

Estudo da Aplicação do Método das Camadas no Método dos Elementos Finitos 1d Para Análise de Vigas de Concreto Armado

Luis Felipe dos Santos Ribeiro

Agno Alves Vieira

estudanteluis12@gmail.com

agno.vieira@ifg.edu.br

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Rua 64 - Parque Lago, 73813-816, Formosa Goiás, Brazil

Abstract. Este trabalho apresenta a implementação de uma rotina computacional que realiza análises não lineares de vigas de concreto armado por meio do Método dos Elementos Finitos 1d (MEF 1d), onde o concreto e o aço são discretizados pelo Método das Camadas. Este, consiste em discretizar a seção transversal em n camadas, que por sua vez, considera as não linearidades físicas dos materiais em cada uma, sendo ele, aplicado nos pontos de integração dos elementos finitos. Os fenômenos como fissuração e seus efeitos de redistribuição de tensões ao longo da seção transversal do elemento são inseridos implicitamente por meio das relações constitutivas dos materiais. A formulação do elemento adota a hipótese da viga de Euler-Bernoulli, assim como, aderência perfeita entre o aço e o concreto. Para resolução do problema não-linear utiliza-se o Método da Rigidez Secante. Deste modo, para validação da implementação proposta, os resultados obtidos são comparados com resultados experimentais propostos por Bresler e Scordelis. Além disso, são avaliadas a influência dos modelos constitutivos adotados e da malha de elementos finitos. Por fim, são observados excelentes resultados numéricos quando comparados com os dados experimentais, apesar de se empregar uma formulação elementar e de baixo custo computacional em relação ao MEF 2d e 3d.

Keywords: Vigas, Concreto Armado, Análise não Linear, MEF 1d.

1 Introdução

O concreto armado (CA), devido a sua heterogeneidade e efeitos provenientes dos carregamentos submetidos, apresenta um comportamento de difícil obtenção. Este, quando analisado em função de sua tensão e deformação, apresenta uma curva não linear expressa por meio das suas relações constitutivas. A análise do comportamento de elementos estruturais de concreto armado é objeto de inúmeros estudos ao redor do mundo, bem como as formulações e procedimentos matemáticos para a obtenção do mesmo.

Diferentes são os efeitos que influenciam o comportamento de elementos de CA. Entre eles, a baixa resistência a tração do concreto quando comparado a compressão, possui grande destaque, tal característica contribui para formação de fissuras mesmo quando submetido a baixos carregamentos. Levando a degradação da estrutura e, conseqüentemente, perda da rigidez, na qual compromete o desempenho do elemento estrutural.

Dessa forma, o estudo da fissuração é fundamental para a compreensão e implementação de modelos aplicados a análise de elementos de CA. Nesse sentido, D'Avila [1] compara diferentes modelos de fissuração: o modelo com as fissuras incorporadas, proposto por Dvorkin [2], e o modelo de fissuras distribuídas, apresentado pelo CEB [3]. Destaca-se a simplicidade e o menor custo do modelo incorporado, pois são usadas as mesmas equações constitutivas, tanto para a zona fissurada quanto para a zona não fissurada. Já o modelo distribuído, precisa ser ajustado para cada uma das situações, ou seja, este só é utilizado nos elementos finitos que estão compreendidos na região fissurada.

Outro parâmetro importante na análise do comportamento de elementos de CA é a aderência entre os materiais, pois esta possibilita a transferência de tensões entre eles, fato este que proporciona que ambos suportem as solicitações e, conseqüentemente, seja obtido um comportamento estrutural mais rígido. Assim, Neto [4] e Luke [5] estudaram modelos com variação da aderência (MAV) e com perfeita aderência entre os materiais (MAP). O MAP é um caso a parte do MAV, pois a aderência parte da perfeita interação entre os materiais e é degradada a medida que se aumentam as solicitações na peça. Então, a partir dos estudos mencionados, concluiu-se que é possível observar bons resultados com o MAP. Todavia, para representar a perfeita realidade, é fundamental a utilização do MAV.

A transferência de esforços supracitada, proveniente da aderência entre os materiais, após iniciar a abertura de fissuras, faz com que não só a armadura seja responsável por resistir aos esforços de tração, mas também o concreto. Este efeito é conhecido como *Tension Stiffening* (TS), e, segundo Manfredi e Pecce [6], é um dos principais efeitos em estruturas de CA, sendo imprescindível a sua consideração em análises não lineares. Cabe destacar que, modelos numéricos mais simplificados inserem tais efeitos a partir das relações constitutivas do concreto tracionado, por meio da resistência pós deformação de fissuração, onde essa decai a medida que o material vai se deformando em um processo de amolecimento. Este efeito é conhecido como *Tension Softening* [7].

Na busca de modelos constitutivos que representam o TS diversos trabalhos foram desenvolvidos. Entre eles destacam-se, o de Lin e Scordelis [8], que modificaram a equação constitutiva do concreto após iniciar o processo de fissuração. Gilbert e Warner [9], propôs um modelo constitutivo que considera três trechos lineares: primeiro trecho de ascensão antes da fissuração e, após a fissuração, dois trechos de declínio até que o concreto não resista mais a tração. Okamoto e Maekawa [10] desenvolveram um modelo com um ramo linear crescente até o início da fissuração e um ramo decrescente de grau C , coeficiente relacionado a energia de fratura do material. Stramandinolli [11] em seu modelo considerou três ramos: um ramo linear inicial, uma curva decrescente e um ramo linear decrescente final, obtendo resultados muito satisfatórios.

Para a implementação das relações supracitadas na análise de vigas de CA o Método das Camadas (MC) apresenta uma boa eficiência. Como apresentado nos trabalhos de Marí [12], Rasheed e Dinno [13], Chimello [14], Stramandinoli [11], Oliveira [15]. Este consiste em discretizar a seção transversal em camadas, encontrar a deformação no centroide de cada e em seguida obter a sua rigidez. Por fim, obtém-se a rigidez total da seção transversal através da contribuição de cada camada.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos mais utilizados atualmente, tanto no meio acadêmico, quanto no meio técnico e profissional. As abordagens mais utilizadas na análise do compor-

tamento de vigas de CA são as que adotam elementos bidimensionais e tridimensionais. Tais abordagens oferecem uma série de dificuldades como, problemas de malha e estabilidade numérica. Uma alternativa com baixo custo computacional é a combinação do MC com MEF 1d, no entanto tal abordagem não é difundida no meio técnico como relata Stramandinoli [16].

Assim, este trabalho apresenta a implementação de um programa computacional MEF 1d com MC que analisa vigas de concreto armado. Este adota o elemento finito de viga elementar constituído por quatro graus de liberdade (dois transversais e dois rotacionais). O processo de fissuração é implementado por meio de uma equação constitutiva proposta por Okamoto e Meakawa [10] que representa a perda de seção e, conseqüentemente, a redução da rigidez. Estes também propuseram as equações constitutivas aqui adotadas para o concreto tracionado, sendo o *Tension Stiffening* e o *Tension Softening* também considerados no programa desenvolvido. Para o concreto sob compressão, adotou-se o modelo constitutivo proposto por Hognestad [17]. Este foi adotado por Stramandinoli [11] que obteve resultados satisfatórios. Por fim, o modelo elastoplástico perfeito foi utilizado para a armadura.

A implementação computacional foi desenvolvida no ambiente do Matlab, na qual emprega-se a formulação do MEF apresentada por Zienkiewicz [18] e Fish e Belytschko [19]. Empregou-se aderência perfeita entre os materiais e a hipótese de Euler-Bernoulli para a seção transversal. As não linearidades são empregadas nos dois pontos de integração dos elementos finitos e os valores obtidos são interpolados, por meio de funções de forma, para que se obtenha o comportamento de todo o domínio do elemento finito. Em relação à análise não-linear, adotou-se um esquema incremental-iterativo, com controle de carga, no qual a matriz de rigidez secante é atualizada a cada iteração do processo. Logo, prevasse uma busca por simplificar a formulação empregada por meio de metodologias consistentes observadas na bibliografia. Por fim, para validação do programa proposto, gerou-se curvas de carga versus deslocamento que são comparadas com resultados experimentais obtidos por Bresler e Scordelis [20].

2 Método dos Elementos Finitos 1D

O programa computacional desenvolvido segue a formulação do MEF, considerando apenas uma direção principal, eixo x , na discretização da estrutura em elementos finitos. Neste, adotou-se a divisão do domínio da estrutura em elementos finitos de viga. As hipóteses de Euler-Bernoulli são consideradas como base para obtenção das deformações na seção transversal e não são considerados os efeitos e deformações provenientes dos esforços de cisalhamento. O elemento finito adotado possui dois nós com quatro graus de liberdade, sendo dois transversais (v_i) e dois rotacionais (θ_i), conforme a Fig. 1.

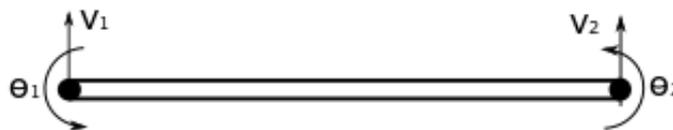


Figura 1. Elemento finito unidimensional adotado. Fonte: Jacob e Ted [19] adaptada

A formulação empregada parte da Eq. 1, que correlaciona os deslocamentos nodais (d) com as forças nodais (F) por meio da matriz de rigidez do elemento finito (K).

$$F = K \cdot d \quad (1)$$

Com d dado pela Eq. 2.

$$d = \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

O vetor de forças é desenvolvido a partir da determinação do processo incremental de carga e a matriz de rigidez é obtida a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

$$K = \int B^t \cdot D(\varepsilon) \cdot B \cdot dV \quad (3)$$

Onde $D(\varepsilon)$ é a matriz constitutiva do elemento construída a partir da rigidez obtida pelo MC a ser apresentado na seção 3. E B é a matriz composta pelas derivadas das funções de forma N_i .

$$B = \frac{d}{ds} \cdot \frac{2}{L} \cdot \begin{bmatrix} N_1(s) & N_2(s) & N_3(s) & N_4(s) \end{bmatrix} \quad (4)$$

As funções de forma aqui consideradas são apresentadas abaixo:

$$N_1 = \frac{1}{4} \cdot (1 - s)^2 \cdot (2 + s) \quad (5)$$

$$N_2 = \frac{L}{8} \cdot (1 - s)^2 \cdot (1 + s) \quad (6)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \cdot (1 + s)^2 \cdot (2 - s) \quad (7)$$

$$N_4 = \frac{L}{8} \cdot (1 + s)^2 \cdot (s - 1) \quad (8)$$

O procedimento para obtenção das funções de forma acima pode ser melhor visto em Azevedo [21]. s é a coordenada natural, expressa pela equação 9.

$$s = \frac{2x}{L} - 1, \quad -1 < s < 1 \quad (9)$$

Assim, será possível obter os deslocamentos nodais que serão interpolados também por meio das funções de forma para obtenção do campo dos deslocamentos, apresentada pela Eq. 10, e, consequentemente, os deslocamentos em quaisquer ponto do domínio da estrutura.

$$u(x) = N_1(x) \cdot v_1 + N_2(x) \cdot \theta_1 + N_3(x) \cdot v_2 + N_4(x) \cdot \theta_2 \quad (10)$$

O campo dos deslocamentos expresso em função da coordenada natural s é:

$$u(s) = N_1(s) \cdot v_1 + N_2(s) \cdot \theta_1 + N_3(s) \cdot v_2 + N_4(s) \cdot \theta_2 \quad (11)$$

3 Método das Camadas

Para implantar as não linearidades dos materiais é utilizado o MC. Este consiste em dividir a seção transversal em n camadas, conforme apresentado na figura 2, em seguida calcular a rigidez individualmente, sobrepondo-as de modo a obter a rigidez final da seção transversal. A hipótese de Euler-Bernoulli é adotada, desta maneira considera-se que a seção transversal permanece plana e perpendicular a linha neutra (LN), as deformações por cisalhamento são desconsideradas e as deformações são lineares ao longo da seção transversal. Também é considerada aderência perfeita a entre os materiais, assim como a ausência de grandes deslocamentos da estrutura.

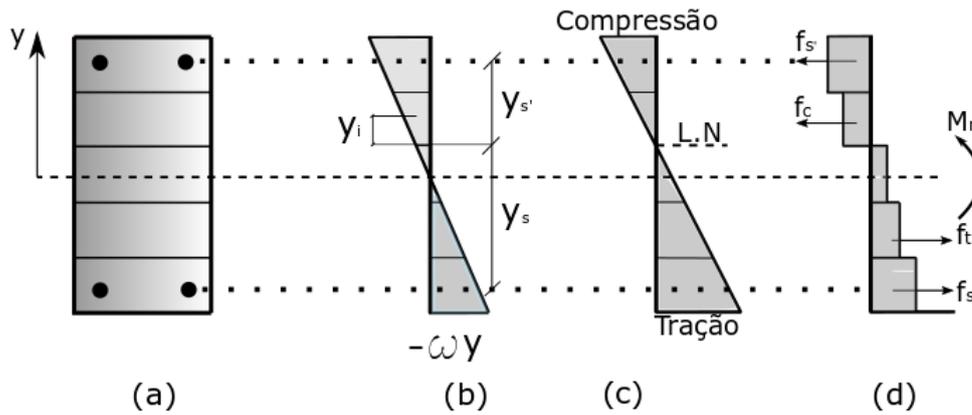


Figura 2. Discretização da seção transversal em camadas. Fonte: Própria

Assim a deformação de cada camada i , ε_i , é obtida por meio da Eq. 12 que correlaciona a posição da camada em relação a LN (y_i) e a curvatura (φ) da seção transversal.

$$\varepsilon_i(y_i, \varphi) = -y_i \cdot \varphi \quad (12)$$

$$\varphi = B \cdot d \quad (13)$$

Os esforços resistentes M_r e N_r são obtidos a partir do somatório da resistência das n camadas. A partir de ε_i é possível obter as tensões em cada camada de concreto (σ_c) e no aço (σ_s) por meio das equações constitutivas apresentadas na seção 4.

Em seguida, conhecidas as tensões e deformações das camadas é calculada a rigidez pelo Método Secante e, conseqüentemente, a matriz $D(\varepsilon)$, conforme a Eq. 14.

$$D(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^n E_i \cdot I_i \quad (14)$$

Na qual E_i são os módulos secantes do concreto, para as diferentes solicitações, obtidos a partir das Eq. 15 (compressão) e 16 (tração). E I_i são os momentos de inércia das camadas.

$$E_c = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} \quad (15)$$

$$E_t = \frac{\sigma_t}{\varepsilon_t} \quad (16)$$

4 Equações Constitutivas

Para a obtenção das propriedades físicas da seção transversal, os materiais são modelados a partir de diferentes relações constitutivas de acordo com a solicitação na qual o mesmo está submetido.

4.1 Concreto

Assim como Chimello [14], Stramandinoli [11] e Gelatti [22], que obtiveram resultados satisfatórios em suas pesquisas, adota-se o modelo constitutivo proposto por Hognestad [17]. Este relaciona a tensão e a deformação por meio da equação 17.

$$\sigma_c = f_{cm} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (17)$$

Em que σ_c é a tensão no concreto, f_{cm} é a Resistência média à compressão do concreto, ε_0 é a deformação correspondente à tensão máxima (f_{cm}), ε_c é a deformação no concreto, ε_u é a deformação última no concreto correspondente a tensão: $0,85 f_{cm}$;

O modelo pode ser observado na figura 3.

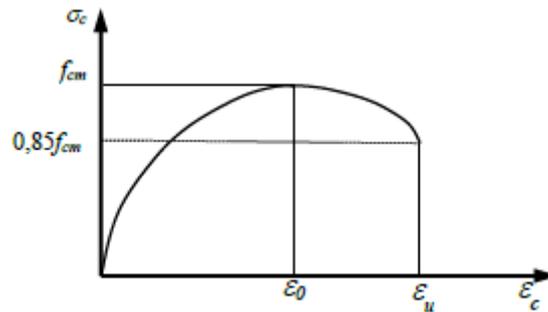


Figura 3. Modelo Constitutivo de Hognestad Modificado. [17]

O comportamento do concreto sob tração é modelado com dois trechos: antes de atingir a deformação de fissuração (ε_{cr}) e após atingi-la. O modelo constitutivo proposto por Okamoto e Maekawa [10] é adotado. Pois, de acordo com os estudos de Vieira [23] e Salem [24], resultados satisfatórios são obtidos a partir do mesmo.

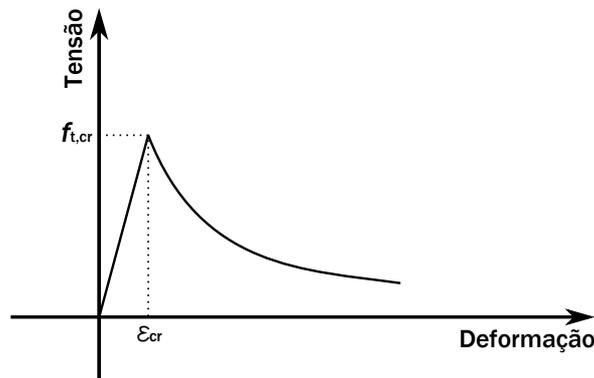


Figura 4. Modelo constitutivo para o concreto tracionado. Fonte: Okamoto e Maekawa [10].

Para o primeiro trecho, antes da fissuração, é considerado um modelo linear de ganho de resistência a tração f_t , conforme apresentado na Eq. 18.

$$f_t = E_o \cdot \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t < \varepsilon_{cr} \quad (18)$$

Para o segundo trecho é considerado o *Tension Softening*, sendo este modelado como uma curva descendente conforme apresentado pela Eq. 19.

$$f_t = f_{tp} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{tp}}{\varepsilon_t} \right)^C; \quad \varepsilon_t > \varepsilon_{cr} \quad (19)$$

Segundo Vieira [23], esta abordagem foi empregada com êxito nos modelos propostos por Salem [24] e também apresentou resultados satisfatórios em seu modelo ao aplicar na análise de vigas parede. No entanto, o autor ressalta a dificuldade de se definir o expoente C presente na Eq. 19. No trabalho de Maekawa, Pinamas e Okamura [7], é sugerido o valor de 0.2 para elementos armados com telas soldadas e 0.4 para elementos armados com barras.

4.2 Aço

A relação constitutiva adotada para o aço é o modelo elasto-plástico perfeito. Este considera um comportamento linear até a tensão de escoamento (σ_y) e, em seguida, é apresentada uma variação constante até a ruptura.

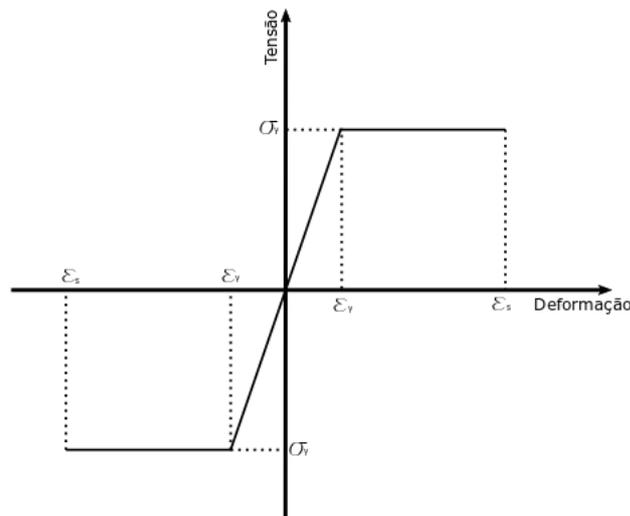


Figura 5. Modelo elasto-plástico perfeito para o aço. Fonte: Stramandinoli [11].

5 Programa Computacional

A Fig. 6 apresenta o fluxograma do programa computacional proposto que é constituído por 3 sub rotinas. O Pré Processor, responsável pela leitura dos dados de entrada e organização cinemática. Processor, responsável pela resolução do sistema incremental/iterativo, onde os incrementos são realizados com a adição de parcelas de força (ΔF) definidos nos dados de entrada. As interações são executadas até a convergência do modelo, obtida quando a tolerância (*tol*) for maior ou igual ao resíduo (*R*). E Post Processor, cuja objetivo é organizar e interpolar os resultados obtidos apresentando as configurações indeformada e deformada. Assim como a malha de elementos finitos adotada.

Cabe destacar que na sub rotina Processor, a rigidez do elemento de viga é obtida através do uso do Método das Camadas, onde a rotina calcula as deformações de cada camada através da Eq.12, diante dessa e com uso das relações constitutivas abordadas na seção 4 são obtidas as tensões em cada camada. Com o uso das Eqs. 15 e 16 são calculados os módulos secantes de cada camada. Por fim, a rigidez da seção é gerada a partir da contribuição de cada camada conforme a Eq. 14.

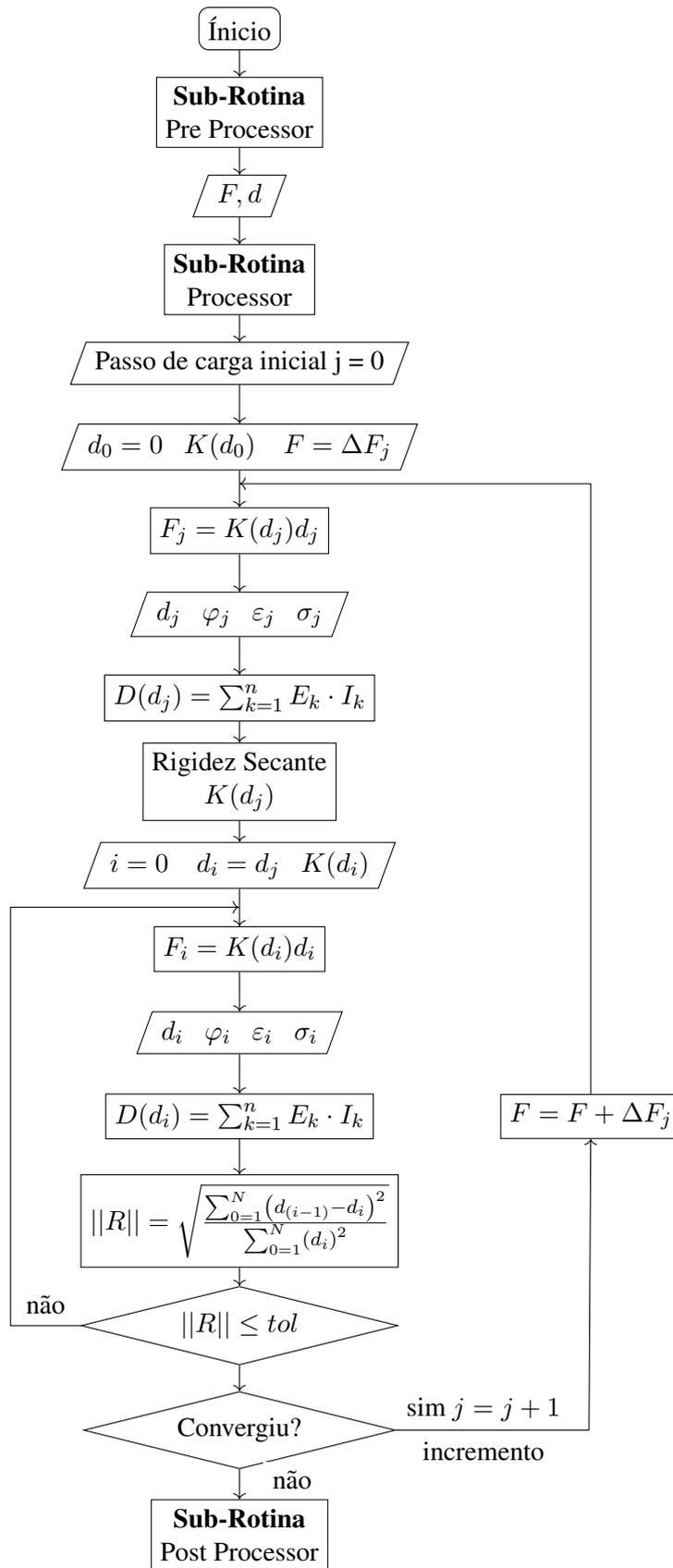


Figura 6. Fluxograma CABeam.

6 Exemplos

Para avaliação da eficiência do programa computacional implementado serão analisados o coeficiente C empregado na relação constitutiva do concreto tracionado, a convergência de malha por meio da identificação do melhor número de elementos finitos e a eficácia do programa quanto a obtenção da carga última das vigas analisadas. Como referência experimental serão analisadas as vigas ensaiadas por Bresler e Scordelis [25]. Tais resultados foram utilizados para verificação da eficácia de diversas pesquisas, tais como as de Vecchio e Shim [26], Dabbagh e Foster [27] e Stramandinolli [11]. As propriedades físicas e geométricas das vigas são apresentadas na Fig. 7 e na Tabela 1.

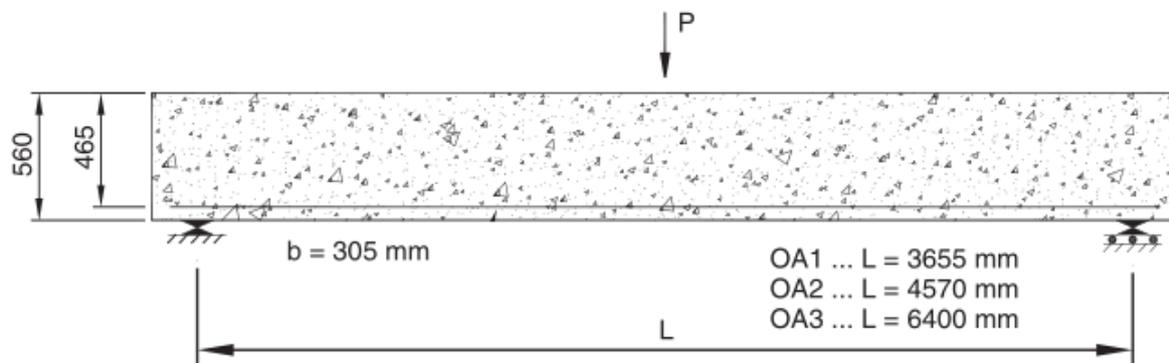


Figura 7. Propriedades geométricas das vigas. Fonte: Dabbagh e Foster [27] Adaptada.

Neste trabalho, como a formulação empregada desconsidera os efeitos do cisalhamento, buscou-se empregar vigas que o modo de ruptura seja por flexão e que se afaste de rupturas providas por outros efeitos. Assim sendo, adotou-se vigas com baixas taxas de armadura e sem a presença de armaduras transversais, para que dessa forma fosse possível captar melhor a influência das não linearidades provenientes do processo de fissuração ocasionado apenas pela tração uniaxial do concreto sob flexão simples.

Tabela 1. Propriedades físicas das vigas

Vigas	E_c (GPa)	E_s (GPa)	Área de Aço (m^2)	f_c (MPa)	f_t (MPa)	f_y (MPa)	ε_{cp} (m)
OA1	20	206	0.00258	22.6	1.9	556	0.002
OA2	20	206	0.003225	23.7	2.0	556	0.002
OA3	32	206	0.00385	37.6	2.5	556	0.0025

Como já relatado por Vieira [23] não existe procedimento exato para a determinação do expoente C da Eq. 19. Dessa forma, a análise das vigas supracitadas foram inseridas três valores de C , dispostos no intervalo sugerido por Maekawa, Pinamas e Okamura [7]. Com isso pretende-se identificar a influência desse parâmetro no modelo implementado.

Para a viga OA1, as curvas carga versus deslocamento são apresentadas na Fig. 8, sendo observados resultados muito satisfatórios para todos os valores empregados. Porém, para $C=0.3$, têm-se as melhores respostas.

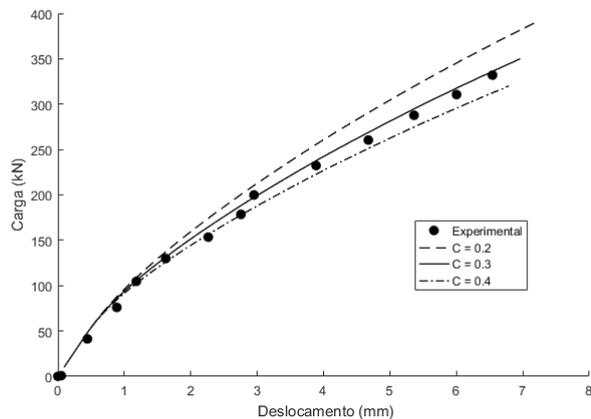


Figura 8. Carga versus deslocamento da viga OA1 com variação do C.

Assim como para a viga OA1, com $C=0.3$ obtém-se a melhor resposta da viga OA2, Fig. 9. Neste momento é possível observar como este parâmetro influencia na rigidez, pois quanto mais esbelta a viga, este tende a ter o valor reduzido, comportamento observado em todas as análises.

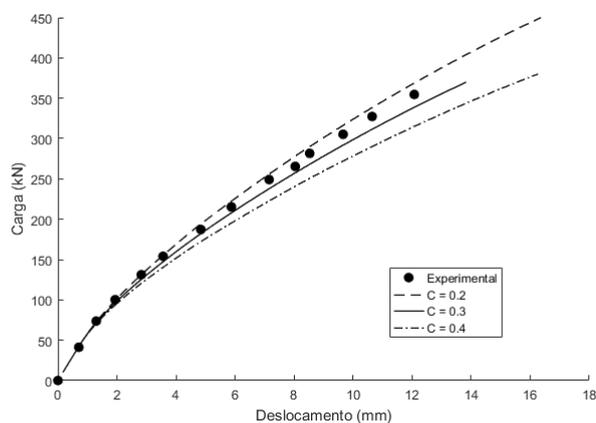


Figura 9. Carga versus deslocamento da viga OA2 com variação do C.

Para a viga OA3, Fig. 10, é observado um comportamento mais peculiar, pois neste caso é possível observar boas correlações para $C=0.3$, quanto ao comportamento da peça, e, para $C=0.2$, uma resposta excelente quanto a carga última.

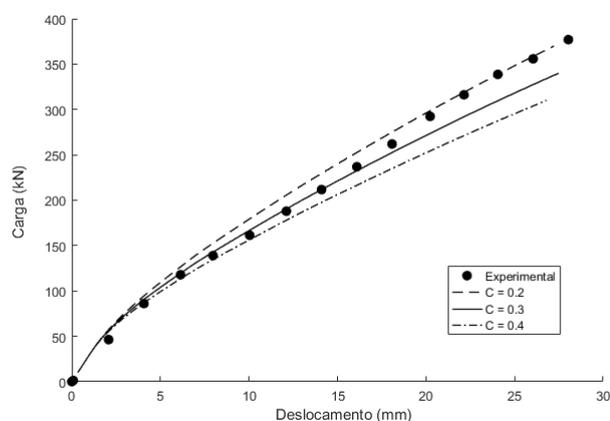


Figura 10. Carga versus deslocamento da viga OA3 com variação do C.

Assim sendo, após a representação do comportamento do elemento foi possível observar resultados excelentes para todos os valores de C empregados, comprovando assim a eficácia dos valores propostos por Maekawa, Pinamas e Okamura [7]. Desta forma, por meio da análise das curvas, tem-se para a relação constitutiva do concreto tracionado o $C=0.3$ como melhor parâmetro para a obtenção do comportamento.

Quanto a análise da convergência de malha foram realizadas análises com 7, 15 e 25 elementos. Vale ressaltar que, apesar do coeficiente C ser dependente da energia de fratura e comprimento do elemento, como indicado por Maekawa, Pinamas e Okamura [7] não existe uma formulação clara para estabelecer tal relação. Dessa forma procedimentos para sanar a dependência de malha não foram aplicados.

Sendo a redução do custo computacional um dos objetivos deste trabalho, malhas muito refinadas fazem com que este custo seja elevado. Assim, identificar o melhor grau de refinamento que apresenta bons resultados é essencial para atingir este objetivo.

Para a viga OA1 apresenta-se na Fig. 11 excelente concordância entre o resultado numérico e o experimental. Portanto, entre 15 e 25 elementos finitos não são observadas diferenças entre os resultados obtidos.

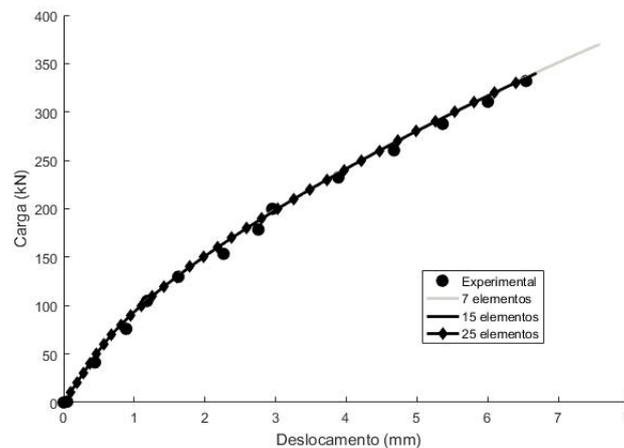


Figura 11. Gráfico de carga e deslocamento com variação da malha.

Para a viga OA2, Fig. 12, é encontrada uma pequena diferença entre a malha de 15 e 25 elementos finito, fato este que não justifica um maior grau de refinamento.

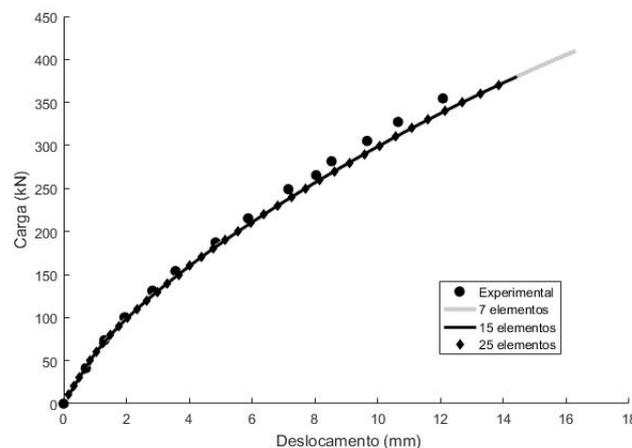


Figura 12. Gráfico de carga e deslocamento com variação da malha.

Para a viga OA3, Fig. 13, assim como na viga OA1, não são observados variações nos resultados numéricos obtidos. Portanto, os melhores resultados são obtidos com o menor grau de discretização da

estrutura, ou seja 7 elementos finitos, fato este explicado pela não identificação precisa do processo de fissuração resultando em uma maior rigidez da peça e, conseqüentemente, uma maior carga última.

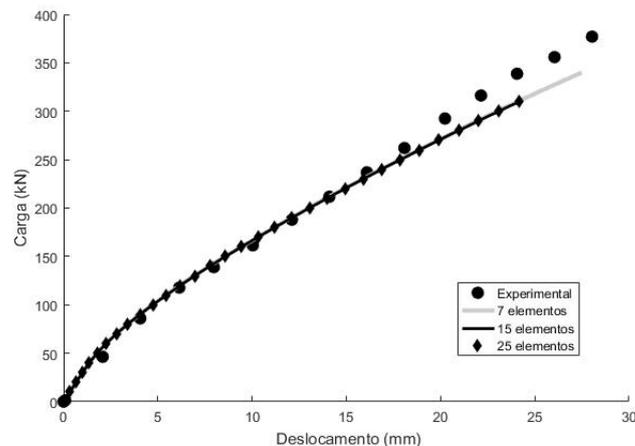


Figura 13. Gráfico de carga e deslocamento com variação da malha.

Finalmente, emprega-se um pequeno estudo quanto a carga última obtida para cada viga analisada. Considera-se $C=0.3$ e 15 elementos finitos e os resultados obtidos são expressos na tabela 2. Os resultados numéricos obtidos são satisfatórios quando comparados aos experimentais.

Tabela 2. Estudo de carga última

Vigas	Numérico (kN)	Experimental (kN)	Erro (%)
OA1	340	331.983	2.415
OA2	380	354.667	7.143
OA3	310	377.056	17.784

7 Conclusões

Este trabalho apresentou a implementação computacional do Método dos Elementos Finitos 1d com uso do Método das Camadas. Foram verificados a influência do coeficiente C , responsável pelo grau de contribuição do *Tension Softening* em vigas fissuradas, por meio da variação do seu valor nas análises. Foram realizados testes quanto a convergência de malha para entender qual o melhor grau de discretização da estrutura e, por fim, estudou-se o capacidade de se obter a carga última das peças. Desta forma, a partir dos resultados obtidos, verificou-se que, apesar de tal abordagem ser bastante simplificada quando comparada as implementações do MEF 2d e 3d, tal simplicidade não gerou prejuízos significativos nos resultados, visto a eficiência dos mesmos em comparação com os experimentais.

Este modelo considera apenas os efeitos de flexão, já que a formulação do elemento utiliza a hipótese de Euler-Bernoulli. Dessa forma, como já esperado o modelo aqui implementado obteve bons resultados quando comparados com os experimentais. No entanto, deve ser avaliado a acurácia do modelo para outras situações, como vigas contínuas e vigas com armadura transversal.

Assim, haja visto que esta implementação comporta-se bem para elementos com flexão predominante, o *Tension Stiffening* é um fator de direta influência nestes elementos. Logo, o expoente C e sua influência deve ser melhor estudado, ressaltando a ausência de formulações exatas para a sua obtenção. Pois, nos exemplos analisados, não houveram divergências significativas, porém a medida que o vão das vigas aumentava as respostas numéricas apresentavam comportamentos menos rígidos.

References

- [1] d'Avila, V. M. R., 2003. *Estudo sobre modelos de fissuração de peças de concreto armado via método dos elementos finitos*. PhD thesis, UFRGS.
- [2] Dvorkin, E. N., Cuitiño, A. M., & Gioia, G., 1990. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 30, n. 3, pp. 541–564.
- [3] CEB, C. E. I. d. B., 1990. *CEB-FIP Code Model 1990*.
- [4] Marins Neto, J., 2007. *Análise numérica não-linear de estruturas de concreto armado considerando o fenômeno da aderência entre o aço e o concreto*. Master's thesis, Unicamp.
- [5] Luke, W. G. d. M., 2015. *Análise numérica não-linear de elementos de concreto estrutural considerando a variação de aderência*. Master's thesis, UnB.
- [6] Manfredi, G. & Pecce, M., 1998. A refined rc beam element including bond–slip relationship for the analysis of continuous beams. *Computers & structures*, vol. 69, n. 1, pp. 53–62.
- [7] Maekawa, K., Okamura, H., & Pimanmas, A., 2003. *Non-linear mechanics of reinforced concrete*. CRC Press.
- [8] Lin, C.-S. & Scordelis, A. C., 1975. Nonlinear analysis of rc shells of general form. *Journal of the Structural Division*, vol. 101, n. 3, pp. 523–538.
- [9] Gilbert, R. I. & Warner, R. F., 1978. Tension stiffening in reinforced concrete slabs. *Journal of the structural division*, vol. 104, n. 12, pp. 1885–1900.
- [10] Okamoto, H. & Maekawa, K., 1991. *Nonlinear analysis and constitutive models of reinforced concrete*. Gihodo Shuppan Company.
- [11] Stramandinoli, 2007. *Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado*. PhD thesis, UFSC.
- [12] Mari, A. R., 1984. *Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of three dimensional reinforced and prestressed concrete frames*. Department of Civil Engineering, University of California.
- [13] Rashid, Y. R., 1968. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear engineering design*, vol. 7, pp. 334–344.
- [14] Chimello, A. d. A., 2003. *Análise não linear de vigas de concreto armado reforçadas com laminados de prfc*. Master's thesis, UFSC.
- [15] Oliveira, R., 2011. *Análise teórica e experimental de estruturas planas de concreto armado com a consideração da fluência*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- [16] Stramandinoli, R. S. B. & La Rovere, H. L., 2017. Modelo de elementos finitos para análise não linear de vigas e pórticos planos de concreto armado. *RIEM-IBRACON Structures and Materials Journal*, vol. 10, n. 2.
- [17] Hognestad, E., 1951. Study of combined bending and axial load in reinforced concrete members. Technical report, University of Illinois at Urbana Champaign, College of Engineering
- [18] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Zhu, J. Z., 2005. *The finite element method: its basis and fundamentals*. Elsevier.
- [19] Fish, J. & Belytschko, T., 2007. *A first course in finite elements*. Wiley.

- [20] Bresler, B. & Scordelis, A. C., 1963a. Shear strength of reinforced concrete beams. vol. 60, n. 1, pp. 51–74.
- [21] Azevedo, Á. F., 2003. *Método dos elementos finitos*. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto Portugal.
- [22] Gelatti, F., 2012. Análise não linear física e geométrica de pórticos planos de concreto armado: modelagem por elementos finitos de barra. Master's thesis, UFSC.
- [23] Vieira, A. A., 2018. *Análise experimental e numérica de vigas parede com geometrias não convencionais de concreto*. PhD thesis, IFG.
- [24] Salem, H. M., 2004. The micro truss model: an innovative rational design approach for reinforced concrete. *Journal of Advanced Concrete Technology*, vol. 2, n. 1, pp. 77–87.
- [25] Bresler, B. & Scordelis, A. C., 1963b. Shear strength of reinforced concrete beams. In *Journal Proceedings*, volume 60, pp. 51–74.
- [26] Vecchio, F. & Shim, W., 2004. Experimental and analytical reexamination of classic concrete beam tests. *Journal of Structural Engineering*, vol. 130, n. 3, pp. 460–469.
- [27] Dabbagh, H. & Foster, S., 2006. A smeared—fixed crack model for fe analysis of rc membranes incorporating aggregate interlock. *Advances in structural engineering*, vol. 9, n. 1, pp. 91–102.