

FINITE ELEMENT ANALYSIS USING THE MODIFIED COMPRESSION FIELD AND THE CRACKED MEMBRANE MODEL FOR STRUCTURAL CONCRETE SUBJECT TO IN-PLANE STRESS

Lucas Marques Teles da Silva

Ézio da Rocha Araújo

lucasmарques_17@hotmail.com

ezio@ufpe.br

Department of Civil Engineering, Federal University of Pernambuco

Av. Acadêmico Hélio Ramos, 50740-530, Recife/PE, Brazil

Ramiro Brito Willmersdorf

ramiro.wcomillmersdorf@gmail.com

Department of Mechanical Engineering, Federal University of Pernambuco

Av. Acadêmico Hélio Ramos, 50740-530, Recife/PE, Brazil

Abstract. In this paper, the Modified Compression Field Theory (MCFT, Vecchio and Collins, 1986) and the Cracked Membrane Model (CMM, Kaufmann and Marti, 1998) are developed into a finite element formulation for the analysis of orthogonally reinforced and prestressed structural elements in plane stress condition.

MCFT considers orthotropic concrete, distributed and rotating cracks that are normal to the principal tension stresses. Tension stiffening, aggregate interlock, and interactions between concrete and steel at surface of cracks use average strains and stress. Use of average constitutive equations relating average stress and strains are complicated and debatable.

CMM falls into the category of compression field models, combining components from MCFT and Tension Chord Model (TCM, Kaufmann, 1998) extended to cracked plane stress. In this way, the link to limit analysis is maintained and there is no need to introduce constitutive equations relating average stress and average strains in tension: the equilibrium is formulated in terms of stresses at cracks rather than average stress between cracks. This make easy to evaluated results from practical strut and tie models (STM).

Two above FE models are verified and compared against experimental results of beams, shear panels and deep beams.

Keywords: Cracked Concrete Panels, Finite Element, Limit Analysis

1 Introdução

Um método bastante eficaz para análise não linear de elementos de concreto armado é o Método dos Elementos Finitos. A partir de um conjunto de condições de equilíbrio, compatibilidade e relações constitutivas adequadas é possível obter boas estimativas de capacidade de carga, modos de ruptura e toda a curva carga por deslocamento das estruturas de concreto armado.

Um dos problemas remanescentes na engenharia estrutural está na análise e dimensionamento das estruturas que rompem por cisalhamento. Em geral, o comportamento das peças de concreto que rompem por flexão são bem conhecidas e existe uma única teoria universalmente aceita, baseada na hipótese das seções planas, produzida na década de 1960 por Rush.

Em contrapartida, o comportamento das estruturas que resistem principalmente ao cisalhamento é bastante complexa, envolvendo diversos mecanismos internos, como engrenamento dos agregados e efeito de pino.

Como consequência, diversas teorias relacionadas ao esforço cortante em peças de concreto armado vem sendo desenvolvidas nos últimos anos, das quais podemos citar: Vecchio e Collins [1], Pang e Hsu [2, 3]), Kaufmann e Marti [4], Vecchio [5], Dabbagh e Foster [7] e Pimental et al. [6].

O *Modified Compression Field Model*, proposta por Vecchio e Collins [1], é um dos mais importantes modelos para análise não linear de painéis de concreto armado, sendo base para vários outros modelos.

A hipótese adotada no MCFT assume que quando fissurado, o concreto pode ser tratado como um material ortotrópico. As equações de equilíbrio foram tomadas a partir das tensões médias, possibilitando ao concreto resistir, mesmo depois de fissurado, a tensões de tração, devido ao efeito de *tension-stiffening*. As fissuras são consideradas distribuídas ao longo do elemento e podem rotacionar com o carregamento, de modo que sempre permaneçam perpendicular à direção das deformações principais de tração. As armaduras são consideradas perfeitamente aderentes ao concreto.

Um outro modelo que faz frente ao MCFT é o *Cracked Membrane Model*, proposto por Kaufmann e Marti [4]. O modelo combina os conceitos básicos do *Modified Compression Field Model*, com o *Tension Chord Model*, proposto por Marti et al.[8].

Contrário ao MCFT, as equações de equilíbrio são tomadas a partir das tensões locais, permitindo ao modelo satisfazer os princípios da análise limite. As fissuras são distribuídas e livres para rotacionar mantendo-se sempre perpendicular a direção principal das deformações de tração. Depois de fissurado, a tensão principal de tração no concreto é nula e o efeito de *tension-stiffening* é considerado a partir dos conceitos do TCM.

Neste trabalho, busca-se implementar os dois modelos citados (MCFT e CMM) em um código de Método dos Elementos Finitos e comparar seus resultados com resultados experimentais existentes na literatura.

2 Modified Compression Field Theory (MCFT)

O MCFT é um modelo analítico para análise de elementos de concreto armado, proposto por Collins e Vecchio [1] e implementado em Elementos Finitos por Vecchio [9]). O modelo surgiu como uma melhoria na teoria do *Compression Field Theory* (Collins [10]), incorporando ao CFT os efeitos do *tension-stiffening*.

A hipótese adotada no MCFT assume que as direções das tensões médias principais coincidem com a direções das deformações principais, $\theta_\epsilon = \theta_\sigma$. As fissuras são consideradas distribuídas ao longo do elemento e podem rotacionar com o carregamento, de modo que sempre permaneça perpendicular à máxima direção das deformações principais, $\theta = \theta_\epsilon$.

Todo conceito do modelo foi criado a partir da elaboração de equações de equilíbrio e compatibilidade em termos de deformações e tensões médias, e suas relações constitutivos foram formuladas de forma empírica a partir da observação de ensaios de trinta painéis submetidos ao estado plano de tensões. No entanto, condições nas regiões locais das fissuras foram impostas de modo a manter a compatibilidade

entre as tensões nas regiões médias (região entre duas fissuras) e locais da fissura.

2.1 Equações de Equilíbrio

Considere um elemento de concreto armado com fissuras uniformemente distribuídas e paralelas entre si, conforme Fig. 1, submetido ao estado plano de tensões. Os eixos globais coincidem com as direções dos eixos cartesianos e os locais coincidem com as direções das fissuras. O ângulo, θ , é definido entre a direção principal normal às fissuras e o eixo x .

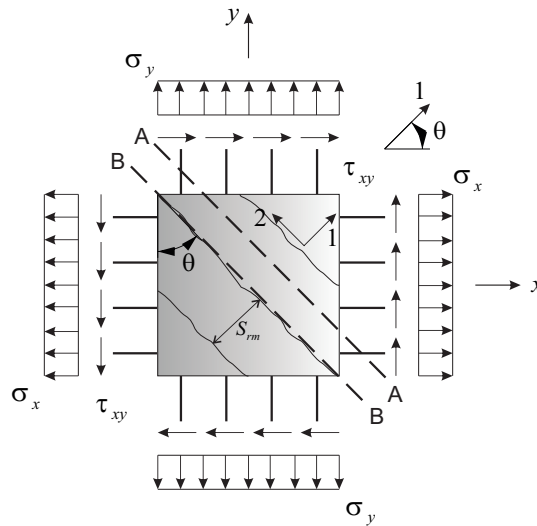


Figure 1. Elemento de concreto armado fissurado

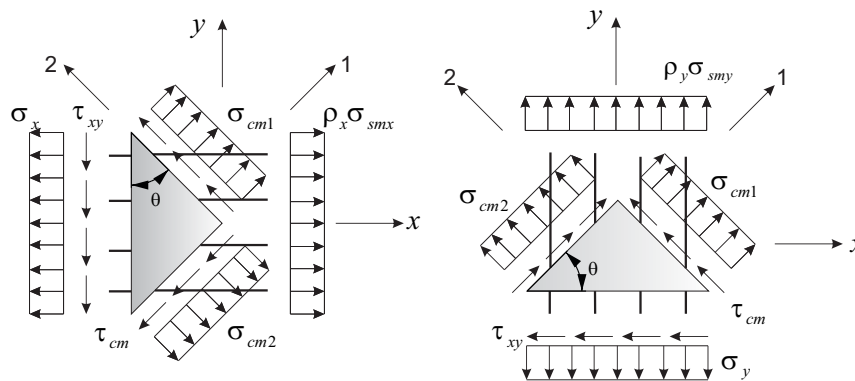


Figure 2. Equação de equilíbrio das forças em termos de tensões médias

A partir do diagrama de corpo livre, ilustrado na Fig. 2, representado por um corte AA (ver Fig. 1), localizado nas regiões entre duas fissuras, podemos formular as equações de equilíbrio nas direções x e y em termo das tensões médias.

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \sigma_{cm1}c^2 + \sigma_{cm2}s^2 - 2\tau_{cm}2sc + \rho_x\sigma_{smx}, \\
 \sigma_y &= \sigma_{cm1}s^2 + \sigma_{cm2}c^2 + 2\tau_{cm}2sc + \rho_y\sigma_{smy}, \\
 \tau_{xy} &= \sigma_{cm1}sc - \sigma_{cm2}sc + \tau_{cm}(c^2 - s^2).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

onde,

$$\begin{aligned} c &= \cos\theta, \\ s &= \sin\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

Baseado na hipótese em que as direções principais das tensões médias do concreto coincidem com as direções da fissura, a tensão cisalhante média do concreto é necessariamente igual a zero. Reescrevendo Eq. 1 de forma matricial, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{cm1} \\ \sigma_{cm2} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \rho_x \sigma_{smx} \\ \rho_y \sigma_{smy} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

2.2 Relação entre Tensões Médias e Locais da Fissura

Considerando um elemento sujeito a ações de carregamento no próprio plano, conforme a Fig. 1. Toda força aplicada a este elemento é resistida por tensões internas do concreto e da armadura. Porém, quando as tensões internas do elemento superam a resistência de tração do concreto, as fissuras pré-existentes no concreto aumentam de tamanho e largura. A partir deste momento, apenas o aço age no combate dos esforços de tração.

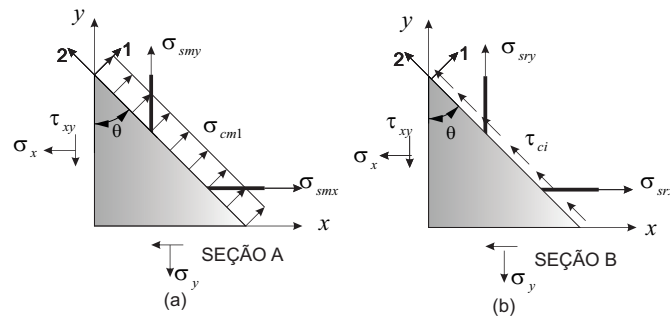


Figure 3. Condições de equilíbrio para as tensões médias e locais.

As tensões internas deste elemento devem ser analisadas em duas regiões distintas. A primeira em uma seção localizada na superfície da fissura (seção B), ilustrada em Fig. 3b. Nesta seção, devido ao deslizamento e abertura da fissura, surgem tensões adicionais na armadura causadas pelo incremento de deformação no aço. Como também, devido as rugosidades em sua superfície, surgem tensões de cisalhamento na direção transversal à fissura, impedindo o avanço do deslocamento.

A segunda região é localizada em uma seção entre duas fissuras, representada pela seção A, conforme Fig. 3a. Nesta região, o aço encontra-se aderente ao concreto, e parte da tensão resistida pela armadura é transferida ao concreto através de tensões de aderência, fazendo com que a tensão de tração no concreto seja maior que zero.

As tensões das duas regiões devem ser compatíveis de modo a garantir o equilíbrio interno do elemento. Fazendo o equilíbrio estático na direção normal à fissura, temos:

$$\sigma_{cm1} + \sum_{i=1}^n \rho_i \sigma_{smi} \cos^2 \theta_{ni} = \sum_{i=1}^n \rho_i \sigma_{sri} \cos^2 \theta_{ni}, \quad (4)$$

onde θ_{ni} é o ângulo formado entre a direção da armadura e a direção normal à fissura.

Segundo Vecchio [9], a tensão média de tração no concreto não deve ser maior que a soma da reserva de resistência em cada direção da armadura, calculada como a diferença entre a tensão média f_s ,

e a tensão na região da fissura, f_{scr} , da armadura. Esta deve ser limitada pela tensão de escoamento do aço f_y . Então, reformulando Eq. 4 temos:

$$\sigma_{cm1} \leq \sum_{i=1}^n \rho_i (f_y - \sigma_{smi}) \cos^2 \theta_{ni}. \quad (5)$$

Embora o modelo considere tensão cisalhante média do concreto nula, na região local, o deslizamento entre as superfícies da fissura é impedido devido ao efeito do engrenamento dos agregados, que proporciona uma transferência de tensões de cisalhamento nas regiões da fissura. Conseqüentemente, fazendo o equilíbrio estático na direção perpendicular à fissura, podemos determinar a tensão local de cisalhamento:

$$\tau_{ci} + \sum_{i=1}^n \rho_i \sigma_{smi} \cos \theta_{ni} \sin \theta_{ni} = \sum_{i=1}^n \rho_i \sigma_{sri} \cos \theta_{ni} \sin \theta_{ni}. \quad (6)$$

Rearranjando Eq. 6, temos:

$$\tau_{ci} = \sum_{i=1}^n \rho_i (\sigma_{sri} - \sigma_{smi}) \cos \theta_{ni} \sin \theta_{ni}. \quad (7)$$

A tensão local de cisalhamento é limitado pelo mecanismo de engrenamento dos agregados, que é função da largura da abertura da fissura, w , e do tamanho médio dos agregados, a_g . Collins e Vecchio (1986) estabeleceram o limite para a tensão cisalhante na fissura baseado nos trabalhos de Walraven (1981).

$$\tau_{ci} \leq \frac{0.18\sqrt{f_c}}{0.31 + 24w/(a_g + 26)}. \quad (8)$$

2.3 Equações de Compatibilidade

Seja um elemento de concreto armado, as deformações decorrentes dos carregamentos impostos a ele, são definidas por duas deformações normais e uma de cisalhamento, $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}\}$. As equações de compatibilidade foram formuladas com base na hipótese em que a armadura está completamente aderente ao concreto, ou seja, as deformações sofridas pelo concreto são idênticas as deformações da armadura.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_c\} = \{\varepsilon_s\} \quad (9)$$

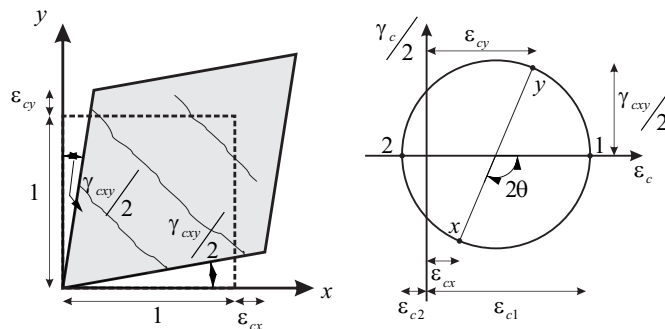


Figure 4. Condições de compatibilidade para o elemento de concreto armado

Por se tratar de um modelo ortotrópico, as tensões médias do concreto e do aço são calculadas em suas direções principais através de relações constitutivas apropriadas. Posto isto, as deformações

devem ser transformadas para suas direções principais a partir de formulações que podem ser obtidas pela construção do círculo de Mohr (ver Fig. 4).

$$\{\varepsilon_{c12}\} = \frac{(\varepsilon_{cx} + \varepsilon_{cy})}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_{cx} - \varepsilon_{cy})^2 + \gamma_{cxy}^2}. \quad (10)$$

O ângulo de inclinação da direção principal das deformações, coincidem com a direção principal das tensões médias do concreto, que pode ser calculada pela seguinte equação.

$$\theta = \theta_\varepsilon = \theta_\sigma = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\gamma_{cxy}}{\varepsilon_{cx} - \varepsilon_{cy}} \right). \quad (11)$$

2.4 Equações Constitutivas

Comportamento do concreto sob tração-compressão biaxial

O concreto submetido à tensões combinadas de compressão e tração, apresenta um significativa perda de resistência a compressão devido à presença de fissuras transversais, conforme apresentado por Vecchio e Collins [1]. Portanto, a tensão principal de compressão do concreto é função tanto da deformação principal de compressão quanto da deformação principal de tração. Os autores propuseram um fator de redução descrito pela seguinte fórmula.

$$\beta_d = \frac{1}{(1 + C_d)} \leq 1.0 \quad (12)$$

Através de experimentos conduzidos por Vecchio e Colins [12], a melhor correlação encontrada para o parâmetro C_d , foi obtida em função de $(\varepsilon_{c1}/\varepsilon_{c2})$.

$$C_d = 0.35 \left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{c2}} - 0.28 \right)^{0.8} \quad (13)$$

Utiliza-se o fator redução para definir o valor da resistência de compressão máxima e sua respectiva deformação específica.

$$\begin{aligned} f_p &= \beta_d f_c \\ \varepsilon_p &= \beta_d \varepsilon_{c0} \end{aligned} \quad (14)$$

Para a resposta do concreto sob compressão, Vecchio (2000) sugere a curva proposta por Vecchio e Colins [12].

$$\sigma_{c2} = -f_p \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_p} \frac{n}{(n-1) + \left(\frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_p} \right)^{nk}} \quad (15)$$

onde:

$$n = 0.8 + \frac{f_p}{17} \quad (16)$$

$$k = \begin{cases} 1 & , \varepsilon_p < \varepsilon_{c2} \\ 0.67 + \frac{f_p}{17} & , \varepsilon_{c2} < \varepsilon_p \end{cases} \quad (17)$$

Para o concreto sob tração, admite-se um comportamento linear elástico antes de fissurar. Após a fissuração, as tensões de tração no concreto continuam a existir devido ao mecanismo de *tension-stiffening*. Este mecanismo está relacionado com a aderência entre o concreto e o aço nas regiões entre fissuras. Collins e Vecchio [1] apresentaram uma formulação empírica para modelar este efeito, conforme a equação abaixo.

$$\sigma_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & , \quad 0 < \varepsilon_{c1} < \varepsilon_{cr} \\ \frac{f_t}{1 + \sqrt{c_t \varepsilon_{c1}}} & , \quad \varepsilon_{c1} \geq \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (18)$$

Onde f_t é a resistência do concreto a tração, E_c o módulo de elasticidade tangente e ε_{cr} sua respectiva deformação específica. Vecchio[5], sugere o calculo de f_t a seguinte relação:

$$f_t = 0.65 (f_c)^{0.33} \quad (19)$$

Inicialmente Collins e Vecchio [1] propuseram um valor para $c_t = 200$. Porém, Bentz [13] mostrou que a parcela de tensão de tração transferida ao concreto depende também de outros fatores como taxa de armadura e o diâmetro nominal da barra,

$$c_t = 2.2m \quad (20)$$

$$\frac{1}{m} = \sum_{i=1}^n \frac{4\rho_i}{\phi_i} |\cos \theta_{ni}| \quad (21)$$

Comportamento do concreto sob compressão biaxial

Quando submetido o um estado biaxial de compressão, o concreto apresenta um ganho de resistência e ductilidade, devido ao efeito de confinamento. Este comportamento pode ser modelado de acordo com as formulações apresentadas por Vecchio [14]. Este modelo foi desenvolvido a partir de relações aproximadas do trabalho de Kupfer et al.[15]. O fator de aumento de resistência é descrita como:

$$K_{c1} = 1 + 0.92 \left(-\frac{\sigma_{c2}}{f_c} \right) - 0.76 \left(-\frac{\sigma_{c2}}{f_c} \right)^2 \quad (22)$$

$$K_{c2} = 1 + 0.92 \left(-\frac{\sigma_{c1}}{f_c} \right) - 0.76 \left(-\frac{\sigma_{c1}}{f_c} \right)^2 \quad (23)$$

$$f_{p1} = K_{c1} f_c \quad (24)$$

$$f_{p2} = K_{c2} f_c \quad (25)$$

As deformações correspondentes as resistências máximas de compressão em suas direções principais são:

$$\varepsilon_{p1} = K_{c1} \varepsilon_0 \quad (26)$$

$$\varepsilon_{p2} = K_{c2} \varepsilon_0 \quad (27)$$

As tensões principais em cada direção são calculadas pela mesma curva apresentada em Eq. 16.

$$\sigma_{c1} = -f_{p1} \frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{p1}} \frac{n}{(n-1) + \left(\frac{\varepsilon_{c1}}{\varepsilon_{p1}} \right)^{nk}} \quad (28)$$

$$\sigma_{c2} = -f_{p2} \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{p2}} \frac{n}{(n-1) + \left(\frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{p2}} \right)^{nk}} \quad (29)$$

Observa-se que o sistema de equações acima não é linear, portanto é necessário resolver iterativamente.

Comportamento do concreto sob tração biaxial

Segundo o trabalho de Kupfer et al.[15], quando submetido ao estado de tração biaxial, o concreto apresenta comportamentos independentes e iguais ao estado uniaxial de tração em cada direção. Portanto, as tensões principais são obtidas utilizando a mesma curva da Eq. 19.

$$\sigma_{c1} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c1} & , \quad 0 < \varepsilon_{c1} < \varepsilon_{cr} \\ \frac{f_t}{1 + \sqrt{c_t \varepsilon_{c1}}} & , \quad \varepsilon_{c1} \geq \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (30)$$

$$\sigma_{c2} = \begin{cases} E_c \varepsilon_{c2} & , \quad 0 < \varepsilon_{c2} < \varepsilon_{cr} \\ \frac{f_t}{1 + \sqrt{c_t \varepsilon_{c2}}} & , \quad \varepsilon_{c2} \geq \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (31)$$

Comportamento do aço

Para as tensões de compressão e tração da armadura, utiliza-se um modelo trilinear para a curva tensão-deformação.

$$\sigma_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & 0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sy} \\ f_y & \varepsilon_{sy} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{sh} \\ f_y + E_{sh}(\varepsilon_s - \varepsilon_{sy}) & \varepsilon_{sh} < \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} \end{cases} \quad (32)$$

3 Cracked Membrane Model (CMM)

O CMM foi desenvolvido por Kaufmann e Marti [4] para análise de painéis de concreto armado. O modelo combina os conceitos básicos da teoria proposta por Vecchio e Collins [1], *Modified Compression Field Theory*, com o *Tension Chord Model*, proposto por Marti et al. [8].

Nas formulações do TCM, a relação entre a tensão-deslizamento do cisalhamento de aderência apresenta um comportamento rígido-perfeitamente plástico. Permitindo uma solução analítica para a distribuição de tensões ao longo de um elemento de concreto armado, eliminando a necessidade de equações constitutivas empíricas relacionando as tensões médias e deformações médias.

As equações de equilíbrio são feitas em termos das tensões da região da fissura e tanto as características da fissura quanto as tensões no concreto estão baseadas neste mesmo princípio. Permitindo ao CMM uma ligação com o método de análise limite de plasticidade.

Assim como o MCF, as hipóteses do CMM assumem as fissuras livres para rotacionar mantendo-se sempre perpendicular a direção principal da deformação de tração.

O CMM foi implementado em uma formulação de Elementos Finitos por Foster e Marti [16], onde a contribuição do *tension-stiffening* foi adicionada a matriz constitutiva do material. Mais tarde Dabbagh e Foster [7] e Pimental et al.[6], apresentaram uma formulação mais complexa do modelo ao incorporar o efeito dos engrenamento dos agregados (*aggregate interlock*).

3.1 Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio podem ser determinadas de maneira análoga às do MCFT, fazendo o equilíbrio de forças em termos das tensões locais na fissura, corte BB da Fig. 1. A partir do diagrama de corpo livre, ilustrado na Fig. 5, obtemos a seguinte expressão:

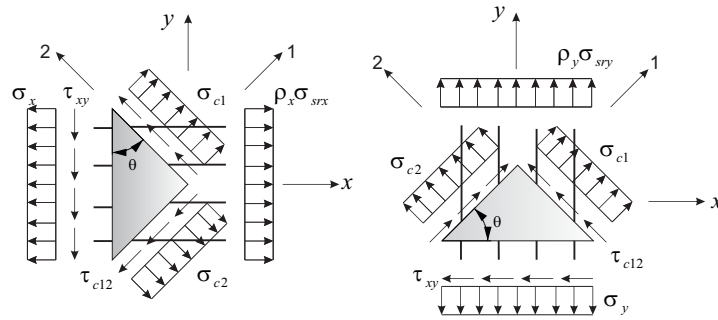


Figure 5. Equações de equilíbrio em termo das tensões locais

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{c1} \\ \sigma_{c2} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \rho_x \sigma_{srx} \\ \rho_y \sigma_{sry} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

As hipóteses adotadas no CMM assumem que quando fissurado, a capacidade do concreto em resistir à esforços de tração é nula, $\sigma_{c1} = 0$.

3.2 Equações de Compatibilidade

As equações de compatibilidade do CMM não mudam em relação às equações deduzidas no item 2.3.

3.3 Espaçamento de Fissuras

Conforme ilustrado em Fig. 1, podemos decompor o espaçamento entre fissuras, S_{rm} , nas direções x e y , a partir do ângulo de inclinação da fissura, θ .

$$S_{rm} = S_{rmx} \cos \theta = S_{rmy} \sin \theta \quad (34)$$

Kaufmann e Marti [4] desenvolveram uma expressão para o cálculo do espaçamento máximo entre fissuras, de acordo com o TCM, para um elemento submetido a tensão uniaxial. Em seguida, estenderam o *Tension Chord Model* para o estado biaxial. A distância máxima pode ser calculada pelas seguintes equações:

$$S_{rmx0} = \frac{f_{ct} \phi_x (1 - \rho_x)}{2\tau_{b0} \rho_x} \quad (35)$$

$$S_{rmy0} = \frac{f_{ct} \phi_y (1 - \rho_y)}{2\tau_{b0} \rho_y}$$

No centro entre duas fissuras consecutivas, a tensão de tração transferida ao concreto, $\Delta\sigma_{c,i}$, atinge seu valor máximo. Quando o espaçamento entre fissura em uma determinada direção é igual ao espaçamento máximo, a tensão de tração transferida ao concreto será igual a resistência de tração do concreto, f_{ct} . Para espaçamentos menores, a máxima tensão de tração no concreto alcança valores menores que f_{ct} . Então, as seguintes expressões podem ser deduzidas:

$$\lambda_x = \frac{\Delta\sigma_{c,x}}{f_{ct}} = \frac{S_{rmx}}{S_{rmx0}} = \frac{S_{rm}}{S_{rmx0} \cos \theta} \quad (36)$$

$$\lambda_x = \frac{\Delta\sigma_{c,x}}{f_{ct}} = \frac{S_{rmx}}{S_{rmx0}} = \frac{S_{rm}}{S_{rmx0} \cos \theta}$$

Vecchio e Collins [1] sugeriram uma expressão simplificada para determinar o espaçamento entre fissuras na direção perpendicular à fissura. Segundo Foster e Marti (2003) esta expressão conduz a bons resultados aproximados comparados com os valores exatos proposto por Kaufmann e Marti [4]

$$S_{rm} = \left(\frac{\cos \theta}{S_{rmx}} + \frac{\sin \theta}{S_{rmy}} \right)^{-1}. \quad (37)$$

3.4 Tension Chord Model

A distribuição de tensões dentro do elemento pode ser dividida em três regimes, correspondentes aos níveis de tensões na armadura, conforme a Fig. 6. O primeiro regime (Fig. 6a) corresponde a situação onde as tensões da armadura, ao longo de todo elemento, está abaixo da tensão de escoamento do aço, $\sigma_{sr} \leq f_y$. As tensões médias no concreto podem ser calculadas como:

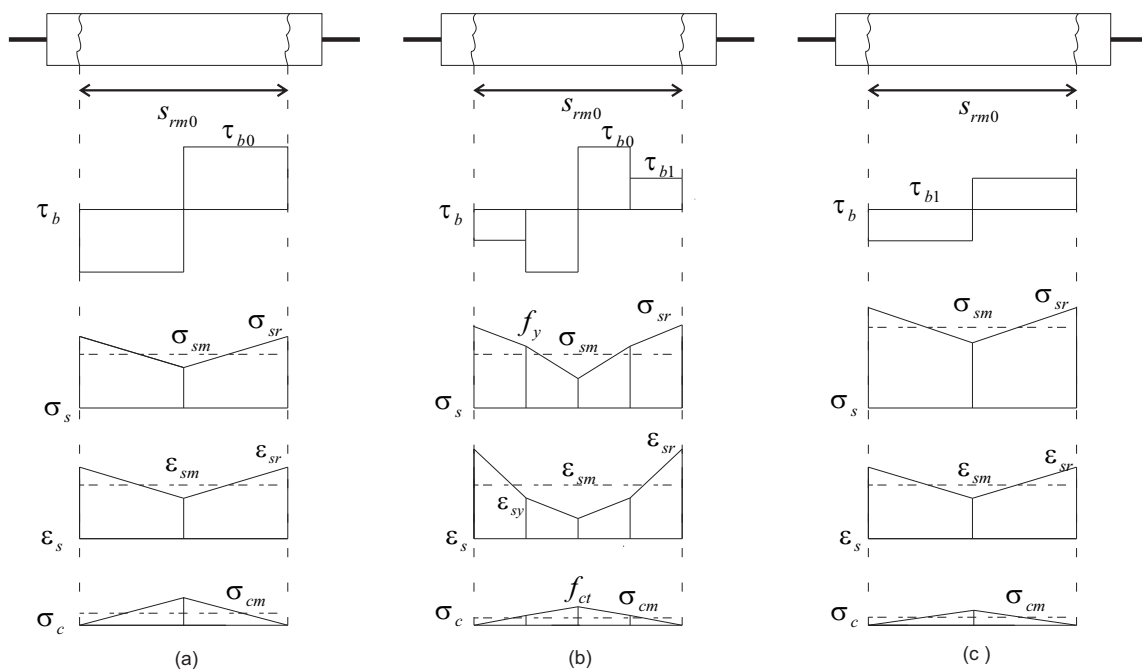


Figure 6. Distribuição de tensões dentro do elemento submetido à tensão de tração uniaxial

$$\sigma_{cm} = \frac{\tau_b \lambda f_{ct}}{\tau_{b0} 2} \quad (38)$$

Na Eq. 38, λ é substituído por λ_x ou λ_y , dependendo da direção considerada. A tensão de cisalhamento de aderência é calculada como:

$$\tau_b = \frac{\varepsilon_m E_s \phi}{2 S_{rm}} \leq \tau_{b0} \quad (39)$$

No regime 2 (Fig. 6b), a tensão na armadura parcialmente abaixo e acima da tensão de escoamento ao longo do elemento $\sigma_{s,min} \leq f_y \leq \sigma_{sr}$. As tensões na armadura são expressas pelas seguintes expressões:

$$\sigma_{sm} = f_y - \frac{(\sigma_{sr} - f_y)^2 \phi}{4 \tau_{b1} S_{rm}} \left(\frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} - 1 \right) + (\sigma_{sr} - f_y) \frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} - \frac{\tau_{b0} S_{rm}}{\phi} \quad (40)$$

$$\sigma_{sr} = f_y - \frac{\frac{\tau_{b0} S_{rm}}{\phi} - \sqrt{(f_y - E_s \varepsilon_m) \frac{\tau_{b1} S_{rm}}{\phi} \left(\frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} - \frac{E_s}{E_{sh}} \right) + \frac{E_s}{E_{sh}} \tau_{b0} \tau_{b1} \frac{S_{rm}^2}{\phi^2}}}{0.5 \left(\frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} - \frac{E_s}{E_{sh}} \right)} \quad (41)$$

O equilíbrio das tensões médias e as tensões locais do elemento se faz pela seguinte expressão:

$$\sigma_{sm} = \sigma_{sr} - \sigma_{cm} \frac{(1 - \rho)}{\rho} \quad (42)$$

A tensão média do concreto é calculada a partir da Eq. 42. As tensões das componente x e y da armadura são obtidas a partir das Eq. 40 e Eq. 41, substituindo S_{rm} por S_{rmx} e S_{rmy} , respectivamente.

Por fim, o regime 3 (Fig. 6c) é atingido quando a tensão na armadura atinge valores maiores que a tensão de escoamento em todo o elemento, $f_s < \sigma_{s,min}$, a distribuição de tensão é similar a Eq. 38, substituindo τ_{b0} por τ_{b1} e E_s por E_{sec} .

3.5 Equações Constitutivas

As equações constitutivas do CMM para o concreto em compressão são semelhantes as adotados no MCFT. Porém quando submetidos à esforços de tração, as relações constitutivas do concreto são modeladas a partir das teorias proposta no TCM (item 3.4).

4 Implementação em Elementos Finitos

As tensões no elemento de concreto armado podem ser calculadas como a soma das tensões no concreto e na armadura:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_c\} + \{\sigma_s\} \quad (43)$$

Considerando que o concreto pode ser considerado como um material ortotrópico, onde 1 e 2 são suas direções principais, a relação constitutiva para o estado plano de tensões pode ser expressado como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{c1} \\ \sigma_{c2} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{c1} & \nu_{12} E_{c1} & 0 \\ \nu_{21} E_{c2} & E_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{12} \nu_{21}) G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{c1} \\ \varepsilon_{c2} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Escrevendo Eq. 44 de forma sintética:

$$\{\sigma_{c12}\} = [D_{c12}] \{\varepsilon_{c12}\} \quad (45)$$

Para que a simetria da matriz constitutiva seja mantida a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\nu_{12} E_1 = \nu_{21} E_2 \quad (46)$$

Segundo Vecchio [14], quando submetido ao estado de tração-compressão biaxial, as formulações da matriz constitutiva do concreto podem ser simplificadas, obtendo bons resultados, desprezando o efeito de Poisson da Eq. 45. Porém, os casos, principalmente, de compressão biaxial (Fig. 7a), as deformações laterais causadas pelo efeito de Poisson, pode representar uma parcela significativa das deformações médias do concreto. Portanto não podem ser desconsideradas.

O comportamento do concreto submetido a tensões de compressão exibe perdas progressivas de rigidez em sua curva tensão-deformação (Fig. 7b). Além disto, o concreto sob compressão apresenta uma expansão lateral caracterizada pelas microfissurações existentes no concreto, que aumentam a medida que aumenta a tensão de compressão. Perto do pico de resistência à compressão, o volume de

concreto aumenta, tornando as fissuras cada vez maiores, acarretando também no aumento progressivo do coeficiente de Poisson (Fig. 7c). Portanto, principalmente para os casos onde o concreto está submetido ao estado de compressão biaxial, onde $\sigma_{c2} < \sigma_{c1}$, pode-se afirmar verdadeira as seguintes relações, $E_{c2} < E_{c1}$ e $\nu_{12} > \nu_{21}$, conflitando com a igualdade da Eq. 46.

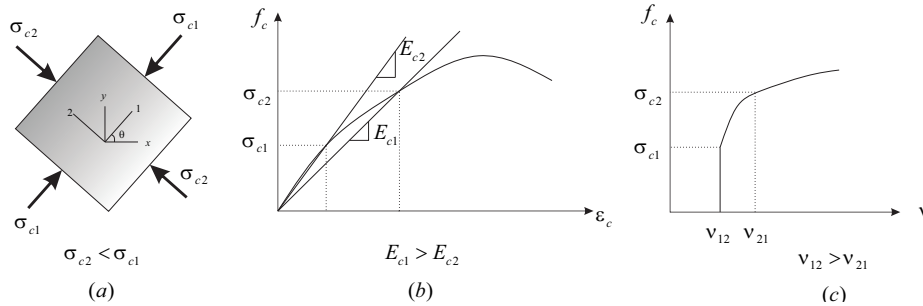


Figure 7. Comportamento do concreto sob compressão biaxial: (a) Definição do elemento, (b) variação do módulo de elasticidade e (c) variação do coeficiente de Poisson

De modo a simplificar e garantir a simetria da matriz constitutiva, Selby e Vecchio [17] incluíram no conceito de pseudo forças, apresentado por Vecchio [18], as deformações decorrentes do efeito de Poisson. Estas forças fornecem uma maneira de separar o efeito de Poisson do estado biaxial de tensão do concreto, permitindo obter o comportamento bidimensional através de duas curvas tensão-deformação uniaxial distintas.

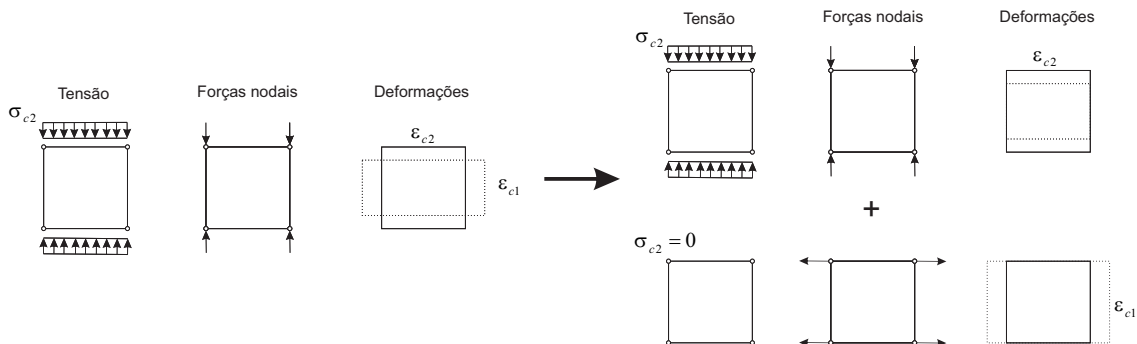


Figure 8. Conceito de Pseudas Cargas para deformações laterais: (a) Modelo tradicional ($\nu_{12} \neq 0$) e (b) Pseudo Cargas ($\nu_{12} = 0$)

Em um estado biaxial de tensões, as deformações específicas em uma determinada direção é tanto função da tensão atuante naquela direção, como também da tensão atuante na direção ortogonal a ela (ver Fig. 8).

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c1} &= \frac{\sigma_{c1}}{E_{c1}} - \nu_{12} \frac{\sigma_{c2}}{E_{c2}}, \\ \varepsilon_{c2} &= \frac{\sigma_{c2}}{E_{c2}} - \nu_{21} \frac{\sigma_{c1}}{E_{c1}}. \end{aligned} \tag{47}$$

A ideia principal desta técnica compreende desacoplar as deformações axiais, obtidas pelas tensões uniaxial aplicadas ao concreto, σ_{c1} e σ_{c2} , das laterais, que serão produzidas a partir de forças fictícias aplicadas ao elemento (ver Fig. 8). As magnitudes dessas forças são escolhidas de tal forma à produzirem as deformações laterais a partir das seguintes equações:

$$\varepsilon_{c1}^0 = -\nu_{12} \frac{\sigma_{c2}}{E_{c2}}, \quad (48)$$

$$\varepsilon_{c2}^0 = -\nu_{21} \frac{\sigma_{c1}}{E_{c1}}.$$

Transformando as deformações laterais (Eq. 48) para o sistema global, x e y :

$$\{\varepsilon_c^0\} = \{\varepsilon_{cx}^0 \ \varepsilon_{cy}^0 \ \gamma_{cxy}^0\} \quad (49)$$

onde:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cx}^0 &= \varepsilon_{c1}^0 \frac{(1 + \cos \theta)}{2} + \varepsilon_{c2}^0 \frac{(1 - \cos \theta)}{2} \\ \varepsilon_{cy}^0 &= \varepsilon_{c1}^0 \frac{(1 - \cos \theta)}{2} + \varepsilon_{c2}^0 \frac{(1 + \cos \theta)}{2} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\gamma_{cxy}^0 = (\varepsilon_{c1}^0 - \varepsilon_{c2}^0) \sin 2\theta$$

Assim, podemos escrever as deformações totais do concreto como a soma das deformações uniaxiais e das deformações decorrentes do efeito de Poisson:

$$\{\varepsilon_c\} = \{\varepsilon_c^u\} + \{\varepsilon_c^0\} \quad (51)$$

Como o todas as deformações devido ao efeito de Poisson serão incluídos em um vetor de pseudos cargas, as tensões no concreto podem ser calculadas a partir da seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{c1} \\ \sigma_{c2} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{c1u} \\ \varepsilon_{c2u} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Onde:

$$E_{c1} = \frac{\sigma_{c1}}{\varepsilon_{c1}}, \quad E_{c2} = \frac{\sigma_{c2}}{\varepsilon_{c2}}, \quad G_{12} = \frac{E_{c1}E_{c2}}{E_{c1} + E_{c2}} \quad (53)$$

Transformando a Eq. 52 nas coordenadas globais:

$$\{\sigma_c\} = [T_\sigma] [D_c] [T_\varepsilon] \{\varepsilon_{c12u}\} \quad (54)$$

Da mesma maneira, considerando que o aço só resiste à tensão uniaxial, podemos calcular as tensões para cada componente das armaduras pela seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{sx} \\ \sigma_{sy} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_x E_{sx} + E_{ctsx} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_y E_{sy} + E_{ctsy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{sx} \\ \varepsilon_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (55)$$

Onde:

$$E_{sx} = \frac{\sigma_{sx}}{\varepsilon_{sx}}, \quad E_{sy} = \frac{\sigma_{sy}}{\varepsilon_{sy}}, \quad E_{ctsx} = \frac{\sigma_{cmx}}{\varepsilon_{sx}}, \quad E_{ctsy} = \frac{\sigma_{cmy}}{\varepsilon_{sy}} \quad (56)$$

No MCFT, $\sigma_{cmx} = 0$ e $\sigma_{cmy} = 0$, já que o efeito do *tension-stiffening* é considerado na relação constitutiva da tensão principal de tração.

Escrevendo a Eq. 55 de forma simplificada

$$\{\sigma_s\} = [D_s] \{\varepsilon_s\} \quad (57)$$

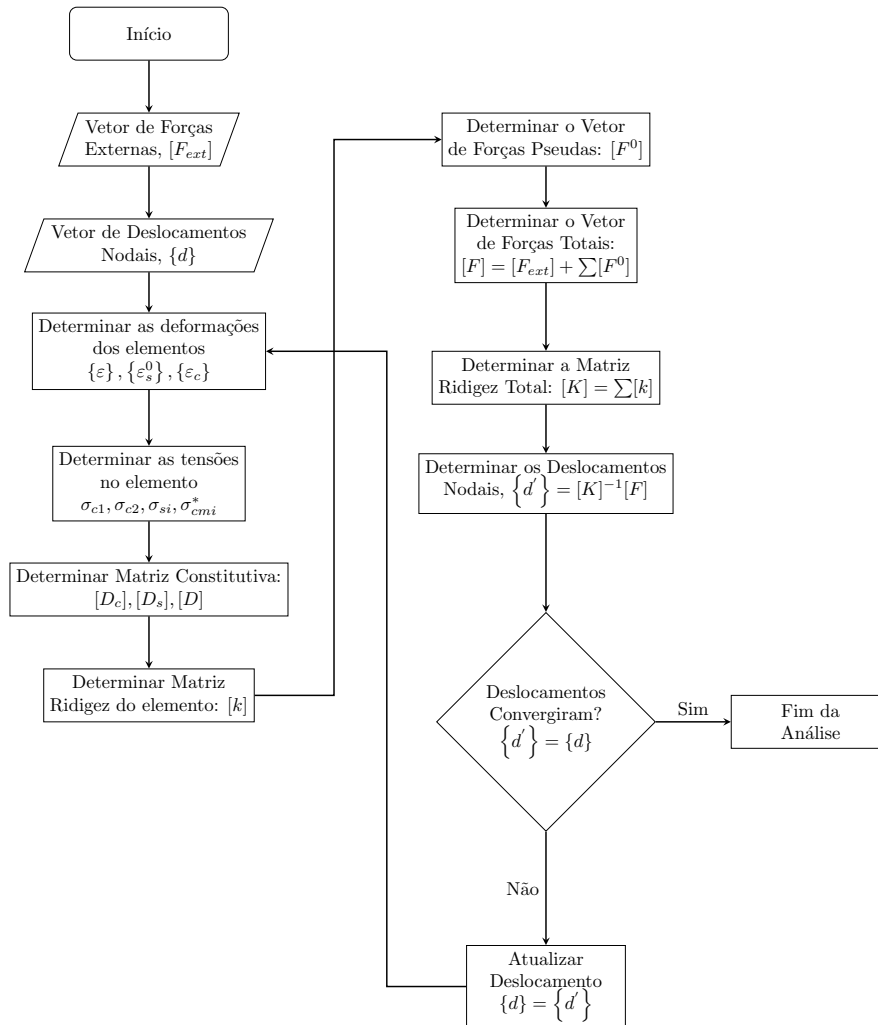


Figure 9. Algoritmo para análise não linear de painéis de concreto armado pelo MEF

Substituindo as Eq. 54 e Eq. 57 em Eq. 43:

$$\{\sigma\} = [D_c] \{\varepsilon_c^u\} + [D_s] \{\varepsilon_s\} \quad (58)$$

Substituindo a Eq. 52 em Eq. 58:

$$\{\sigma\} = [D_c] (\{\varepsilon_c\} - \{\varepsilon_c^0\}) + [D_{si}] \{\varepsilon_s\} \quad (59)$$

Assumindo a hipótese de aderência perfeita da armadura ao concreto, $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_c\} = \{\varepsilon_s\}$, a Eq. 59 pode ser rescrita como:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} - \{\sigma^0\} \quad (60)$$

Onde:

$$[D] = [D_c] + [D_s] \quad (61)$$

$$\{\sigma^0\} = [D_c] \{\varepsilon_c^0\} \quad (62)$$

A matriz de rigidez do elemento pode ser calculada a partir da seguinte expressão:

$$[k] = h \int_A [B]^T [D] [B] dA \quad (63)$$

Onde $[B]$ é a matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos nodais. Esta matriz depende do tipo de elemento que vai ser utilizado.

As componentes das tensões fictícias provocadas pelas deformações laterais podem ser substituídas por cargas nodais equivalentes, integrando o vetor de tensões ao longo do elemento.

$$\{F^0\} = h \int_A \{\sigma^0\} dA \quad (64)$$

O vetor das pseudo cargas são somados ao vetor de cargas externas, de forma a obter o vetor de cargas totais.

$$\{F\} = \{F_{ext}\} + \{F^0\} \quad (65)$$

A análise não linear da estrutura pode ser feita redefinindo a matriz constitutiva $[D]$ iterativamente até atingir a convergência. Um algoritmo simples sugerido por Vecchio [9] está resumido na Fig. 9.

5 Resultados

5.1 Experimentos de Lefas et al.(1990)

Lefas et al. [20] apresentaram um estudo de treze paredes de concreto armado submetidas à diferentes combinações de cargas axiais e laterais. As paredes foram divididas em duas categorias de acordo com a sua geometria (razão entre altura e comprimento, h/l). Foram denominadas “Tipo 1” aquelas cuja razão $h/l = 1$ (750mm de comprimento x 750mm de altura) e largura de 70mm. As “Tipo 2” correspondem as paredes com $h/l = 2$ (650mm de comprimento x 1300mm de altura) e largura de 65mm. Além disto, foram monoliticamente concretadas vigas tanto no topo quanto na base de cada paredes com função de transferir as cargas axiais e laterais para as paredes como também fixar o experimento ao chão, simulando uma fundação rígida.

Todas as dimensões e detalhes das armaduras estão representadas em Fig. 10. Para as armaduras verticais e horizontais foram utilizadas, respectivamente, barras com diâmetro de 8mm e 6.25mm. Os espaçamentos das armaduras verticais foram, respectivamente, de 60 mm e 62 mm para o Tipo 1 e Tipo 2, enquanto que as horizontais foram de 80 mm e 115 mm. Armaduras adicionais em forma de estribos, com diâmetro de 4 mm, foram utilizadas para garantir o confinamento necessário nas bordas das paredes. As tensões de escoamento, f_y , e últimas, f_u , para cada tipo de armadura estão resumidas em Tab. 1.

Table 1. Propriedades das barras de aço

Diâmetro	f_y (MPa)	f_u (MPa)	E_s (GPa)
8 mm	470	565	210
6.25 mm	520	610	210
4 mm	420	490	210

As propriedades do concreto adotadas no modelo numérico foram estimadas através de formulações empíricas. A resistência cilíndrica à compressão foi adotada como $f_c = 0.85 f_{cu}$. A resistência a tração e módulo de elasticidade do concreto foram estimados como: $f_t = 0.33\sqrt{f_c}$ e $E_c = 5000\sqrt{f_c}$. Para todas as paredes foi considerado o coeficiente de Poisson igual a 0.15. Todos os parâmetros estão resumidos em Tab. 3.

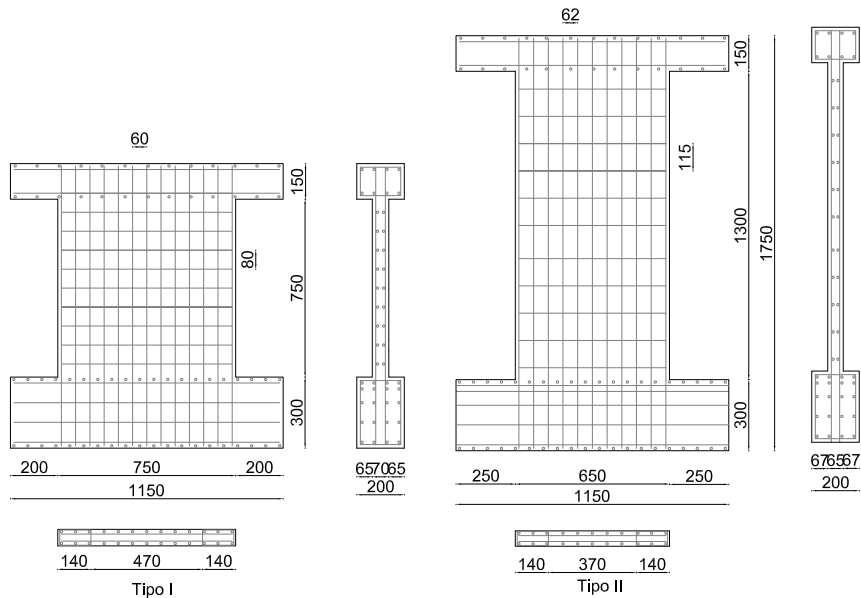


Figure 10. Geometria e detalhes das armaduras das paredes de concreto armado, Lefas et al. (1990)

O modelo de Elementos Finitos para as paredes dos Tipos 1 e 2 foram realizados com uma malha contendo 170 e 164 elementos respectivamente, como ilustrado em Fig. 11. Os carregamentos nas paredes foram aplicados como cargas nodais na viga de topo e todos os nós ao longo da viga de base foram restringidos. As armaduras foram modeladas de maneira distribuída. Quatro zonas distintas foram consideradas para cada tipo de parede em termos da taxa de armadura e de sua espessura, conforme ilustrado na Figura. As taxas de armaduras, ρ , atribuídas a cada elemento estão resumidas em Tab. 2.

Table 2. Taxa de armadura correspondente à cada elemento

Tipo	Zona	t(mm)	ρ_x (%)	ρ_y (%)	ρ_z (%)
I	1	70	1.095	2.138	-
	2	70	1.095/0.448	3.076	1.20
	3	200	0.818	0.837/0.209	0.279
	4	200	1.675	0.837/0.209	0.140
II	1	65	0.82	2.09	-
	2	65	0.82/0.336	3.312	0.90
	3	200	0.818	0.810/0.203	0.270
	4	200	1.022	0.810/0.203	0.135

Table 3. Propriedades do concreto

Parede	Tipo	F_v (kN)	ν_0	f_{cu} (MPa)	f_c (MPa)	f_t (MPa)	E_c (MPa)
SW16	I	460	0.15	51.7	44	2.20	33150
SW25	II	325	0.15	45.0	38.3	2.04	30950

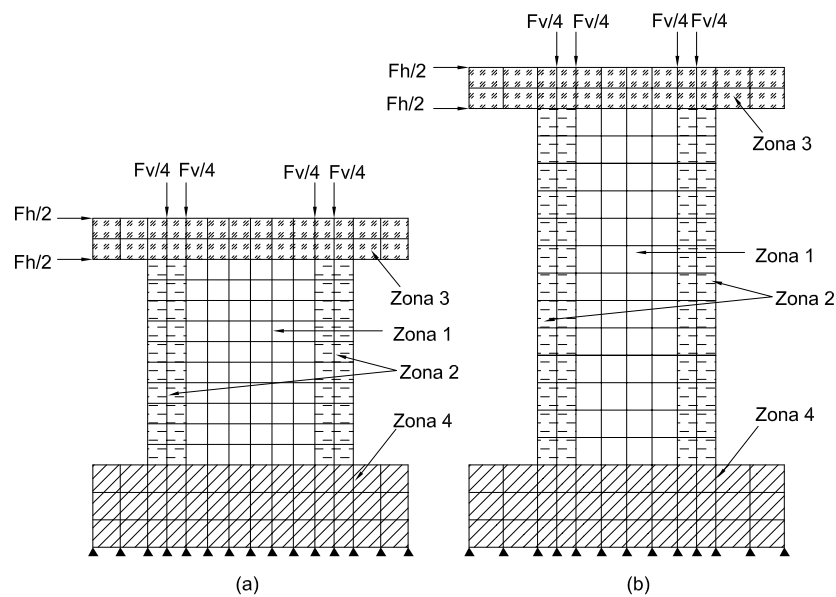


Figure 11. Geometria e detalhes das armaduras das paredes de concreto armado, Lefas et al. (1990)

Os resultados obtidos através da simulação numérica dos dois modelos (MCFT e CMM) foram comparados com os resultados experimentais de Lefas et al.[20] e ilustrado em Fig. 12. Pode-se verificar que o comportamento das duas paredes, para os dois métodos, são bastante similares à resposta experimental. Assim como as capacidades de carga obtidas para as duas paredes. Entretanto, deve-se notar a maior proximidade da curva experimental e do CMM. Os resultados estão resumidos em Tab. 4

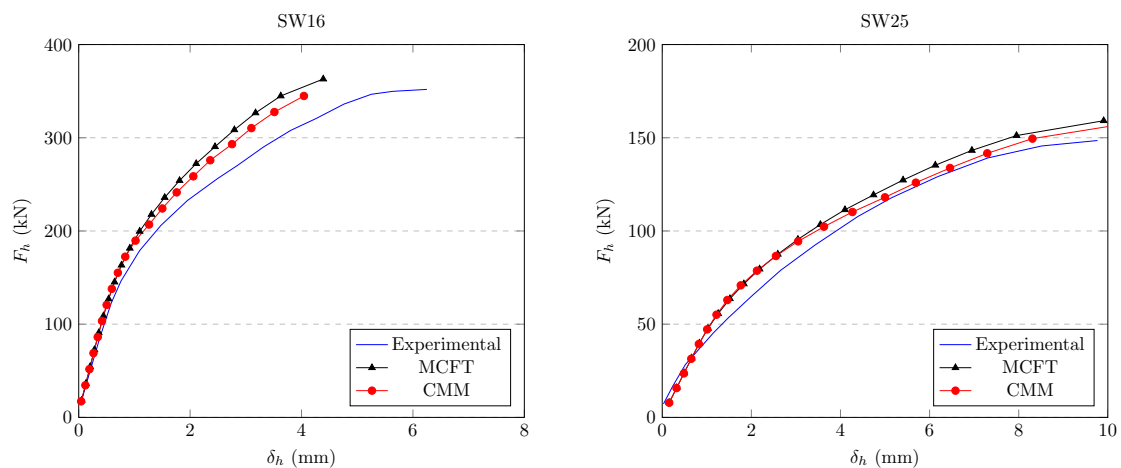


Figure 12. Curvas carga versus deslocamento das paredes SW16 e SW25.

Table 4. Comparação dos resultados numéricos e experimentais de Lefas et al.[20])

Parede	$F_{h,exp}$ kN	$F_{h,MCFT}$ (kN)	$Exp/MCFT$	$F_{h,CMM}$ (MPa)	Exp/CMM (MPa)
SW16	355	363	0.98	345	1.03
SW25	150	159	0.95	157	0.96

5.2 Experimentos de Cervenka and Gerstle (1972)

Cervenka e Gerstle [19] apresentaram uma série de teste vigas-paredes de concreto armado simplesmente apoiada com uma carga concentrada no meio do vão. Esse experimento foi obtido pela junção de dois painéis com dimensões de 760 mm de comprimento por 760 mm de altura e espessura de 51 mm ou 76 mm, como mostrado na Figura. As cargas concentradas e os suportes são transmitidos aos painéis por três *vertical ribs*, como mostra em Fig. 13.

Os detalhes da armadura estão ilustrado em Fig. 13. As barras de reforço tanto vertical quanto horizontal apresentam diâmetro de 9.525 mm. O espaçamento das armaduras verticais foi adotado constante, com valor de 101.6 mm. Já as armaduras horizontais apresentavam variações, os valores dos espaçamentos eram de 50.8 mm na parte mais baixa do painel e de 101.6 mm na parte superior. A tensão de escoamento e o módulo de elasticidade das barras de aço foram estimadas a partir de testes de tração, apresentando valores de $f_y = 353MPa$ e $E_s = 190000MPa$, já a tensão última foi adotada como $f_u = 1.15f_y$.

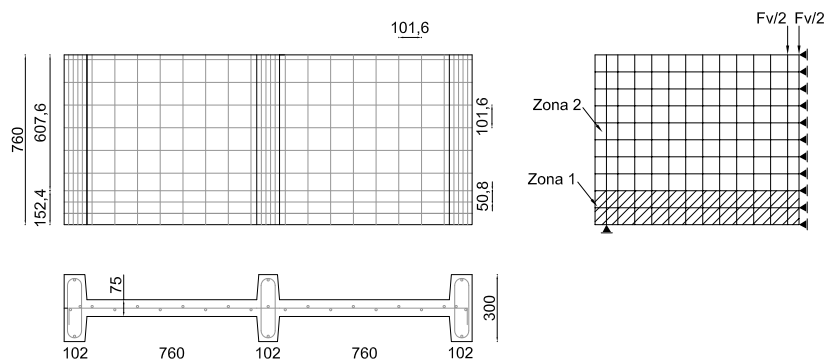


Figure 13. Geometria e detalhes das armaduras das paredes de concreto armado, Lefas et al. (1990)

O concreto utilizado no painel apresentou uma resistência a compressão cilíndrica de $f_c = 26.8MPa$. A resistência a tração e módulo de elasticidade do concreto foram estimados como: $f_t = 0.33\sqrt{f_c}$ e $E_c = 5000\sqrt{f_c}$. Também foi considerado o coeficiente de Poisson igual a 0.2.

O modelo de numérico foi realizado utilizando apenas a metade da viga-parede, devido a simetria do problema, como ilustrado em Fig. 13. Além disto, a malha de elementos finitos foi discretizada contendo 130 elementos. As cargas aplicadas e as condições de contorno da viga estão apresentados Fig. 13. Um modelo de armadura distribuída foi adotado no modelo apresentando duas zonas com taxas de armadura horizontal distintas. As taxas de armaduras, ρ , atribuídas a cada elemento estão resumidas em Tab. 5.

Table 5. Propriedades das barras de aço

Zona	t(mm)	ρ_x (%)	ρ_y (%)
1	75/300	1.83	0.92
2	75/300	0.92	0.92

A Figura 14 mostra a comparação dos resultados numéricos dos dois modelos adotados com o experimental de Cervenka and Gerstle [19]. Novamente, os dois modelos apresentaram resultados satisfatórios tanto para toda a história de carga quanto para a carga de ruptura. Neste exemplo, as curvas experimentais e do CMM estão mais próximas. Pelo menos até as proximidades da ruptura. Os resultados obtidos estão resumidos em Tab. 6

Table 6. Comparação dos resultados numéricos e experimentais de Cervenka and Gerstle (1970)

Parede	$F_{h,exp}$ kN	$F_{h,MCFT}$ (kN)	$Exp/MCFT$	$F_{h,CMM}$ (MPa)	Exp/CMM (MPa)
Painel W2	115	124	0.93	128	0.90

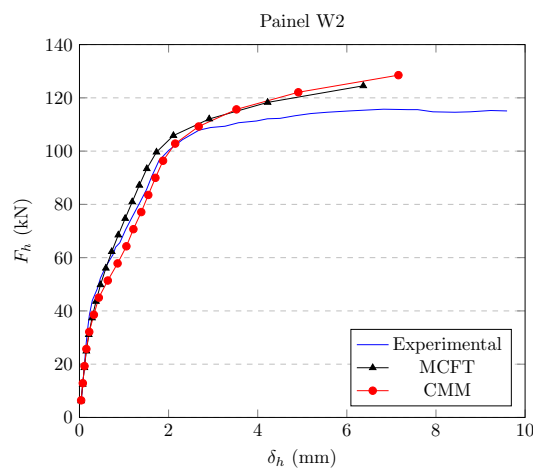


Figure 14. Comparação dos resultados numéricos e experimentais de Cervenka and Gerstle [19]

6 Conclusão

Neste trabalho as teorias propostas por Vecchio e Collins [1] (MCFT) e Kaufmann e Marti [4] foram implementadas em um código de Elementos Finitos. As equações de equilíbrio e compatibilidade do MCFT são formuladas em termos das tensões e deformações médias, permitindo ao concreto resistir à tração mesmo depois de fissurado. Esta hipótese pode superestimar as cargas de ruptura, principalmente em estruturas com baixa taxa de armadura (Kaufmann, 1998).

Em contra partida, no CMM as equações de equilíbrio são tomadas a partir das tensões locais da fissura, permitindo o ao modelo satisfazer os princípios da análise limite. Além disto, a teoria trata o mecanismo de *tension-stiffening* de forma mais racional, através das formulações proposta por Marti et. al. [8], eliminando a necessidade de relações constitutivas empíricas que relaciona as tensões e deformações médias.

Os dois modelos foram comparados com uma viga-parede e duas paredes de concreto armado. Os resultados numéricos para dos dois modelos foram bastante satisfatórios, sendo capaz de prever as cargas de ruptura e toda a história de cargas de forma acurada.

Comparações significativas entre os dois métodos e resultados experimentais devem ser feitos estatisticamente, o que está sendo efetuado pelos autores.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à CAPES pelo apoio financeiro durante a pesquisa.

Referencias

- [1] Vecchio, F.J., e Collins, M.P. (1986), *The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear*, Structural Journal ACI , Vol. 83, No. 2, pp. 219-231.
- [2] Pang, X., and Hsu, T. T. C. (1995), *Behaviour of Reinforced Concrete Membrane Elements in Shear*, Structural Journal ACI , 92(6), 665-679.
- [3] Pang, X., and Hsu, T. T. C. (1996), *Fixed Angle Softened Truss Model for Reinforced Concrete*, Structural Journal ACI , 93(2), 197-207.
- [4] Kaufmann, W., e Marti, P. (1998), *Structural concrete Cracked membrane model*, Journal of Structural Engineering, 124(12), 1467-1475.
- [5] Vecchio, F.J., 2000, *Disturbed Stress Field Model for Reinforced Concrete: Formulation*, Journal of Structural Engineering, Vol. 126, No. 9, pp. 1070-1077.
- [6] Pimentel, M., Brüwhiler, E., e Figueiras, J. (2010), *Extended cracked membrane model for the analysis of RC panels.* , Engineering Structures , 32(8), 1964-1975.
- [7] Dabbagh, H., e Foster, S. J. (2006), *A Smeared—Fixed Crack Model for FE Analysis of RC Membranes Incorporating Aggregate Interlock*, Advances in structural engineering ,9(1), 91-102.
- [8] Marti, P., Kaufmann, W., e Sigrist, V. (1998), *Tension chord model for structural concrete*, Struct. Eng. Int., textitIABSE, Zurich, Switzerland), 4(98), 287–298.
- [9] Vecchio, F. J. (1989), *Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete membranes*, Structural Journal ACI , 86(86-S4).
- [10] Collins, M. P. (1978), *Towards a Rational Theory for RC Members in Shear*, Journal of Structural Division ASCE, 104(4), 649-666.
- [11] Walraven, J.C., (1981), *Fundamental analysis of aggregate interlock*, Journal of Structural Division ASCE, 107(11), 2245-2270.
- [12] Vecchio, F. J., e Collins, M. P. (1993), Journal of Structural Engineering, 119(12), 3590-3610.
- [13] Bentz, E. C. (1999), *Sectional analysis of reinforced concrete structures*, PhD thesis, Dept. of Civ. Engrg., University of Toronto, Toronto.
- [14] Vecchio, F.J., 1992, *Finite Element Modeling of Concrete Expansion and Confinement*, Journal of Structural Engineering, Vol. 118, No. 9, pp. 2390-2406.
- [15] Kupfer, H., Hilsdorf, H.K. e Rusch, H. (1969), *Behavior of Concrete under Biaxial Stresses*, Structural Journal ACI ,Vol. 66, No. 66-62, pp. 656-666.
- [16] Foster, S. J., e Marti, P. (2003), *Cracked membrane model: finite element implementation* , Journal of Structural Engineering, 129(9), 1155-1163.
- [17] Selby, R., e Vecchio, F. (1997), *A constitutive model for analysis of reinforced concrete solids*, Canadian journal of civil engineering, 24(3), 460-470.
- [18] Vecchio, F. J. (2001), *Disturbed stress field model for reinforced concrete: implementation*, Journal of Structural Engineering, 127(1), 12-20.
- [19] Červenka, V., and Gerstle, K. H., (1972), *Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Panels, Part II: Experimental Verification and Application*, Int. Assoc. Bridge Struct. Eng. Publ., 32-II, pp. 25–39.
- [20] Lefas, I. D., Kotsovos, M. D., e Ambraseys, N. N, (1990), *Behavior of reinforced concrete structural walls: strength, deformation characteristics, and failure mechanism*, Structural Journal, 87(1), 23-31.