implementação da análise de vigas por meio da analogia da viga conjugada, que utiliza as curvaturas obtidas da primeira implementação, e tem como objetivo o cálculo dos deslocamentos nos pontos de discretização da viga.

As implementações foram desenvolvidas na plataforma MATLAB R2018b [16]. Os algoritmos foram desenvolvidos para seções retangulares, para flexão composta normal e tendo como convenção de sinais para as tensões de tração e compressão, negativo e positivo, respectivamente. O modelo de momento-rotação permite a avaliação da rigidez e da capacidade resistente seccional, além do comportamento em termos de abertura de fissuras, por meio dos resultados de momento-normal-curvatura. Apesar da implementação ser válida para casos de flexão composta normal, destaca-se que as aplicações nesse trabalho foram realizadas para flexão simples.

3.1 Diagrama Momento-Rotação ($M - \Theta$)

Para a determinação do diagrama momento-rotação, assim como acontece para o diagrama momento-curvatura, é necessário realizar o cálculo das parcelas de forças resistente da seção transversal, considerando os mecanismos de interação parcial. Para isso, a metodologia seguida nesse trabalho consiste em discretizar a seção de concreto em faixas e calcular a deformação em cada uma dessas faixas (ε_{ci}). Sendo calculadas também, as deformações para cada camada de armadura (ε_{si}).

À medida que a rotação θ é incrementada, avaliam-se as deformações por meio de expressões de deformações baseadas nessas rotações e no tamanho do prisma S_p , seguindo com dois tipos de tratamento: deformações $\varepsilon_i \geq \varepsilon_{cr}$ ou $\varepsilon_i < \varepsilon_{cr}$, inserindo assim, os mecanismos de interação parcial para a primeira hipótese.

O procedimento é melhor retratado a seguir, apresentando o algoritmo implementado e as considerações adotadas, nas quais teve-se como base os trabalhos de Barros, Taheri e Salehian [17], Taheri e Barros [4], Ali *et al.* [12] e Haskett *et al.* [6].

- **Descrição do algoritmo:**

Similar a abordagem momento-curvatura, é necessário conhecer dois parâmetros para traçar um perfil de deformações. Neste caso, os parâmetros conhecidos são a rotação θ que é fixada e a profundidade da linha neutra d_{LN} cuja origem localiza-se no topo da seção. Portanto:

1. Fixar uma rotação θ e um acréscimo de rotação $\Delta\theta$ que será dado, considerando que a cada nova iteração, θ é atualizado.

$$\theta = 0 \quad (15)$$

$$\theta = \theta + \Delta\theta \quad (16)$$

2. Assumir um valor inicial para a profundidade da linha neutra d_{LN} e proceder com sucessivas tentativas até que haja o equilíbrio da seção. Para isso, utilizou-se o método de Newton-Raphson para a solução da equação de equilíbrio não linear. A fórmula de recorrência do método é:

$$\{d_{LN}\} \leftarrow \{d_{LN}\} + R^{-1}\{f(d_{LN})\} \quad (17)$$

$$f_{res} = f(d_{LN}) = N - N_R = 0 \quad (18)$$

sendo que R^{-1} é calculada por intermédio de uma derivada numérica:

$$R^{-1} = \frac{1}{\partial_{d_{LN}}(f)} \quad (19)$$

$$\partial_{d_{LN}}(f) = \frac{f(d_{LN} + x) - f(d_{LN} - x)}{2x} \quad (20)$$

em que x é o valor do passo dado para obter os pontos vizinhos ao ponto que se deseja obter a derivada numérica.

3. Cálculo do esforço normal resistente da seção: Parcela referente ao concreto.

3.1. Dividir a seção de concreto de altura h em uma quantidade q de faixas de espessura t . A parcela de esforço normal referente a cada uma dessas faixas de discretização (F_{ci}) atua no Centro Geométrico (CG) de cada faixa, como mostra a Figura 6.

$$t = \frac{h}{q} \quad (21)$$

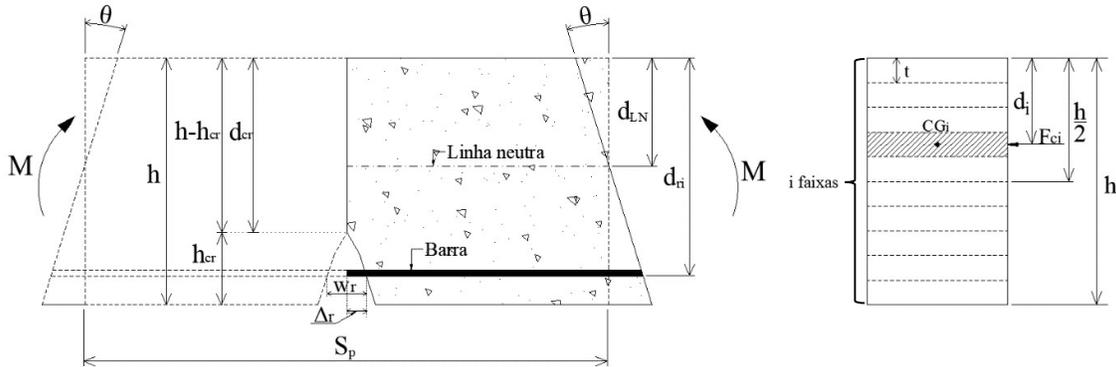


Figura 6. Seção transversal e longitudinal de concreto

3.2. Calcular a deformação em cada faixa discretizada por meio da expressão (22) que permite obtê-la com base na rotação sofrida:

$$\varepsilon_{ci} = \frac{2\theta(d_{LN} - d_i)}{S_p} \quad (22)$$

em que S_p é o espaçamento entre fissuras e o fator 2 referente às duas metades do tamanho do prisma.

3.3. Calcular a deformação de fissuração (ε_{cr}) para identificar quais faixas de concreto estão sujeitas a uma tração inferior ($\varepsilon_{ci} < \varepsilon_{cr}$) ou superior ($\varepsilon_{ci} > \varepsilon_{cr}$) a resistência do concreto à tração.

$$\varepsilon_{cr} = \frac{f_{ct}}{E_c} \quad (23)$$

3.3.1. Se $\varepsilon_{ci} < \varepsilon_{cr}$, tem-se o concreto dentro de uma região de fissura.

Para isso, calcula-se a abertura de fissura (w_c) nesse nível, por meio do deslizamento (Δ_c) na face fissurada para esta faixa calculado geometricamente. É necessário saber a que profundidade do topo da

seção abrirá uma fissura (d_{cr}). E isso é feito por meio da expressão (24), rearranjada de (22).

$$d_{cr} = d_{LN} - \frac{\varepsilon_{cr} S_p}{2\theta} \quad (24)$$

$$\Delta_c = \theta(d_i - d_{cr}) \quad (25)$$

$$w_c = 2\Delta_c \quad (26)$$

Com w_c definido, é possível obter a tensão atuante no concreto ao utilizar uma lei tensão de tração-abertura de fissura ($\sigma_{ct} - w$), que é a relação constitutiva para o trecho de amolecimento do concreto a tração. A lei $\sigma_{ct} - w$ utilizada nesse artigo é a dada pelo FIB Bulletin 42 [18], dada pelas expressões a seguir e como mostra a Figura 7.

$$\sigma_{ci} = \sigma_{ct} = \begin{cases} f_{ct} \left(1 - 0,8 \frac{w}{w_2}\right), & \text{se } w \leq w_2 \\ f_{ct} \left(0,25 - 0,05 \frac{w}{w_2}\right), & \text{se } w_2 < w \leq w_{m\acute{a}x} \\ 0, & \text{se } w \geq w_{m\acute{a}x} \end{cases} \quad (27)$$

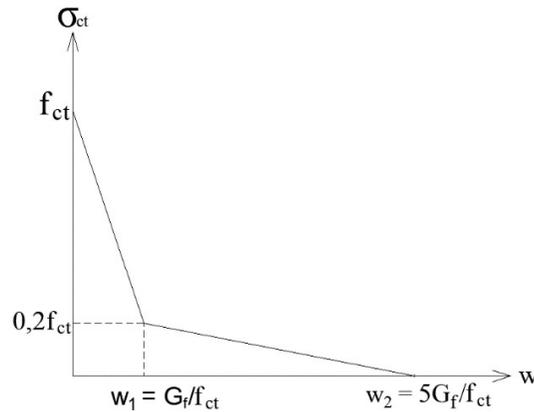


Figura 7. Tensão de tração \times abertura de fissuras no concreto (Adaptado – FIB Bulletin 42 [18])

3.3.2. Se $0 > \varepsilon_{ci} > \varepsilon_{cr}$, tem-se o concreto sob tração, porém com tensões limitadas à sua resistência à tração:

$$\sigma_{ci} = \varepsilon_{ci} E_c \quad (28)$$

3.3.3. Se $\varepsilon_{c2} \geq \varepsilon_{ci} > 0$, tem-se o concreto sob compressão, com deformações ainda no trecho ascendente da curva $\sigma \times \varepsilon$, ou seja, com deformações inferiores à deformação correspondente à tensão de pico ($\sigma_{cc,p}$). Sendo assim, utiliza-se a lei constitutiva sugerida na NBR 6118 [1].

3.3.4. Se $\varepsilon_{ci} > \varepsilon_{c2}$, tem-se o concreto com deformações de compressão pertencente a região de amolecimento do concreto, ou seja, para estas faixas de concreto deve-se incluir as propriedades definidas em 2.2.

Para encontrar a tensão atuante no concreto nesse trecho de cunha, é necessário um procedimento iterativo, no qual é assumido um valor de deformação fictícia, tal que equilibre as forças internas atuantes na cunha. Foi utilizado nesse processo o método da bissecção, sendo que os limites são as deformações na qual deve estar a deformação atuante na cunha ($0 < \varepsilon_{fic} < \varepsilon_{cu}$).

Os limites definidos pelo método da bissecção são:

$$A = \varepsilon_{fic,inf} = 0 \quad (29)$$

$$B = \varepsilon_{fic,sup} = \varepsilon_{cu} \quad (30)$$

3.3.4.1. Assumir um valor para a deformação no concreto para esta faixa analisada pertencente a cunha e calcular a contração axial (δ_{ax}):

$$\varepsilon_{fic} = 0 \quad (31)$$

$$\delta_{ax} = D_i - \varepsilon_{fic} \frac{S_p}{2} \quad (32)$$

$$D_i = \theta(d_{LN} - d_i) \quad (33)$$

em que D_i é o deslocamento da faixa analisada devido a rotação dada.

3.3.4.2. De posse de δ_{ax} , calcula-se o deslocamento tangencial (H) por meio da expressão (12).

3.3.4.3. Com H definido, chega-se a um sistema dependente das tensões σ_{nw} e τ_{nw} , dadas por (13) e (14), respectivamente.

3.3.4.4. Calcular, por geometria, as componentes de forças internas N e T (normal e tangencial) que agem no plano de deslizamento de cunha.

3.3.4.5. De posse de N e T , calcular a força compressiva (F_{ci}), o que permite o cálculo de σ_{ci} :

$$F_{ci} = T \cos \varphi + N \sin \varphi \quad (34)$$

$$\sigma_{ci} = \frac{F_{ci}}{b t} \quad (35)$$

3.3.4.7. Para avaliar a função para o limite estipulado A , deve-se calcular a tensão no concreto para a deformação fictícia $\varepsilon_{fic} = A$:

$$\sigma_{fic}(\varepsilon_{fic}) = f_c \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_{fic}}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right) \quad (36)$$

$$f(A) = \sigma_{ci} - \sigma_{fic}(\varepsilon_{fic}) \quad (37)$$

3.3.4.8. Repetir o procedimento de 3.3.4.1 a 3.3.4.7 para $\varepsilon_{fic} = B$ e encontrar $f(B)$ e então obter o ponto médio C :

$$f(B) = \sigma_{ci} - \sigma_{fic}(\varepsilon_{fic}) \quad (38)$$

$$C = \frac{A + B}{2} \quad (39)$$

3.3.4.9. Repetir o procedimento de 3.3.4.1 a 3.3.4.7 para $\varepsilon_{fic} = C$ e encontrar $f(C)$, e então, avaliar as funções $f(A)$ e $f(C)$, verificando em qual intervalo se encontra a resposta procurada:

$$\begin{cases} B = C \text{ e } f(B) = f(C), \text{ se } f(A)f(C) < 0 \\ A = C \text{ e } f(A) = f(C), \text{ se } f(A)f(C) > 0 \end{cases} \quad (40)$$

3.3.4.10. Repetir o processo até que haja convergência, ou seja, até que as respostas de A e B fiquem bem próximas, sendo o módulo da diferença entre elas menor que uma tolerância especificada.

$$dif = |A - B| \leq \text{tolerância} \quad (41)$$

3.3.4.11. Encontrando a deformação atuante na cunha:

$$\varepsilon_{ci} = \varepsilon_{fic} = \frac{A + B}{2} \quad (42)$$

3.3.4.12. Repete-se o processo de 3.3.4.1 a 3.3.4.6, chegando ao valor real de σ_{ci} .

3.4. Cálculo da parcela do esforço normal resistente para cada faixa de concreto:

$$F_{ci} = \sigma_{ci}bt \quad (43)$$

4. Cálculo do esforço normal resistente da seção: Parcela referente à armadura.

4.1. Calcular a deformação em cada camada de armadura por meio da expressão (44) que permite obter a deformação baseada na rotação sofrida:

$$\varepsilon_{ri} = \frac{2(\theta(d_{LN} - d_{ri}))}{S_p} \quad (44)$$

em que d_{ri} é a posição de cada camada de armadura.

4.1.1. Se $\varepsilon_{ri} \geq -\varepsilon_{cr}$, tem-se a armadura tracionada fora de uma região de fissura, ou seja, em uma região de interação completa.

$$\sigma_{ri} = \sigma_{si} = \begin{cases} \varepsilon_{ri}E_r, & \text{se } \varepsilon_{ri} < \varepsilon_y \\ \varepsilon_{ri}f_y, & \text{se } \varepsilon_{ri} \geq \varepsilon_y \end{cases} \quad (45)$$

4.1.2. Se $\varepsilon_{ri} < -\varepsilon_{cr}$, tem-se a armadura tracionada dentro de uma região de fissura, ou seja, em uma região de interação parcial e então, calcula-se o deslizamento Δ_r pela expressão a seguir:

$$\Delta_r = \theta(d_{ri} - d_{cr}) \quad (46)$$

É necessário que o Δ_r seja limitado ao deslizamento máximo permitido pela lei *bond-slip*. E assim, com Δ_r obtido, é possível calcular a abertura de fissura na posição da camada de armadura analisada (w_r):

$$w_r = 2\Delta_r \quad (47)$$

De posse do deslizamento (Δ_r) e da abertura de fissuras (w_r), ambos na posição da camada de armadura e do parâmetro λ (expressão (8)), é possível calcular a força de tração que leva em conta a contribuição do concreto à tração entre fissuras (P_{cont}) transferida para o aço por meio da interface. Com P_{cont} , calcula-se a tensão atuante na armadura (σ_{ri}):

$$\sigma_{ri} = \frac{P_{cont}}{A_r} \quad (48)$$

4.2. Cálculo da parcela do esforço normal resistente para cada camada de armadura:

$$F_{ri} = \sigma_{ri}A_r \quad (49)$$

5. Cálculo da parcela total de esforço normal resistente referente ao concreto e a armadura:

$$N_c = \sum F_{ci} \quad (50)$$

$$N_r = \sum F_{ri} \quad (51)$$

6. Equilíbrio dos esforços normais atuantes na seção:

$$N_R = N \quad (52)$$

$$N_R = N_c + N_r \quad (53)$$

7. Equilíbrio dos momentos fletores atuantes na seção:

$$M_R = M \quad (54)$$

7.1. Cálculo do braço de alavanca para o esforço normal referente ao concreto (z_c) e referente à armadura (z_r):

$$z_c = \begin{cases} 0, & \text{se } N_c = 0 \\ \frac{\sum F_{ci} d_i}{N_c} & \text{se } N_c \neq 0 \end{cases} \quad (55)$$

$$z_r = \begin{cases} 0, & \text{se } N_r = 0 \\ \frac{\sum F_{ri} d_{ri}}{N_r}, & \text{se } N_r \neq 0 \end{cases} \quad (56)$$

7.2. Cálculo do momento fletor resistente na seção (M_R):

$$M_R = N_c \left(\frac{h}{2} - z_c \right) + N_r \left(\frac{h}{2} - z_r \right) \quad (57)$$

8. Caso o equilíbrio em (52) e (54) seja atendido, verifica-se os ELU de deformação de cada material e finaliza-se o processo. Caso contrário, repetir o procedimento do item 2 ao 7 até que haja convergência.

Obtido o diagrama momento-rotação, transformá-lo em diagrama momento-curvatura é uma tarefa simples, utilizando as expressões a seguir:

$$\varepsilon_{sup} = \frac{2\theta(d_{LN} - 0)}{S_p} \quad (58)$$

$$\varepsilon_{inf} = \frac{2\theta(d_{LN} - h)}{S_p} \quad (59)$$

$$k = \frac{|\varepsilon_{sup}| + |\varepsilon_{inf}|}{h} \quad (60)$$

em que ε_{sup} é a deformação no topo e ε_{inf} é a deformação na base da seção de concreto.

O fluxograma a seguir apresenta de forma simplificada o processo acima:

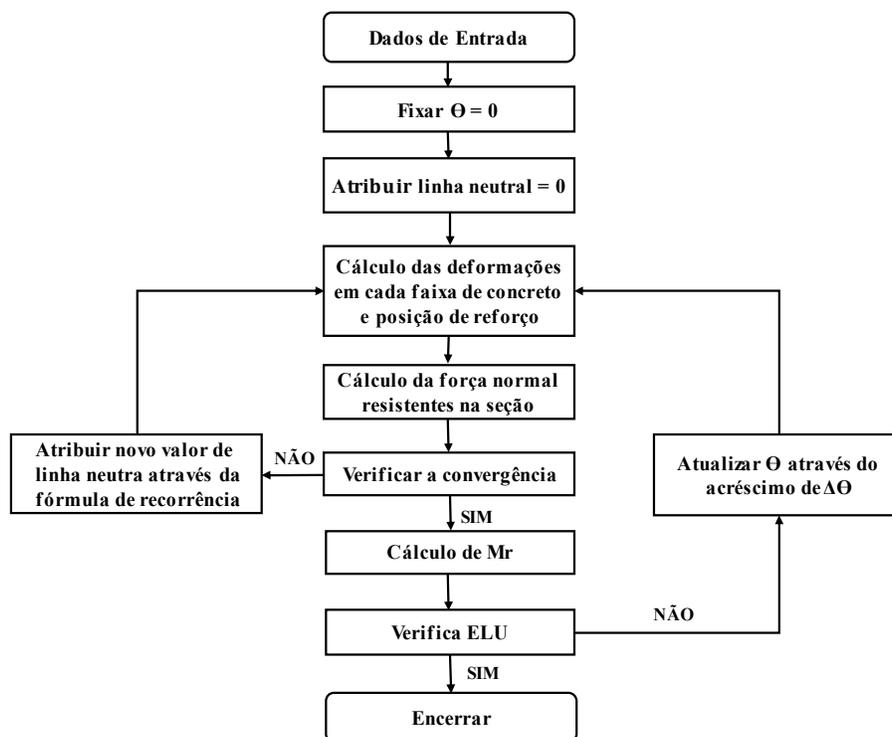


Figura 8. Fluxograma - momento-rotação

3.2 Análise de Vigas de Concreto por meio da Analogia de Mohr

Uma dos principais quesitos a serem determinados em uma análise estrutural de viga de concreto, principalmente em situações de serviço, são os deslocamentos ao longo do seu comprimento, e conseqüentemente, a configuração deformada das mesmas. É importante que essa análise consiga tratar questões importantes, como a não linearidade física do material e fenômenos como a formação de fissuras e de cunhas de concreto. A metodologia utilizada nesse trabalho para considerar tais questões na análise utiliza como base a analogia de Mohr.

A analogia de Mohr é um método iterativo baseado, assim como o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), na ideia de carga fictícia equivalente. A analogia, resumidamente, pode ser determinada com base no observado a seguir:

- Analogia 1: observando as expressões a seguir, em que a equação da linha elástica, que relaciona deslocamento e curvatura, e a equação diferencial da estática, que mostra a relação entre momento e carregamento atuante no elemento, é permitido obter por analogia que a curvatura em um sistema real pode ser dada como o carregamento atuante em um elemento fictício.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (61)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q(x) \quad (62)$$

- Analogia 2: observando as expressões a seguir, em que a primeira, também oriunda do estudo de deflexões, que relaciona momento e esforço cortante, e a segunda, que relaciona deslocamento e rotação, é permitido obter por analogia que os deslocamentos atuantes em um sistema real podem ser obtidos por meio dos momentos calculados em um sistema fictício.

$$\frac{dM}{dx} = Q(x) \quad (63)$$

$$\frac{dy}{dx} = \phi(x) \quad (64)$$

A partir do entendimento da analogia de Mohr, é possível considerar que o carregamento aplicado na viga em um sistema fictício é equivalente à curvatura obtida das relações momento-curvatura em um sistema real, permitindo inserir desta forma, a não linearidade física do material. Com este carregamento fictício, obtêm-se os momentos fletores realizando uma análise estática usual, que corresponderá aos deslocamentos no sistema real. Além disso, é importante frisar que as condições de contorno devem ser ajustadas no sistema equivalente.

Com base no exposto, a seguir apresenta-se o algoritmo utilizado na implementação:

1. O processo inicia-se com a discretização da viga de comprimento L na quantidade (n) de trechos desejada, sendo que o comprimento do trecho é Δx :

$$\Delta x = \frac{L}{n} \quad (65)$$

2. Calcular o momento fletor para cada ponto de discretização.

3. De posse do momento fletor que solicita a seção discretizada, obtêm-se a curvatura oriunda da abordagem momento-rotação.

4. Aplicação da Analogia de Mohr:

De posse da curvatura, obtêm-se o carregamento fictício, formando assim um sistema equivalente a um sistema real. Dependendo do diagrama de momento fletor, esse carregamento fictício pode assumir uma distribuição linear constante ou uma variação parabólica. Esse carregamento pode então ser substituído por cargas pontuais equivalentes que atuam nos nós de discretização, chamadas de pesos elásticos. Esses pesos elásticos são dados em função da curvatura e, segundo Santos [19], podem ser expressos pelas equações a seguir:

$$w_0 = \frac{\Delta x}{12} \left(3,5 \frac{1}{r_0} + 3 \frac{1}{r_1} - 0,5 \frac{1}{r_2} \right) \quad (66)$$

$$w_i = \frac{\Delta x}{12} \left(\frac{1}{r_{i-1}} + 10 \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+1}} \right) \quad (67)$$

$$w_n = \frac{\Delta x}{12} \left(3,5 \frac{1}{r_n} + 3 \frac{1}{r_{n-1}} - 0,5 \frac{1}{r_{n-2}} \right) \quad (68)$$

5. Com o carregamento fictício definido em 4, calcular o momento fletor em cada ponto de discretização no sistema equivalente. Esse momento fletor, por analogia de Mohr, corresponderá aos deslocamentos no sistema real. Com o deslocamento em cada ponto, é possível traçar a deformada real da viga.

4 Validação e Resultados

A validação do modelo mecânico apresentado nesse artigo é possível a partir da comparação dos resultados obtidos com os oriundos de ensaios experimentais realizados em vigas de concreto armado. Os resultados consistem em diagramas momento-curvatura resultantes de análises de interação completa e parcial para avaliação da rigidez nos dois casos; em curvas de carga x deslocamento que são traçadas para analisar a flexibilidade das vigas, e além disso, são expostos gráficos que mostram a relação momento-abertura de fissuras.

4.1 Especificações das Vigas Ensaadas

Os resultados dos ensaios experimentais foram obtidos por Sá [20] e consistem em ensaios de quatro pontos em vigas de concreto armado com barras de aço. Em sua pesquisa foram realizados

ensaios de caracterização para o concreto, o aço e para as interfaces. Isso foi possível por meio de ensaios de compressão e tração uniforme nos materiais constituintes e de ensaios de arrancamento das barras embebidas na matriz de concreto.

As vigas ensaiadas possuem as propriedades geométricas e as obtidas dos ensaios são apresentadas na figura e tabela a seguir.

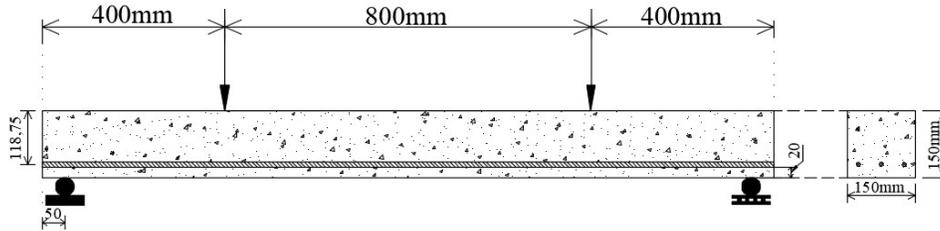


Figura 9. Viga de concreto ensaiada (Adaptada – Sá [20])

Tabela 1. Propriedades dos materiais

Propriedades dos Materiais			
	Concreto		Aço à tração
	Compressão	Tração	
f (MPa)	53,80	4,6	495,00
E (MPa)	36700	36700	198000
$\varepsilon_{m\acute{a}x}$ (%)	0,25	0,007	2,50
f_y (MPa)	-	-	480,00

Das vigas ensaiadas por Sá [20], comparou-se com os resultados numéricos as seguintes amostras: viga armada com 3 barras de aço de 12,5mm (VA-12) e viga com 4 barras de 5mm (VA-5).

Em que f é a resistência, E o módulo de elasticidade, f_y a tensão de escoamento do aço e $\varepsilon_{m\acute{a}x}$ as deformações máximas dos materiais. Além das propriedades básicas apresentadas na tabela, o autor realizou ainda a caracterização da interface entre os materiais, por meio do ensaio de arrancamento.

Como comentado, utiliza-se uma formulação baseada no modelo *bond-slip* linear ascendente, que é idealizado a partir das curvas não lineares de aderência como sugere Taheri e Barros [4]. Com isso, é possível obter os dois parâmetros referentes a lei de aderência: k_e e $s_{m\acute{a}x}$. A seguir apresenta-se a lei *bond-slip* idealizada para a interface concreto-aço ajustada a partir das amostras ensaiadas.

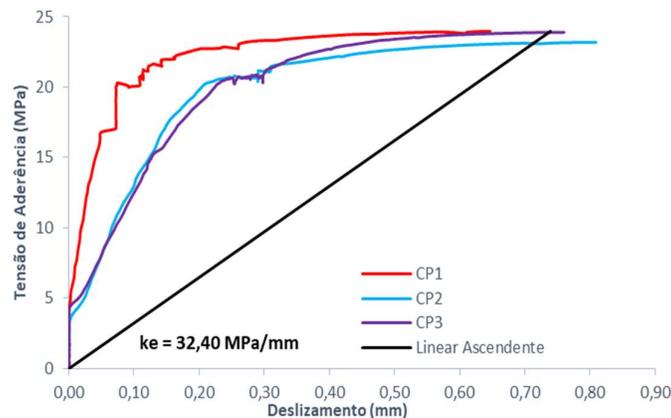


Figura 8. Curva *bond-slip* idealizada – concreto-aço

4.2 Avaliação dos Resultados

Com as curvas carga-deslocamento e momento-curvatura obtidas a partir dos ensaios de Sá [20] foi possível realizar uma comparação com os resultados numéricos obtidos das implementações. Os deslocamentos foram medidos no ponto central da viga por meio de transdutores (LVDTs) e por Correlação de Imagem Digital (CID), que além dos deslocamentos, permitiu a obtenção de dados a respeito da fissuração, como a abertura e espaçamento de fissuras. Sendo assim, por fim, apresenta-se uma comparação, da relação momento-abertura de fissuras, entre os resultados.

Dentre as curvas apresentadas a seguir, é possível observar os resultados experimentais e numéricos considerando uma análise de vigas baseada na abordagem momento-rotação (interação parcial) e resultados de uma análise baseada em momento-curvatura (interação completa).

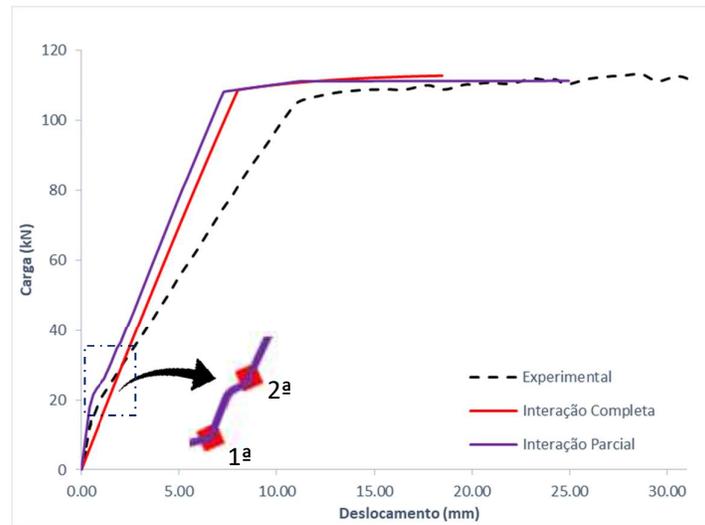


Figura 9. Carga-deslocamento – viga VA-12

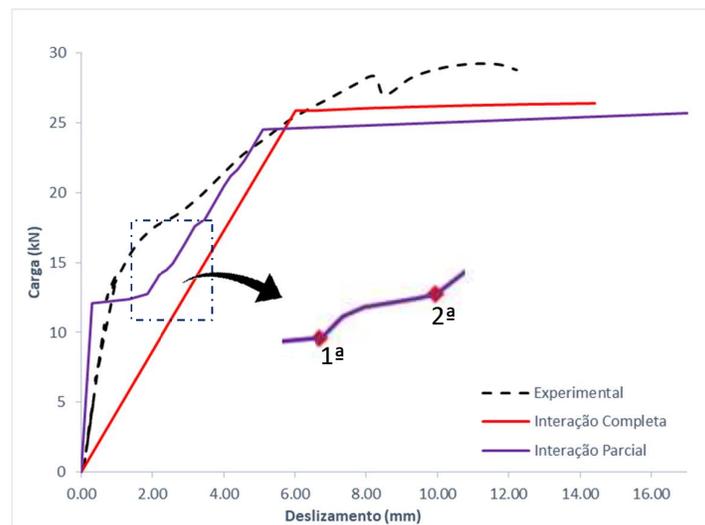


Figura 10. Carga-deslocamento – Viga VA-5

É possível observar na curva carga-deslocamento da Viga VA-12, que para baixos níveis de carregamento a rigidez secante da curva numérica de interação parcial apresenta valor próximo ao experimental. É possível observar ainda que o modelo numérico de interação parcial permite observar

o surgimento das primeiras fissuras, perceptível por meio dos pontos angulosos presentes ao ampliar a região. Essas fissuras são indicadas nas figuras ampliadas nos gráficos, como 1ª e 2ª fissura.

É possível observar ainda, que os resultados de carga última apresentam certa concordância com os resultados experimentais, todavia o mesmo não ocorreu com deslocamentos. Isso pode ser explicado, devido ao fato do ensaio experimental conter um pequeno vão de cisalhamento, o que leva a uma importante influência dos esforços cisalhantes.

Além dos resultados de carga–deslocamento apresentados, é possível avaliar ainda a rigidez seccional por meio dos diagramas momento–curvatura oriundos das implementações de interação completa e parcial, confrontando-os com os obtidos experimentalmente.

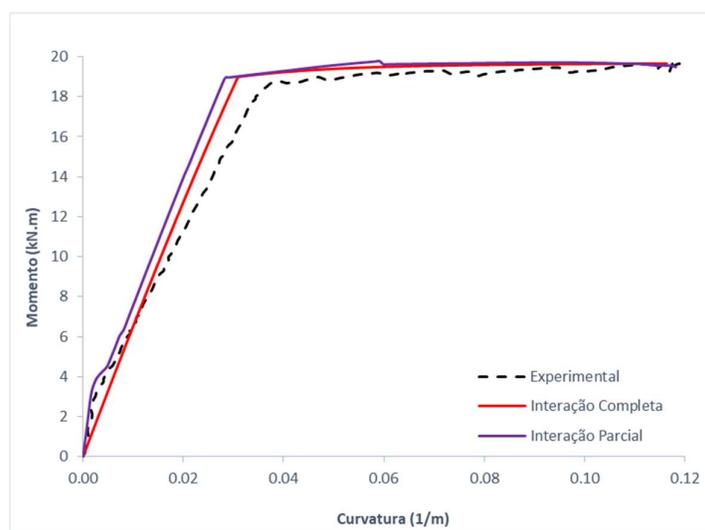


Figura 11. Diagrama momento – curvatura – Viga VA – 12

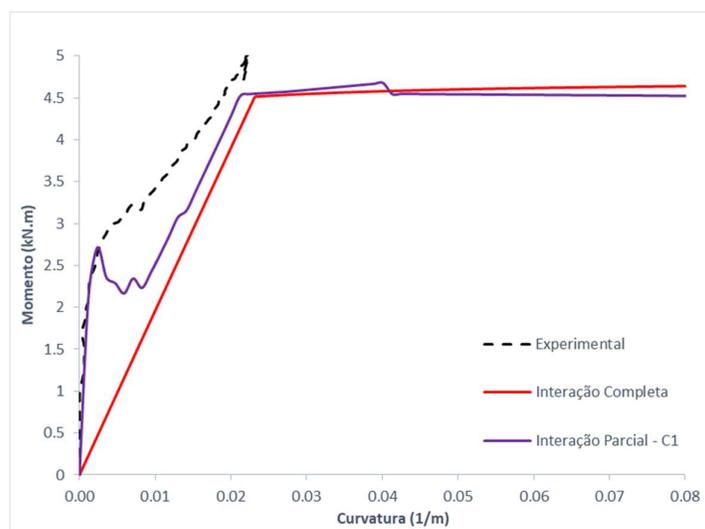


Figura 12. Diagrama momento – curvatura – Viga VA – 5

- Na VA-12, no estágio I, ou seja, antes da fissuração do concreto, a curva de interação parcial apresenta um acréscimo no momento de 17% e uma redução na curvatura de 18%. Já para o estágio II, houve um aumento de 1% no momento e a curvatura reduziu 28% em relação ao experimental.

- A VA-5 apresentou no estágio I um aumento de 11% no momento e aumento na curvatura de 22%. Enquanto que, no estágio II, tanto momento quanto curvatura sofreram reduções de 12% e 9%, respectivamente, em relação aos resultados experimentais.

Os modelos de interação completa e parcial apesar de manterem a mesma capacidade resistente da seção, pois se trata de uma viga isostática, possuem, conforme esperado, curvas com significativa diferença de rigidez. É importante frisar que não foi implementado, no modelo de interação completa, nenhuma contribuição do concreto à tração, tal decisão foi tomada a fim comparar uma situação hipotética comum considerada em projeto com um comportamento real no qual uma estrutura está submetida.

Além dos resultados apresentados, o modelo é capaz de fornecer também resultados em termos da abertura de fissura, como o gráfico momento–abertura de fissura mostrado a seguir:

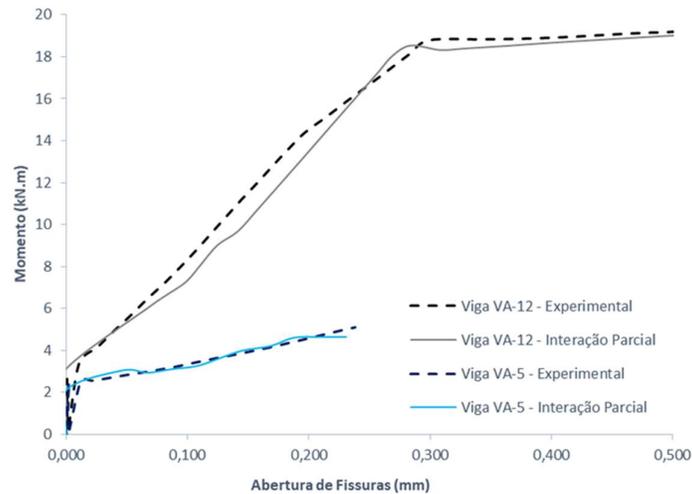


Figura 13. Momento - abertura de fissuras

5 Considerações Finais

Nesse artigo apresentou-se um modelo numérico baseado na abordagem momento-rotação, que possui como princípios básicos dois mecanismos de interação parcial: amolecimento do concreto e enrijecimento à tração. Para validação desse modelo foram necessárias, além de sua implementação, a de mais dois algoritmos: uma de momento-curvatura baseada em interação completa e um algoritmo para análise de vigas, baseada na analogia de Mohr.

Com os modelos implementados, os diagramas momento-curvatura foram traçados, sendo possível avaliar a degradação da rigidez seccional das vigas estudadas à medida que havia curvaturas ou rotações incrementadas. Além disso, com as curvas carga-deslocamento, foi possível avaliar e comparar a flexibilidade das vigas à medida que carregamentos eram incrementados.

A partir das curvas de carga-deslocamento plotadas observa-se que há um comportamento mais flexível para as vigas ensaiadas quando comparadas aos resultados numéricos. Tal comportamento pode ser explicado pelo fato das vigas possuírem um vão pequeno de cisalhamento, podendo estar submetidas à esforços cisalhantes consideráveis, o que pode ter acarretado no acréscimo dessa flexibilidade. Observa-se ainda que, para uma análise de interação completa as curvas apresentadas são mais flexíveis que as curvas de interação parcial, o que representa um comportamento coerente com o que era esperado. É importante notar ainda, que a viga VA-12 apresentou um comportamento bastante similar ao experimental no trecho linear.

A partir dos diagramas momento-curvatura é possível concluir que para o estágio I os diagramas apresentaram boa concordância com os ensaios experimentais, porém a partir de então as curvas apresentaram um comportamento um pouco divergente.

É apresentado ainda uma boa concordância para o resultado de momento-abertura de fissuras quando comparado ao experimental, mostrando a relevância do uso do modelo apresentado para análises cujo o comportamento em termos de abertura de fissuras seja uma questão importante.

Agradecimentos

À Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão (FAPEMA) e ao Governo do Estado do Maranhão, pela bolsa de estudos concedida.

À PUC-Rio, pelos auxílios concedidos e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

- [1] Associação Brasileira de Normas Técnicas - ABNT. *NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento*. Rio de Janeiro, 2014.
- [2] Gupta, A. K.; Maestrini, S. R. Tension-stiffness model for reinforced concrete bars. *Journal of Structural Engineering*, v. 116, n. 3, p. 769–790, 1990.
- [3] Muhamad, R.; Ali, M. S. M.; Oehlers, D. J.; Griffith, M. The tension stiffening mechanism in reinforced concrete prisms. *Advances in Structural Engineering*, v. 15, n. 12, p. 2053–2069, 2012.
- [4] Taheri, M.; Barros, J. A. O. An analytical model to simulate tension stiffening mechanism in rotation response of FRC flexural members with tensile longitudinal reinforcement. Relatório, Universidade do Minho, 2012.
- [5] Oehlers, D. J.; Visintin, P.; Chen, J.-F.; Seracino, R.; Wu, Y.; Lucas, W. Reinforced Concrete Behavior, Research, Development, and Design through Partial-Interaction Mechanics. *Journal of Structural Engineering*, v. 143, n. 7, p. 02517002, 2017.
- [6] Haskett, M.; Oehlers, D. J.; Ali, M. S. M.; Wu, C. Rigid body moment-rotation mechanism for reinforced concrete beam hinges. *Engineering Structures*, v. 31, n. 5, p. 1032–1041, 2009a.
- [7] Costa, G. C. C. Análise de Vigas de Concreto Armado Baseada na Abordagem Momento-Rotação. Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2019.
- [8] Visintin, P. A generic segmental analysis of all types of RC members. Tese (Doutorado), Universidade de Adelaide, 2012.
- [9] Haskett, M.; Oehlers, D. J.; Ali, M. S. M.; Sharma, S. K. Evaluating the shear-friction resistance across sliding planes in concrete. *Engineering Structures*, v. 33, n. 4, p. 1357–1364, 2011.
- [10] Visintin, P.; Oehlers, D. J.; Wu, C.; Haskett, M. A mechanics solution for hinges in RC beams with multiple cracks. *Engineering Structures*, v. 36, p. 61–69, 2012.
- [11] Oehlers, D. J.; Haskett, M.; Ali, M. H. M.; Lucas, W.; Muhamad, R. Our Obsession with Curvature in RC Beam Modelling. *Advances in Structural Engineering*, v. 14, n. 3, p. 391–404, 2011b.
- [12] Ali, M. S. M.; Oehlers, D. J.; Haskett, M.; Griffith, M. C. Discrete rotation in RC beams. *Journal of Engineering Mechanics*, v. 138, n. 11, p. 1317–1325, 2012.
- [13] Haskett, M.; Oehlers, D. J.; Ali, M. S. M.; Wu, C. Yield Penetration Hinge Rotation in Reinforced Concrete Beams. *Journal of Structural Engineering*, v. 135, n. 2, p. 130–138, 2009b.
- [14] Muhamad, R.; Ali, M. S. M.; Oehlers, D.; Hamid, S. A. Load-slip relationship of tension reinforcement in reinforced concrete members. *Engineering Structures*, v. 33, n.4, p.1098–1106, 2011.
- [15] Haskett, M.; Ali, M. S. M.; Oehlers, D. J.; Wu, C. Influence of bond on the hinge rotation of FRP plated beams. *Advances in Structural Engineering*, v. 12, n. 6, p. 833–843, 2009c.
- [16] Matlab R2018b. Natick, Massachusetts: MathWorks, 2018.
- [17] Barros, J.A.O.; Taheri, M.; Salehian, H. A model to simulate the moment-rotation and crack width of FRC members reinforced with longitudinal bars. *Engineering Structures*, v.100, p.43–56, 2015.
- [18] FIB. FIB Bulletin 42 - Constitutive modelling of high strength/high performance concrete. State-of-art. Relatório Técnico. *International Federation for Structural Concrete*. Lausanne, Suíça, 2008.
- [19] Santos, L. M. Instabilidade nas Estruturas de Concreto: Análise de Pilares. Apostila (Pós-Graduação). Universidade de São Paulo - USP, 1987
- [20] Sá, F. R. G. Influência da adição de fibras de polipropileno no comportamento de elementos estruturais de concreto armado com barras de GFRP. Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2018.