

MODELAGEM DAS ETAPAS DE PROTENSÃO PARA VIGAS DE CONCRETO PROTENDIDAS PÓS-TRACIONADAS COM CABOS NÃO ADERENTES

Leonardo do Nascimento Cunha

lnc_eng_civil@hotmail.com

*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, PEC-UFC
Campus do Pici, Centro Tecnologia, Bloco 728, Cep: 60440-900, Fortaleza/CE, Brasil*

João Batista Marques Sousa Junior

joabatistasousajr@hotmail.com

*Departamento Engenharia Estrutural e Construção Civil-DEEC, Universidade Federal do Ceará,
UFC*

Campus do Pici, Centro Tecnologia, Bloco 728, Cep: 60440-900, Fortaleza/CE, Brasil

Resumo. As estruturas de concreto protendido com cabos não-aderentes, especialmente vigas e lajes, tem sido amplamente difundidas e utilizadas em construções pelo mundo. A solução numérica destes elementos pelo método dos elementos finitos estabelece alguns problemas desafiadores devido a ausência de compatibilidade de deformação e deslocamento entre o cabo e o concreto envolto. Este trabalho apresenta a aplicação de uma formulação de MEF para uma análise numérica não linear de viga de concreto pós-tracionada com cabos não aderentes, focada na fase de aplicação da protensão. Foram empregados elementos não-lineares unidimensionais de pórticos planos baseados na teoria de vigas de Euler-Bernoulli para a seção de concreto armado e um elemento de treliça para a simulação dos cabos. A simulação da protensão é realizada através de analogia com as vigas pré-tracionadas, onde uma posição de equilíbrio é alcançada sem aplicação de carregamento externo. Neste estudo, a formulação é estendida para avaliação sequencial de diversos cabos. Assim, analisou-se três modelos de diferentes vigas protendidas de diferentes trajetórias de cabos não aderentes, baseados em modelos reconhecidos na literatura. Os resultados demonstraram a influência da protensão sequencial e os efeitos nos cabos pós-tracionados anteriormente estirados, principalmente para vigas com valores elevados de forças de protensão.

Keywords: Cabos não aderentes, Protensão sequencial, Elementos finitos.

1 Introdução

As estruturas de concreto protendido com cabos não-aderentes, especialmente vigas e lajes, tem sido amplamente difundidas e utilizadas em construções pelo mundo. Esse sistema estrutural apresenta as mesmas vantagens dos demais sistemas de protensão, como redução das deformações, controle das fissurações e aumento dos vãos, porém dispensa o uso de bainha metálica e injeção de nata de cimento nas cordoalhas. Devido a sua versatilidade, tornou-se bastante popular em construções de médio e alto padrão no Brasil, destacando-se como uma excelente alternativa construtiva.

A protensão conduz ao surgimento de uma força inicial na peça, que relaciona-se diretamente ao alongamento ocorrido na armadura ativa. O acionamento dos macacos hidráulicos, a liberação dos cabos e a transferência da força de protensão, entre outros fatores, desencadeiam efeitos que geram a diminuição da força de protensão, caracterizando as perdas imediatas de protensão (Veríssimo & César Junior, 1998 [1]).

Para vigas com múltiplos cabos não-aderentes, destaca-se a perda por encurtamento elástico do concreto, que verifica-se após o estiramento sequencial dos cabos, influenciando nas perdas de protensão nos cabos que já foram devidamente protendidos e ancorados.

A simulação numérica destes elementos pelo método dos elementos finitos-FEM apresenta alguns problemas desafiadores devido principalmente à ausência de compatibilidade de deformações entre o cabo e o concreto envolto, existindo somente a compatibilidade de deslocamentos nos pontos de ancoragem da viga. Assim a deformação e a tensão do cabo deve ser realizada por meio da análise de todo o elemento estrutural (Moreira et al, 2018 [2]; Naaman & Alhkairi, 1991 [3]).

Modelos foram propostos na simulação dos elementos de concreto com protensão não-aderente.

Wu et al. (2003) [4] propôs um modelo de elementos finitos para análise não-linear de cabos para estruturas de concreto protendido, que considera tanto a transferência de protensão para múltiplos cabos não aderentes, quanto para cabos aderentes.

Lou et al. (2006) [5] manifesta um modelo de elementos finitos com não-linearidade material e geométrica de vigas de concreto protendido com protensão externa, em que os efeitos do cabo de protensão são expressos como força nodal equivalente externa.

Zona et al. (2008) [6] apresenta uma formulação de análise não-linear material e geométrica de vigas com cabos de protensão externa com comportamento similar aos cabos com protensão interna sem aderência. Na formulação, o elemento de cabo contribui como um elemento resistente na estrutura.

Este trabalho tem como objetivo a formulação de um modelo de elementos finitos para uma análise numérica não-linear de vigas de concreto protendido com cabos não-aderentes, focado na etapa de aplicação da protensão. Para a formulação do MEF foram empregados elementos não-lineares unidimensionais de porticos planos baseados na teoria de vigas de Euler-Bernoulli para a seção de concreto armado e um macroelemento de treliça para a simulação dos cabos protendidos.

2 Elemento finito de pórtico plano

A formulação do elemento finito de pórtico plano propõe-se a simular as vigas de concreto armado com base na teoria clássica de Euler-Bernoulli, considerando uma descrição Lagrangiana Total. A teoria clássica de vigas estabelece a formulação considerando as hipóteses simplificadoras (Oliveira, 2017 [7]):

- a) Pequenos deslocamentos em relação à seção transversal;
- b) As seções transversais permanecem planas e normais ao eixo da viga após a deformação;
- c) A deformação causada por cisalhamento é desprezada.

Assim, baseado nestas hipóteses, o campo de deslocamento pode ser descrito como:

$$u(X, Y) = u_o(X) - Y \cdot v_o'(X) . \quad (1)$$

$$v(X, Y) = v_o(X) . \quad (2)$$

onde u e v são deslocamentos axiais e transversais simultaneamente, e o subscrito O é referente aos deslocamentos no eixo centróide da seção transversal da viga. O elemento de portico e o Sistema de coordenadas são apresentados na Figura 1. Considerando a formulação Langrangiana Total, utiliza-se a deformação de Green-Lagrange, logo a deformação longitudinal do elemento ε_x é expressa como:

$$\varepsilon_x = u_o' + \frac{1}{2} v_o'^2 - Y \cdot v_o'' . \quad (3)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_o - Y \cdot k . \quad (4)$$

onde, $\varepsilon_o = u_o' + \frac{1}{2} v_o'^2$ é a deformação de membrana e $k = v_o''$ é a curvatura.

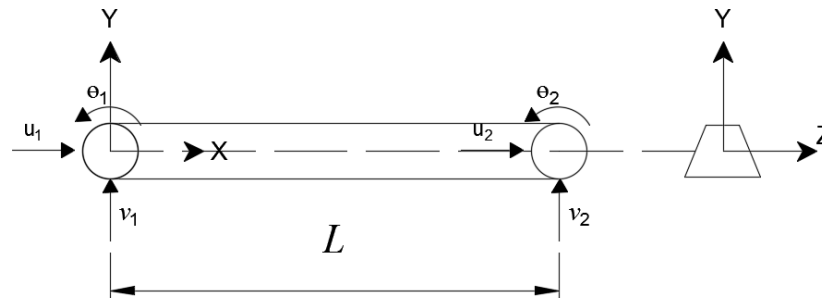


Figura 1. Elemento de pórtico plano em Sistema de coordenadas

A deformação de membrana e a curvatura podem ser interpretados como componentes do vetor conhecido, como deformações generalizadas ε :

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_o \\ k \end{Bmatrix} . \quad (5)$$

Na análise dos esforços internos em pórticos planos, determina-se o esforço normal (N) e o momento fletor (M) a partir da integração de tensões na seção transversal:

$$N = \int_A \sigma dA . \quad (6)$$

$$M = - \int_A Y \sigma dA . \quad (7)$$

A força normal (N) e o momento fletor (M) caracterizam o vetor de tensões generalizadas (σ):

$$\sigma = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} . \quad (8)$$

Para o desenvolvimento do modelo de elementos finitos, considerando análise não –linear física e geométrica, utiliza-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais. De acordo com o P.T.V , o equilíbrio ocorre quando para qualquer deslocamento virtual arbitrário, o trabalho virtual interno (δU) é igual ao trabalho virtual externo (δW).

O trabalho virtual interno para um corpo qualquer é dado pela expressão:

$$\delta U = \int_V \delta \varepsilon_x \sigma_x dV. \quad (9)$$

Através da Equação (4), obtém-se a deformação virtual $\delta \varepsilon_x$:

$$\delta \varepsilon_x = \delta \varepsilon_o - Y \delta k. \quad (10)$$

Reescrevendo a Equação (10) em termos da deformação virtual e decompondo a integral de volume (V) em termos de área (A) e comprimento (x), obtém-se:

$$\delta U = \int_L \delta \varepsilon_o^T \int_A \sigma_x dA dX + \int_L \delta k^T \int_A -Y \sigma_x dA dX. \quad (11)$$

Considerando as Equações (7) e (8), substitui-se os termos da integral na área pelos esforços internos (M e N).

$$\delta U = \int_L \delta \varepsilon_o^T N dX + \int_L \delta k^T M dX. \quad (12)$$

A equação do trabalho virtual interno pode ser representada sob forma matricial compacta:

$$\delta U = \int_L \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_o^T & \delta k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} dX. \quad (13)$$

Adotando os vetores de tensões generalizadas ($\boldsymbol{\sigma}$) e deformações generalizadas ($\boldsymbol{\varepsilon}$), têm-se o trabalho virtual interno (δU) simplificado:

$$\delta U = \int_L \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dX. \quad (14)$$

Em relação ao trabalho virtual externo (δW), é determinado pela soma dos trabalhos realizados pelas forças de campo (\mathbf{b}), forças de superfície (\mathbf{q}) e pelas forças aplicadas nos nós (\mathbf{P}). Podendo ser expresso por:

$$\delta W = \int_V (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{b}) dV + \int_S (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}) dS + \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{P}. \quad (15)$$

onde \mathbf{u} representa o vetor deslocamento no interior do elemento e \mathbf{u}_e representa o vetor deslocamentos

nodais.

Na formulação de elementos finitos deve-se considerar o uso de funções polinomiais de interpolação para os deslocamentos no interior do elemento finito. Graus de continuidade são necessários para garantir a convergência dos resultados pelo FEM. Assim, para o elemento de pórtico plano, considera-se o uso de funções de interpolação para os deslocamentos axiais $u_o(X)$, a qual apresentam continuidade C^0 e para os deslocamentos transversais $v_o(X)$ que apresentam continuidade C^1 (Cook et al, 2002 [8]).

As funções polinomiais de continuidade C^0 referentes aos deslocamentos axiais, $u_o(X)$, são caracterizadas por polinômios lineares de Lagrange, com apenas dois graus de Liberdade para compor o polinômio, sendo expresso por:

$$u_o(X) = L_1 u_1 + L_2 u_2. \quad (16)$$

onde L_1 e L_2 são polinômios lineares, variando de 0 a L , e u_1 e u_2 são deslocamentos nodais axiais.

Para garantir a convergência do tipo C^1 utiliza-se funções de interpolação polinomiais chamados de Polinômios de Hermite. Desta forma, os deslocamentos transversais no interior do elemento podem ser definidos como:

$$v_o(X) = H_1 v_1 + H_2 \theta_1 + H_3 v_2 + H_4 \theta_2. \quad (17)$$

onde H_1, H_2, H_3 e H_4 são polinômios Hermitianos, variando de 0 a L , e v_1, v_2, θ_1 e θ_2 são deslocamentos transversais nodais e rotações nodais respectivamente.

Os deslocamentos $u(X)$ e $v(X)$ no interior do elemento finito podem ser representados sob forma matricial, em função das funções de forma e dos deslocamentos nodais do elemento.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_o(X) \\ v_o(X) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & H_2 & 0 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u}_e. \quad (18)$$

onde \mathbf{u} é o vetor de deslocamentos no interior do elemento, \mathbf{N} é a matriz das funções de forma do elemento de pórtico e \mathbf{u}_e é o vetor dos deslocamentos nodais.

A inserção das funções de forma permite representar o vetor de deformações generalizadas ($\boldsymbol{\varepsilon}$) em função do vetor dos deslocamentos nodais (\mathbf{u}_e).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_L + \boldsymbol{\varepsilon}_{NL} = \mathbf{B}_L \mathbf{u}_e + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} \mathbf{u}_e. \quad (19)$$

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} L_{1,X} & 0 & 0 & L_{2,X} & 0 & 0 \\ 0 & H_{1,XX} & H_{2,XX} & 0 & H_{3,XX} & H_{4,XX} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

onde \mathbf{B}_L é a matriz de deformação-deslocamento linear.

$$v_o' = \begin{bmatrix} 0 & H_{1,X} & H_{2,X} & 0 & H_{3,X} & H_{4,X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G}u_e. \quad (21)$$

$$v_o'^2 = v_o'^T v_o' = u_e^T \mathbf{G}^T \mathbf{G} u_e. \quad (22)$$

$$\varepsilon_{NL} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_e^T \mathbf{G}^T \mathbf{G} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} u_e = \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL} u_e. \quad (23)$$

e \mathbf{B}_{NL} é a matriz de deformação-deslocamento não-linear.

Através da Equação (26), obtém-se o incremento de deformação (deformação virtual) $\delta\varepsilon$:

$$\delta\varepsilon = (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL})\delta u_e = \bar{\mathbf{B}}^T \delta u_e. \quad (24)$$

onde $\bar{\mathbf{B}}$ é o vetor de deformação-deslocamento virtual do elemento

Substituindo esta expressão pela Equação (15), e adotando o Princípio dos Trabalhos Virtuais têm-se:

$$\delta U_e = \int_L \delta\varepsilon^T \sigma dX = \delta u_e^T \mathbf{g}_e. \quad (25)$$

$$\delta u_e^T \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \sigma dX = \delta u_e^T \mathbf{g}_e. \quad (26)$$

Desta forma, o vetor de força interna do elemento (\mathbf{g}_e) é caracterizado como:

$$\mathbf{g}_e = \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \sigma dX. \quad (27)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento (\mathbf{K}_{Te}) para a análise não-linear é concebida através do incremento do vetor de força interna do elemento em relação aos deslocamentos nodais do mesmo elemento.

$$\mathbf{K}_{Te} = \frac{\partial \mathbf{g}_e}{\partial u_e}. \quad (28)$$

$$\mathbf{K}_{Te} = \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \sigma}{\partial u_e} dX + \int_L \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial u_e} \sigma dX = \mathbf{K}_{Ee} + \mathbf{K}_{Ge}. \quad (29)$$

onde \mathbf{K}_{Ee} é a matriz de rigidez elástica do elemento e \mathbf{K}_{Ge} é a matriz de rigidez geométrica do elemento.

$$\mathbf{K}_{Ee} = \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{u}_e} dX = \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}_e} dX = \int_L \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_T \mathbf{B}^T dX. \quad (30)$$

$$\mathbf{K}_{Ge} = \int_L \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}^T}{\partial \mathbf{u}_e} \boldsymbol{\sigma} dX = \int_L \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_L^T}{\partial \mathbf{u}_e} + \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}_{NL}^T}{\partial \mathbf{u}_e} \right) \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} dX = \int_L \mathbf{N} \mathbf{A} dX. \quad (31)$$

onde \mathbf{C}_t é a matriz constitutiva tangente

$$\mathbf{C}_t = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial N}{\partial k} \\ \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_o} & \frac{\partial M}{\partial k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int E_t dA & -\int Y E_t dA \\ -\int Y E_t dA & \int Y^2 E_t dA \end{bmatrix}. \quad (32)$$

e E_t é o modulo de elasticidade tangente

$$E_t = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (33)$$

Determinado os vetores de força interna e a matriz de rigidez tangente de cada elemento finito da viga, realiza-se a montagem (Assembly) dos vetores globais da viga (\mathbf{g} e \mathbf{Kt}).

A avaliação das integrações ao longo do eixo longitudinal é realizado numericamente pela Quadratura Gaussiana. Já as integrações nas seções transversais (Matriz constitutiva \mathbf{C}_t) são feitas pelo método das fatias

3 Contribuição da armadura passiva

Assim, como Moreira (2016) [9], a armadura passiva é considerada como um ponto discreto com todas as suas características (área e coordenadas) e tensão no centro geométrico da armadura. Logo a sua contribuição pode ser obtida por meio das expressões:

$$N_s = \sum_{k=1}^{N_b} A_{sk} \sigma_s(\varepsilon_k(y_{sk})). \quad (34)$$

$$M_s = \sum_{k=1}^{N_b} -y_{sk} A_{sk} \sigma_s(\varepsilon_k(y_{sk})). \quad (35)$$

onde N_b é o número de barras da seção transversal, A_{sk} é a área de cada barra e y_{sk} é a ordenada de cada barra em relação ao sistema de eixos global, e σ_s é a tensão na armadura passiva.

Para evitar considerar uma nova contribuição do concreto nos esforços internos e na matriz constitutiva \mathbf{C}_t , subtrai-se a contribuição da área de concreto equivalente a área ocupada pela barra de aço passiva. A matriz constitutiva tangente e o vetor de tensões generalizadas total da seção transversal é dado por:

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_s. \quad (36)$$

$$C_t = C_{tc} + C_{ts}. \quad (37)$$

onde σ_s e σ_c são os vetores de tensão generalizada do aço e do concreto respectivamente, e, C_{tc} e C_{ts} são as matrizes constitutivas tangentes do concreto e do aço respectivamente.

4 Elemento finito de cabo de protensão

Conforme Moreira et al. (2018) [2], vigas protendidas com cabos não-aderentes não apresentam compatibilidade de deformações entre o cabo de protensão e o concreto que envolve a bainha do cabo. Logo, há apenas compatibilidade nas extremidades da viga ou em pontos de ancoragem, portanto a avaliação dos deslocamentos do cabo e do concreto só ocorre considerando a deformação da estrutura inteira.

O modelo proposto neste trabalho considera, assim como Lou et al (2013) [10], o cabo como elemento finito discretizado em trechos retos que contribui no vetor de forças internas e na matriz de rigidez tangente da estrutura, similarmente a Moreira (2016) [9].

Nas estruturas de concreto com protensão não-aderente devido à falta de aderência (atrimento) entre a bainha plástica e o aço de protensão, considera-se que a tensão e a deformação no cabo de protensão é constante ao longo do comprimento do cabo.

As coordenadas finais de cada segmento de cabo de protensão não correspondem ao mesmo ponto material, a qual desliza em relação à seção da viga de concreto, mas referem-se as coordenadas da bainha plástica, a qual apresentam aderência com o concreto envolto e podem ser utilizadas para a avaliação do comprimento total do cabo, e desta forma determinar a deformação do aço de protensão, Figura 2, que é considerado constante (Oliveira, 2017 [7]).

Conseqüentemente à obtenção da deformação do aço de protensão, determina-se o trabalho virtual interno, a matriz de rigidez tangente e o vetor de forças internas do cabo, como mostrado a seguir.

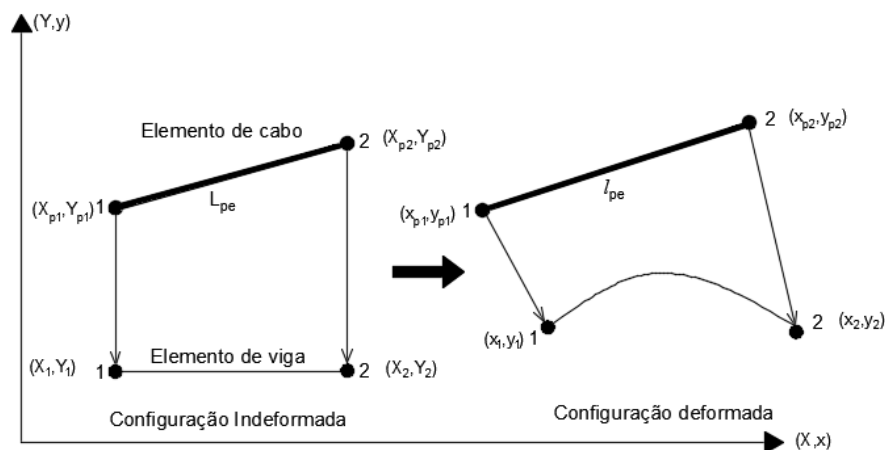


Figura 2. Associação de coordenadas de elemento de Viga e de elemento de cabo.

Os deslocamentos do segmento de cabo reto são obtidos do deslocamento do elemento de pórtico envolto substituindo nas coordenadas nodais da Equação (1), pelo mérito da Teoria clássica de vigas-TCV.

$$u_{p1}(X_{p1}, Y_{p1}) = u_1(X_1) - Y.v_1'(X_1) = u_1(X_1) - Y.\theta_1(X_1). \quad (38)$$

$$v_{p1}(X_1, Y_1) = v_1(X_1). \quad (39)$$

$$u_{p2}(X_{p2}, Y_{p2}) = u_2(X_2) - Y.v_2'(X_2) = u_2(X_2) - Y.\theta_2(X_2). \quad (40)$$

$$v_{p2}(X_2, Y_2) = v_2(X_2). \quad (41)$$

onde u_{p1} e u_{p2} são deslocamentos axiais e v_{p1} e v_{p2} são deslocamentos verticais dos nós do segmento reto

Sob forma matricial, os deslocamentos nodais do elemento de cabo são:

$$\mathbf{u}_{pe} = \begin{bmatrix} u_{p1} \\ v_{p1} \\ u_{p2} \\ v_{p2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Y_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -Y_{p2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_e \mathbf{u}_e. \quad (42)$$

onde \mathbf{u}_{pe} é o vetor de deslocamentos nodais do elemento de cabo, \mathbf{u}_e é o vetor de deslocamentos nodais do elemento de pórtico envolto ao cabo e \mathbf{T}_e é a matriz de transformação.

O vetor dos deslocamentos nodais do elemento de pórtico (\mathbf{u}_e) pode ser relacionado ao vetor de deslocamentos nodais global (\mathbf{u}), através da matriz de incidência cinemática (Booleana) \mathbf{L}_e . Assim os vetores \mathbf{u}_e e \mathbf{u}_{pe} podem ser descritos:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{u}. \quad (43)$$

$$\mathbf{u}_{pe} = \mathbf{T}_e \mathbf{L}_e \mathbf{u}. \quad (44)$$

Através da Equação (10), e considerando a tensão e a deformação constantes ao longo do cabo, obtém-se o trabalho virtual interno do cabo.

$$\delta U = \int_V \delta \varepsilon_p \sigma_p dV = \int_{L_p} \int_{A_p} \delta \varepsilon_p \sigma_p dA dS = \delta \varepsilon_p F_p L_p. \quad (45)$$

onde $F_p = A_p \sigma_p$ é a força no cabo e L_p é o comprimento do cabo inicial.

A deformação no cabo é dada pela soma da deformação inicial teórica (ε_{p0}), referente a deformação que teoricamente é encontrada na fase de aplicação da protensão e que para casos de protensão “pós-tração” serve como artifício para determinar o valor de referência após as perdas de protensão imediatas (Lou et al ,2006 [5]), e da deformação do cabo incremental ($\Delta \varepsilon_p$).

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \Delta \varepsilon_p. \quad (46)$$

A medida de engenharia utilizada para $\Delta \varepsilon_p$ por simplicidade é a deformação de engenharia, logo têm-se:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p0} + \frac{l_p - L_p}{L_p} = \varepsilon_{p0} + \frac{\sum_{e=1}^{np} (l_{pe} - L_{pe})}{\sum_{e=1}^{np} L_{pe}} \quad (47)$$

onde L_{pe} e l_{pe} são os comprimentos de segmentos inicial e deformado, vide Figura 2, e n_p é o número de segmentos de cabos.

A variação da deformação ($\delta\varepsilon_p$) e a variação do comprimento do segmento (δl_{pe}) podem ser descritas como:

$$\delta\varepsilon_p = \frac{\delta l_p}{L_p} \quad (48)$$

$$\delta l_{pe} = \frac{(x_{p2} - x_{p1})}{l_{pe}} (\delta x_{p2} - \delta x_{p1}) + \frac{(y_{p2} - y_{p1})}{l_{pe}} (\delta y_{p2} - \delta y_{p1}) \quad (49)$$

ou

$$\delta l_{pe} = \cos \beta (\delta u_{p2} - \delta u_{p1}) + \text{sen} \beta (\delta v_{p2} - \delta v_{p1}) \quad (50)$$

onde β é o ângulo formado entre o eixo horizontal e o segmento de cabo na configuração deformada.

A Equação (50) pode ser representada sob forma matricial:

$$\delta l_{pe} = \begin{bmatrix} -\cos \beta & -\text{sen} \beta & \cos \beta & \text{sen} \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_{p1} \\ \delta v_{p1} \\ \delta u_{p2} \\ \delta v_{p2} \end{bmatrix} = \mathbf{r}_e^T \delta \mathbf{u}_{pe} \quad (51)$$

onde $\delta \mathbf{u}_{pe}$ é o vetor de deslocamentos virtual do segmento de cabo. Assim, obtém-se a variação do comprimento final do cabo, considerando a soma da contribuição de todos os segmentos de cabo da estrutura e substituindo $\delta \mathbf{u}_{pe}$ pela variação da Equação (44)

$$\delta l_p = \sum_{e=1}^{np} \delta l_{pe} = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{r}_e^T \delta \mathbf{u}_{pe} = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{r}_e^T \mathbf{T}_e \delta \mathbf{u}_e \quad (52)$$

Assim, através das Equações (45), (48) e (52), encontra-se o trabalho virtual interno do cabo protendido em função de $\delta \mathbf{u}_e$.

$$\delta U = \delta \varepsilon_p F_p L_p = \frac{\delta l_p}{L_p} F_p L_p = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{r}_e^T \mathbf{T}_e \delta \mathbf{u}_e F_p \quad (53)$$

$$\delta U = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{g}_{pe}^T \delta \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{g}_{pe} = \mathbf{T}_{pe}^T \mathbf{r}_e F_p \quad (54)$$

onde \mathbf{g}_{pe} é o vetor de forças internas do elemento de cabo, podendo ser também ser expresso por:

$$\mathbf{g}_{pe} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -Y_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -Y_{p2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\beta \\ -\text{sen}\beta \\ \cos\beta \\ \text{sen}\beta \end{bmatrix} F_p = \begin{bmatrix} -\cos\beta \\ -\text{sen}\beta \\ \cos\beta Y_{p1} \\ \cos\beta \\ \text{sen}\beta \\ -\cos\beta Y_{p2} \end{bmatrix} F_p = \mathbf{w}_e F_p. \quad (55)$$

onde $\mathbf{w}_e = \mathbf{T}_{pe}^T \mathbf{r}_e$.

Considerando a variação da Equação (43), $\delta \mathbf{u}_e = \mathbf{L}_e \delta \mathbf{u}$, e substituindo na Equação (54), têm-se:

$$\delta U = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{g}_{pe}^T \mathbf{L}_e \delta \mathbf{u} = \left(\sum_{e=1}^{np} \mathbf{L}_e^T \mathbf{g}_{pe} \right)^T \delta \mathbf{u} = \mathbf{g}_p^T \delta \mathbf{u}. \quad (56)$$

onde $\mathbf{g}_p = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{L}_e^T \mathbf{g}_{pe}$, sendo \mathbf{g}_p o vetor de forças internas global.

Para a determinação da matriz de rigidez global (\mathbf{K}_{Tp}), faz-se a diferenciação do vetor de forças internas global (\mathbf{g}_p) em relação ao vetor de deslocamentos nodais global (\mathbf{u}).

$$\mathbf{K}_{Tp} = \frac{\partial \mathbf{g}_p}{\partial \mathbf{u}} = \sum_{e=1}^{np} \mathbf{L}_e^T \frac{\partial \mathbf{g}_{pe}}{\partial \mathbf{u}}. \quad (57)$$

Desenvolvendo a diferenciação do vetor de forças internas do segmento de cabo (\mathbf{g}_{pe}) em relação ao vetor \mathbf{u} , com base na Equação (57), obtém-se:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_{pe}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{T}_e^T \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}} F_p + \mathbf{T}_e^T \mathbf{r}_e \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}}. \quad (58)$$

e logo, \mathbf{K}_{Tp} designa-se como:

$$\mathbf{K}_{Tp} = \sum_{e=1}^{np} \left(\mathbf{L}_e^T \mathbf{T}_e^T \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}} F_p + \mathbf{L}_e^T \mathbf{T}_e^T \mathbf{r}_e \frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} \right). \quad (59)$$

O primeiro termo da matriz \mathbf{K}_{Tp} corresponde a matriz de rigidez geométrica ou das tensões iniciais. Já o segundo termo é referente a matriz de rigidez elástica ou do material (De Borst et al, 2012 [11]). Assim desenvolvendo o primeiro termo, obtém-se a derivada do vetor \mathbf{r}_e em relação ao vetor \mathbf{u} :

$$\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}_e} \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}_e} L_e. \quad (60)$$

onde a derivada de \mathbf{r}_e em relação ao vetor \mathbf{u}_e é dado por:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{u}_e} = \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{u}_{pe}} \frac{\partial \mathbf{u}_{pe}}{\partial \mathbf{u}_e} = \mathbf{z}_e \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{u}_{pe}} \mathbf{T}_e. \quad (61)$$

onde

$$\mathbf{z}_e = \begin{bmatrix} \text{sen}\beta \\ -\cos\beta \\ -\text{sen}\beta \\ \cos\beta \end{bmatrix}. \quad (62)$$

e

$$\frac{\partial\beta}{\partial\mathbf{u}_{pe}} = \frac{\mathbf{z}_e^T}{l_{pe}}. \quad (63)$$

Assim, a matriz de rigidez geométrica (\mathbf{K}_{Gp}) do cabo é expressa por:

$$\mathbf{K}_{Gp} = \sum_{e=1}^{np} (\mathbf{L}_e^T \mathbf{K}_{Gpe} \mathbf{L}_e). \quad (64)$$

onde \mathbf{K}_{Gpe} é a matriz de rigidez geométrica do cabo

$$\mathbf{K}_{Gpe} = \begin{pmatrix} F_p \\ l_{pe} \end{pmatrix} \mathbf{T}_e^T \mathbf{z}_e \mathbf{z}_e^T \mathbf{T}_e. \quad (65)$$

Considerando o segundo termo da matriz \mathbf{K}_{Tp} , desenvolve-se a derivada da força F_p em relação ao vetor \mathbf{u} , utilizando as Equações (48) e (52) :

$$\frac{\partial F_p}{\partial \mathbf{u}} = A_p \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_p} \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \mathbf{u}} = \frac{A_p E_{pt}}{L_p} \sum_{e=1}^{np} \mathbf{r}_e^T \mathbf{T}_e \mathbf{L}_e. \quad (66)$$

Desta forma, considerando o vetor \mathbf{w}_e da Equação (55), obtêm-se a matriz de rigidez material do cabo de protensão não-aderente.

$$\mathbf{K}_{Ep} = \begin{pmatrix} E_{pt} A_p \\ L_p \end{pmatrix} \sum_{e=1}^{np} (\mathbf{L}_e^T \mathbf{w}_e \mathbf{w}_e^T \mathbf{L}_e). \quad (67)$$

Destaca-se, que a matriz \mathbf{K}_{Ep} é simétrica, porém é acoplada, já que conecta os graus de liberdade dos nós de todos os elementos.

A matriz de rigidez tangente do cabo de protensão não-aderente fica caracterizado pela soma das matrizes de rigidez material e geométrica (De Borst et al, 2012 [11]), logo:

$$\mathbf{K}_{Tp} = \mathbf{K}_{Ep} + \mathbf{K}_{Gp}. \quad (68)$$

5 Múltiplos cabos de protensão não-aderente

Vigas protendidas são suscetíveis a perda de protensão por encurtamento elástico do concreto, a qual o cabo ao sofrer o encurtamento pela deformação imediata da peça de concreto, durante a fase de protensão, promove um alívio de tensão no cabo (Veríssimo & César Junior, 1998 [1]).

Quando se tem múltiplos cabos em casos de pós-tração sem aderência, os estiramentos são feitos cabo por cabo, logo a aplicação da força de protensão por meio de um dos cabos provoca deformações no concreto que modificam as tensões e as forças de protensão dos cabos anteriores. Assim, considerando uma viga com “ k ” cabos concentrados em uma determinada seção transversal e os cabos não-aderentes sendo protendidos sucessivamente, Figura 3, ocorrerá para o primeiro cabo a perda de protensão decorrente da protensão dos $(k-1)$ cabos restantes, e sucessivamente até que o último cabo tenha perda de protensão nula, ou seja, sem influência de estiramento de outros cabos (HANAI, 2005 [13]).

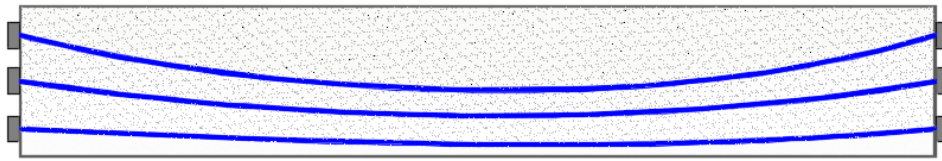


Figura 3. Viga protendida com múltiplos cabos não-aderentes

6 Análise não-linear

A análise não linear das vigas com protensão não-aderente para a fase de aplicação da protensão é realizada através da avaliação do campo de deslocamentos que resultam na força do cabo (F_p) igual a força de protensão equivalente (F_{pe}) dada.

Para a simulação da operação de protensão e a obtenção do estado de equilíbrio final é necessário a consideração de uma deformação inicial “teórica” (ε_{po}) referente a uma tensão inicial na protensão (σ_o) para as análises incrementais subsequentes na fase de aplicação de carregamento externo na viga, a qual inicialmente é desconhecida.

A deformação inicial teórica (ε_{po}) é a deformação que seria teoricamente encontrada no cabo após a aplicação da protensão, antes da transmissão da protensão para as vigas, em caso de verificações de protensão pré-tração. Esse modelo, conforme Lou et al (2006) [5], pode ser proposto para aplicação da protensão no caso de verificações pós-tração. Assim, a avaliação da etapa de protensão consiste em determinar a deformação ε_{po} igualando a correspondente deformação efetiva (ε_{pe}), obtida no problema, em um processo iterativo de controle de carga (Moreira (2016) [9]).

Assim, para cada estiramento de cabo de protensão, há a solução por meio do equilíbrio da viga, Equação (69), (71) e (73), até a força F_p resultar na força efetiva F_{pe} , Equação (70), (72) e (74), respeitando a tolerância exigida no problema.

Logo para obtenção da deformação ε_{po} para o primeiro cabo estirado (aplicação de protensão), têm-se :

$$\mathbf{g}_p^{(1)}(\varepsilon_{po}^{(1)}, \mathbf{u}_1) + \mathbf{g}_v(\mathbf{u}_1) = \mathbf{0}. \quad (69)$$

$$F_p^{(1)}(\varepsilon_{po}^{(1)}, \mathbf{u}_1) - F_{pe}^{(1)} = \mathbf{0}. \quad (70)$$

onde $\mathbf{g}_p^{(1)}$ é o vetor de forças internas do cabo 1 e \mathbf{g}_v é o vetor de forças internas na viga após a aplicação da primeira protensão.

Para a obtenção da deformação inicial teórica para a o segundo cabo estirado:

$$\mathbf{g}_p^{(1)}(\varepsilon_{po}^{(1)}, \mathbf{u}_2) + \mathbf{g}_p^{(2)}(\varepsilon_{po}^{(2)}, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + \mathbf{g}_v(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}. \quad (71)$$

$$F_p^{(2)}(\varepsilon_{po}^{(2)}, \mathbf{u}_2) - F_{pe}^{(2)} = \mathbf{0}. \quad (72)$$

onde $\mathbf{g}_p^{(2)}$ é o vetor de forças internas do cabo 2, $F_p^{(2)}$ é a força de protensão no cabo 2, $F_{pe}^{(2)}$ é a força de protensão efetiva no mesmo cabo (2) e \mathbf{u}_2 é vetor dos graus de liberdade da estrutura após a aplicação da protensão do segundo cabo.

Generalizando a análise para “k” cabos de protensão não-aderente, têm-se:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_v + \sum_{i=1}^k \mathbf{g}_p^{(k)}(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}, \varepsilon_{po}^k) = \mathbf{0}. \quad (73)$$

$$F_p^{(k)} - F_{pe}^{(k)} = \mathbf{0}. \quad (74)$$

onde \mathbf{g} é o vetor de forças internas total.

Logo o resíduo (\mathbf{r}) da análise não-linear pode ser descrito, como:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ F_p^{(k)} - F_{pe}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (75)$$

Esse Sistema não linear com $n+1$ equações e $n+1$ variáveis pode ser resolvido usando o Método Newton-Raphson para cada estiramento de cabo “k”. Desta forma, a linearização do sistema resulta :

$$\mathbf{g} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}_k} \delta \mathbf{u}_k + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varepsilon_{po}^{(k)}} \delta \varepsilon_{po}^{(k)} = 0. \quad (76)$$

$$F_p^{(k)} - F_{pe}^{(k)} + \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial \mathbf{u}_k} \delta \mathbf{u}_k + \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial \varepsilon_{po}^{(k)}} \delta \varepsilon_{po}^{(k)} = 0. \quad (77)$$

onde:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varepsilon_{po}^{(k)}} = \frac{\partial \mathbf{g}_p^{(k)}}{\partial \varepsilon_{po}^{(k)}} = \frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial \varepsilon_{po}^{(k)}} \mathbf{w}_k = A_p E_{pt} \mathbf{w}_k. \quad (78)$$

e

$$\frac{\partial F_p^{(k)}}{\partial \mathbf{u}_k} = A_p \frac{\partial \sigma_p^{(k)}}{\partial \varepsilon_p^{(k)}} \frac{\partial \varepsilon_p^{(k)}}{\partial \mathbf{u}_k} = \frac{A_p E_{pt}}{L_p} \mathbf{w}_k^T. \quad (79)$$

Substituindo as Equações (78) e (79) nas Equações (76) e (77), obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T \delta \mathbf{u}, \mathbf{k} + \delta \varepsilon_{po}^{(k)} A_p E_{pt} \mathbf{w} = -\mathbf{g} \\ \frac{A_p E_{pt}}{L_p} \mathbf{w}_k^T \delta \mathbf{u} + A_p E_{pt} \delta \varepsilon_{po}^{(k)} = F_{pe}^{(k)} - F_p^{(k)}. \end{cases} \quad (80)$$

Com a resolução do sistema não linear, obtém-se os deslocamentos incrementais ($\delta \mathbf{u}$) e a deformação incremental ($\delta \varepsilon_{po}^{(k)}$) e consequentemente os deslocamentos e a deformação inicial atualizada em cada interação (i).

$$\mathbf{u}_{i+1,k} = \mathbf{u}_{i,k} + \delta \mathbf{u}_k. \quad (81)$$

$$\varepsilon_{po,i+1}^{(k)} = \varepsilon_{po,i}^{(k)} + \delta \varepsilon_{po}^{(k)}. \quad (82)$$

A procedimento iterativo em cada etapa de protensão é finalizado, quando se alcança a tolerância (TOL) admitida no problema.

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{F_{pe}^{(k)}} \leq TOL. \quad (83)$$

7 Resultados

Nessa seção serão analisados três modelos de vigas de concreto com protensão não aderente, baseados em ensaios experimentais conhecidos da literatura, as quais são: Modelo de Tao e Du (1985) [13], Modelo de Hussein et al (2012) [14] e Modelo de Lou et al (2013) [10]. A implementação da formulação de elementos finitos apresentado neste trabalho foi realizada no software MATLAB.

A análise dos modelos consistiu na obtenção da deformação inicial teórica (ε_{po}) do cabo protendido, a cada fase de estiramento (protensão) de um novo cabo, considerando procedimento iterativo para o alcance da convergência da aplicação de protensão e consequentemente da obtenção das forças de protensão de cada cabo não aderente após cada aplicação de protensão pós-tração, levando em questão as perdas de protensão devido a influência das protensões sequenciais.

7.1 Viga Biapoiada com cabos de protensão retos

A implementação do modelo de viga biapoiada com cabos não aderentes retos, baseada no modelo de Tao e Du (1985) [13], foi realizada para a discretização de malha com 12 elementos finitos, considerando a integração da seção transversal em 50 fatias e a integração longitudinal em 3 pontos de Gauss. Para o parâmetro da convergência, considerou-se uma tolerância de 10^{-6} .

A análise da viga biapoiada foi realizada considerando três cabos de protensão não aderentes estirados sequencialmente cabo após cabo. A viga apresenta seção retangular de 16 x 28 cm com armadura passiva positiva de área de 1,57 cm², afastada 22 cm do topo da viga, e armaduras ativa de área de 0,588 cm² cada, afastadas 25 cm do mesmo topo da viga. Os cabos protendidos apresentam configuração geométrica reta ao longo dos 440 cm de vão da viga, com tensão de escoamento de 1465 Mpa, tensão última de 1790 Mpa, módulo de elasticidade longitudinal de 205 Gpa, deformação última de protensão de 6% e a tensão de protensão efetiva (σ_{pe}) igual a 960 Mpa.

Os valores dos parâmetros do concreto obtidos para esse modelo, Eurocode 2 (2004) [15], foram: $f_c = 30,6$ Mpa, $E_c = 30,77$ Gpa e $\varepsilon_{co} = 2,021\%$ (deformação de pico do concreto). Já para a armadura passiva foi considerado tensão de escoamento (f_y) de 430 Mpa, modulo de elasticidade longitudinal de 210 Gpa, e modulo de elasticidade de endurecimento (E_{sh}) de 1,0 Gpa (modelo elastoplástico perfeito com endurecimento linear). Nas tabelas 1 e 2, mostram-se os resultados do procedimento iterativo para a convergência da aplicação de protensão e das forças de protensão após os estiramentos sequenciais de cada cabo.

Tabela 1. Convergência de aplicação de protensão para 3 cabos não aderentes

Estiramento do cabo 1			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(1)}$	σ_p	$\ r\ /F_{pe}^{(1)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^0
2	4.760796×10^{-3}	9.373700×10^8	5.906603×10^{-2}
3	4.888266×10^{-3}	9.598192×10^8	4.234408×10^{-3}
4	4.889380×10^{-3}	9.600000×10^8	4.349292×10^{-4}
5	4.889385×10^{-3}	9.600000×10^8	3.157046×10^{-8}
Estiramento do cabo 2			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(2)}$	σ_p	$\ r\ /F_{pe}^{(2)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^0
2	5.520816×10^{-3}	1.053481×10^9	1.796276×10^{-1}
3	4.997821×10^{-3}	9.648990×10^8	8.317352×10^{-3}
4	4.970357×10^{-3}	9.600608×10^8	1.098905×10^{-4}
5	4.970016×10^{-3}	9.600006×10^8	1.158455×10^{-6}
6	4.970013×10^{-3}	9.600000×10^8	1.218952×10^{-8}
Estiramento do cabo 3			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(3)}$	σ_p	$\ r\ /F_{pe}^{(3)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^1
2	5.464266×10^{-3}	1.030930×10^9	1.597618×10^{-1}
3	5.072011×10^{-3}	9.636114×10^8	6.531648×10^{-3}
4	5.051963×10^{-3}	9.600791×10^8	1.429417×10^{-4}
5	5.051524×10^{-3}	9.600016×10^8	2.935794×10^{-6}
6	5.051515×10^{-3}	9.600000×10^8	6.020676×10^{-8}

Tabela 2. Forças de protensão nos cabos não aderentes após os estiramentos

Cabo (i)	Forças de protensão (N) após estiramentos dos cabos			Perda de Protensão (%)
	Estiramento cabo 1	Estiramento cabo 2	Estiramento cabo 3	
Cabo 1	56,448.00	55,607.09	54,748.21	3.01
Cabo 2	0	56,448.00	55,597.92	1.51
Cabo 3	0	0	56,448.00	0

Analisando os resultados do modelo de vigas com cabos retos, percebe-se que a cada estiramento de cabo há uma redução da força de protensão dos cabos anteriores, totalizando para o cabo 1 uma perda de força de protensão acumulada de 3,01% e de 1,51% para o cabo 2 ao final da fase de aplicação da protensão.

Considerando a perda protensão média para os cabos por estiramento, verifica-se uma variação da de 1,50% da força de protensão, considerando os cabos 1 e 2. Observa-se também que a convergência do procedimento iterativo ocorreu em poucas interações, em torno de 5 e 6 interações, caracterizando uma convergência rápida para a análise não-linear do modelo estudado apresentando uma variação percentual média da deformação inicial teórica por cada estiramento de 1,64%.

7.2 Viga Biapoiada com cabos de protensão poligonais

O Segundo modelo implementado foi de uma viga biapoiada com cabos não aderentes poligonais, fletida em quatro pontos e com comprimento de 440 cm, baseada no modelo de Hussein et al (2012) [14]. A malha foi discretizada em 6 elementos finitos, considerando a integração da seção transversal em 50 fatias e a integração longitudinal em 2 pontos de integração de Gauss. Para o parâmetro da convergência, também considerou-se uma tolerância de 10^{-6} .

A análise da viga biapoiada foi realizada considerando três cabos de protensão não aderentes estirados sequencialmente cabo após cabo. A viga apresenta seção retangular de 16 x 34 cm com armadura passiva negativa e positiva de área de 1,57 cm², afastadas 4 cm do topo e da base da viga respectivamente. Já as armaduras ativas apresentam área de 0,99 cm² cada, ancoradas no centroide da seção nas extremidades do vão da viga, com os segmentos poligonais do cabo seguindo a trajetória do diagrama de momentos fletores devido ao carregamento externo, em que os segmentos dos cabos no meio do vão estão localizados a 4,3 cm da face inferior da viga.

Os cabos protendidos apresentam tensão de escoamento de 1674 Mpa, tensão última de 1860 Mpa, módulo de elasticidade longitudinal de 190 Gpa, deformação última de protensão de 6% e a tensão de protensão efetiva (σ_{pe}) igual a 1000 Mpa.

Os valores dos parâmetros do concreto obtidos para esse modelo, segundo Eurocode 2(2004) [15], foram: $f_c = 43$ Mpa, $E_c = 34$ Gpa e $\varepsilon_{co} = 2,246\%$ (deformação de pico do concreto). Já para a armadura passiva foi considerado tensão de escoamento (f_y) de 470 Mpa, modulo de elasticidade longitudinal de 210 Gpa, e modulo de elasticidade de endurecimento (E_{sh}) de 1,2 Gpa (modelo elastoplástico perfeito). Nas tabelas 3 e 4, mostram-se os resultados do procedimento iterativo para a convergência da aplicação de protensão e das forças de protensão após os estiramentos sequenciais de cada cabo.

Tabela 3. Convergência de aplicação de protensão para 3 cabos não aderentes

Estiramento do cabo 1			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(1)}$	σ_p	$\ r\ / F_{pe}^{(1)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^0
2	5.219815×10^{-3}	9.987040×10^8	1.359546×10^{-1}
3	5.232208×10^{-3}	1.000003×10^9	5.890497×10^{-2}
4	5.233708×10^{-3}	1.000001×10^9	8.402262×10^{-3}
5	5.233857×10^{-3}	1.000000×10^9	2.720335×10^{-6}
6	5.233857×10^{-3}	1.000000×10^9	7.293501×10^{-10}
Estiramento do cabo 2			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(2)}$	σ_p	$\ r\ / F_{pe}^{(2)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^0
2	5.293722×10^{-3}	9.920034×10^8	5.777117×10^{-2}
3	5.337944×10^{-3}	9.999893×10^8	6.080187×10^{-3}
4	5.338080×10^{-3}	1.000000×10^9	1.913550×10^{-6}
5	5.338080×10^{-3}	1.000000×10^9	6.813079×10^{-10}
Estiramento do cabo 3			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(3)}$	σ_p	$\ r\ / F_{pe}^{(3)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^1
2	5.286133×10^{-3}	9.700400×10^8	3.048480×10^{-2}
3	5.443763×10^{-3}	9.999375×10^8	1.842691×10^{-4}
4	5.444090×10^{-3}	9.999998×10^8	3.848143×10^{-7}
5	5.444091×10^{-3}	1.000000×10^9	1.357966×10^{-9}

Tabela 4. Forças de protensão nos cabos não aderentes após os estiramentos

Cabo (i)	Forças de protensão (N) após estiramentos dos cabos			Perda de Protensão (%)
	Estiramento cabo 1	Estiramento cabo 2	Estiramento cabo 3	
Cabo 1	98,999.99	97,010.69	94,983.68	4.06
Cabo 2	0	98,999.99	96,976.53	2.04
Cabo 3	0	0	98,999.99	0

Observa-se que para o modelo de vigas com cabos poligonais, a redução da força de protensão total para o cabo 1 ocorre em torno de 4,06% e para o cabo 2 ocorre em 2,04% ao final da fase de aplicação da protensão.

Considerando o equilíbrio para o estiramento individual e sequencial de cada cabo, a perda de protensão média para os cabos por estiramento apresentam-se em aproximadamente 2,00% da força de protensão. Analisando o procedimento iterativo para a convergência do sistema, percebe-se que os valores da deformação inicial teórica apresentaram uma variação percentual média por cada estiramento de 1,99%.

7.3 Viga Contínua com cabos de protensão curvos

O caso de viga contínua apoiada em três apoios com cabos de protensão curvos foram implementados, baseado no modelo de Lou et al (2013) [10], considerando uma malha com 25 elementos finitos, integração da seção transversal em 50 fatias e a integração longitudinal em 3 pontos Gaussianos. Para o critério de convergência, adotou-se uma tolerância de 10^{-6} .

A viga foi realizada considerando três cabos de protensão não aderentes estirados sequencialmente. A viga apresenta seção retangular de 15 x 30 cm com armaduras passivas de áreas: $A_1 = 4,524 \text{ cm}^2$ e $A_2 = A_3 = A_4 = 2,262 \text{ cm}^2$, Vide Figura 4. As armaduras passivas negativas e positivas encontram-se afastadas 3,5 cm do topo e da base da viga respectivamente. Já as armaduras ativas tem área de $1,4 \text{ cm}^2$ cada, seguindo a trajetória curva, conforme Figura 4. Os cabos protendidos apresentam tensão de escoamento de 1680 Mpa, tensão última de 1961 Mpa, módulo de elasticidade longitudinal de 197 Gpa, deformação última de protensão de 6% e a tensão de protensão efetiva (σ_{pe}) igual a 1083 Mpa.

Os valores dos parâmetros do concreto obtidos para esse modelo, foram: $f_c = 34,9 \text{ Mpa}$ e $\epsilon_{co} = 2,106\%$ (deformação de pico do concreto), Eurocode 2(2004) [15]. Já para a armadura passiva foi considerado tensão de escoamento (f_y) de 362 Mpa e módulo de elasticidade longitudinal de 205 Gpa. Nas tabelas 5 e 6, mostram-se os resultados do procedimento iterativo para a convergência da aplicação de protensão e das forças de protensão após os estiramentos sequenciais de cada cabo.

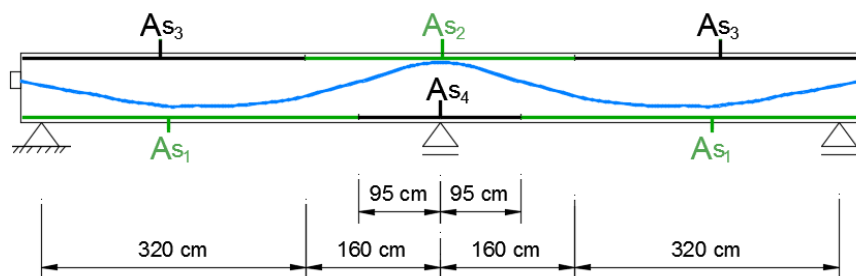


Figura 4. Viga contínua com cabos de protensão curvos

Tabela 5. Convergência de aplicação de protensão para 3 cabos não aderentes

Estiramento do cabo 1			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(1)}$	σ_p	$\ r\ /F_{pe}^{(1)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^0
2	5.647352×10^{-3}	1.079751×10^9	1.194711×10^{-1}
3	5.662135×10^{-3}	1.082999×10^9	1.400486×10^{-2}
4	5.662219×10^{-3}	1.083000×10^9	1.823296×10^{-3}
5	5.662222×10^{-3}	1.083000×10^9	1.974522×10^{-5}
6	5.662222×10^{-3}	1.083000×10^9	2.297691×10^{-7}
Estiramento do cabo 2			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(2)}$	σ_p	$\ r\ /F_{pe}^{(2)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^0
2	5.800963×10^{-3}	1.080943×10^9	1.241954×10^{-1}
3	5.819315×10^{-3}	1.082991×10^9	1.569217×10^{-2}
4	5.819476×10^{-3}	1.083000×10^9	1.902410×10^{-4}
5	5.819479×10^{-3}	1.083000×10^9	2.111606×10^{-6}
6	5.819479×10^{-3}	1.083000×10^9	2.349905×10^{-8}
Estiramento do cabo 3			
Iter	$\varepsilon_{po}^{(3)}$	σ_p	$\ r\ /F_{pe}^{(3)}$
1	0.000000×10^0	0.000000×10^0	1.000000×10^1
2	5.779218×10^{-3}	1.044796×10^9	9.435536×10^{-2}
3	5.985354×10^{-3}	1.082754×10^9	3.725194×10^{-3}
4	5.986716×10^{-3}	1.082998×10^9	5.608567×10^{-5}
5	5.986730×10^{-3}	1.083000×10^9	4.469166×10^{-7}

Tabela 6. Forças de protensão nos cabos não aderentes após os estiramentos

Cabo (i)	Forças de protensão (N) após estiramentos dos cabos			Perda de Protensão (%)
	Estiramento cabo 1	Estiramento cabo 2	Estiramento cabo 3	
Cabo 1	151,619.99	147,388.76	142,865.50	5.77
Cabo 2	0	151,619.99	147,119.07	2.97
Cabo 3	0	0	151,619.99	0

Avaliando o modelo de viga continua com cabos curvos, identifica-se uma redução da força de protensão total para o cabo 1 de 5,77% e para o cabo 2 de 2,97% ao final da fase de aplicação da protensão. Já a perda protensão média para os cabos por estiramento varia percentualmente em torno de 2,9%, enquanto a deformação inicial teórica apresenta uma variação percentual media por cada estiramento de 2,79%.

8 Conclusão

Os resultados mostraram que para os três modelos analisados houveram perdas da força de protensão aos cabos anteriormente protendidos, que variaram entre 3,01% e 5,77% para o cabo 1 e de 1,51% até 2,97% para o cabo 2. Considerando a perda de protensão média por cada aplicação de protensão, observa-se que os resultados variaram em media de 1,5% a 2,9% para os modelos estudados. Com relação a deformação inicial teórica, constata-se que ocorreram também mudanças

percentuais a cada novo estado de equilíbrio pelo estiramento sequencial dos cabos não aderentes, com valores de 1,64% a 2,79%. Toda a análise de convergência do sistema ocorreu em poucas etapas de interação, entre 5 e 6 interações, confirmando uma rápida análise não-linear.

Assim, verifica-se que os modelos que apresentaram os maiores valores de forças de protensão também apresentaram as maiores perdas de protensão, conforme os resultados mostrados. Esse fato pode indicar uma influência das perdas de protensão por estiramento sequencial dos cabos, que não podem ser desprezados em projetos estruturais, principalmente se as estruturas projetadas de pós-tração requererem forças de protensão elevadas.

Agradecimentos

Ao Laboratório de Mecânica Computacional e Visualização (LMCV) e à Universidade Federal do Ceará (UFC) pelo apoio ao trabalho desenvolvido.

Referências

- [1] Veríssimo, G.D.S & Cesár Junior, K.M.L. *Concreto Protendido: Fundamentos Básicos*. 4. ed. Viçosa: Universidade Federal Viçosa, 1998. 78 p.
- [2] Moreira, L.S.; Sousa Junior, J.B.M & Parente Junior, E. *NonLinear finite element simulation of unbonded prestressed concrete beams*. Engineering Structures 170, p. 167-177 (2018).
- [3] Naaman, A. E. & Alkhairi, F. M. *Stress at Ultimate Unbonded Post-Tensioned Tendons: Part 2-Proposed Methodology*. ACI Structural Journal, Farmington Hills, ACI, vol. 88, n.5, 1991.
- [4] Wu, Xiao-Han, and Xilin Lu. *Tendon model for nonlinear analysis of externally prestressed concrete structures*. Journal of structural engineering 129.1 (2003): 96-104.
- [5] Lou, T.; Lopes, S. M.R. & Lopes, A.V. *Finite element modeling of concrete beams prestressed with external tendons*. Computers and Structures, v. 28, p. 1919-1926, 2006.
- [6] Zona, A.; Ragni, L. & Dall'Astra, A. *Finite element formulation for geometric and material nonlinear analysis of beams prestressed with external slipping tendons*. Finite Elements in Analysis and Design. v. 44, p.910-919, 2008.
- [7] Oliveira, M. V. X. *Análise Numérica de Vigas Protendidas*. 2017. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.
- [8] Cook, R.D; Malkus, D. S.; Plesha, M. E. *Concepts and applications of finite element analysis*. 4ª ed. Edit. John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [9] Moreira, L.S. *Análise não-linear via elementos finitos de vigas de concreto com protensão não aderente*. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016.
- [10] Lou, T.; Lopes, S. M.R. & Lopes, A.V. *Nonlinear and time-dependent analysis of continuous unbonded prestressed concrete beams*. Engineering Structures 119, p. 166-176 (2013).
- [11] De Borst, R., Crisfield, M. A., Remmers, J. J., & Verhoosel, C. V. *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons, 2012.
- [12] Hanai, J. B. *Fundamentos do concreto protendido*. Universidade de São Paulo-Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 2005.
- [13] Tao, X., & Du, G. *Ultimate stress of unbonded tendons in partially prestressed concrete beams*. PCI Journal, 30(6), 72-91(1985).
- [14] Hussien, O. F., Elafandy, T. H. K., Abdelrahman, A. A., Abdel Baky, S. A., & Nasr, E. A. *Behavior of bonded and unbonded prestressed normal and high strength concrete beams*. HBRC journal, v. 8, n. 3, p. 239-251, 2012
- [15] Code, Price. *EUROCODE 2: Design of Concrete Structures-Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*, 2005.