

## **VIBRAÇÕES E ESTABILIDADE DE CASCAS CILÍNDRICAS SANDUÍCHE COM NÚCLEO DE ESPUMA METÁLICA COM GRADAÇÃO FUNCIONAL**

**Ewerton Alves Bezerra**

**Paulo Batista Gonçalves**

ewerton.alvbez@gmail.com

paulo@puc-rio.br

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)

R. Marquês de São Vicente, 225, Gávea, 22451-900, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil

**Abstract.** Cylindrical shells have applications in several areas of engineering. The last decades have seen the emergence of several new materials and production techniques to be used in these structural elements. Functionally graded materials, metal foams and sandwich structures are part of this development. The sandwich shells, with solid metal faces and metal foam core, are used to improve structural performance in line with a reduction in weight. The objective of this work is to study the natural frequencies and the critical loads of sandwich shells with a metal foam core (CSCN) and compare the results with those of a homogeneous isotropic shell (CH) and with functionally graded (CGF) shells. For this, the Donnell shell theory is used. First, the equations of motion are derived and using the analytical solution for a simply supported shell, the mass, stiffness and geometric matrices are obtained, allowing the calculation of natural frequencies and critical loads under axial compression and lateral pressure. In order to evaluate the importance of the foam core, shells of the same mass and shells with the same natural frequencies and critical loads are analyze.

**Keywords:** Sandwich cylindrical shells, Metallic foams, Functionally graded cylindrical shell, Natural frequencies, Critical loads

## 1 Introduction

Cascas têm sido usadas desde a antiguidade em vários campos da engenharia e arquitetura, incluindo reservatórios de água e de grãos (silos), abóbadas e coberturas de diversas edificações, vasos de pressões em instalações industriais e nucleares, torres de refrigeração, foguetes e tubulações, entre outras estruturas. Cascas também são encontradas comumente na natureza, se constituindo em uma forma ótima para diversos tipos de carregamento. Recentemente, com o surgimento de vários materiais reforçados por fibras, laminados e compósitos, o domínio de aplicação e as faixas de eficiência estrutural têm aumentando continuamente [1]. Hosseni-Hashemi et al. [2] destacam os painéis compósitos por apresentarem grande potencial de aplicações em diversas áreas da engenharia mecânica, aeroespacial, eletrônica, naval, nuclear e civil.

Uma casca sanduíche consiste basicamente de duas faces de material mais rígido que são separadas por um núcleo mais flexível como ilustrado na Figura 1.a. As faces usualmente suportam as cargas primárias no plano (tração, compressão e cisalhamento no plano), enquanto o núcleo é responsável por resistir a cargas cisalhantes transversais [3]. As faces são, em geral, de um mesmo material e o núcleo de um material leve que pode ser uma espuma ou um sólido, em forma de favo de mel, em rede ou em treliça. Como alternativa recentemente tem sido proposto o uso dos chamados materiais com gradação funcional onde as propriedades físicas do material variam de forma suave ao longo da espessura (Fig. 1.b), evitando descontinuidades.

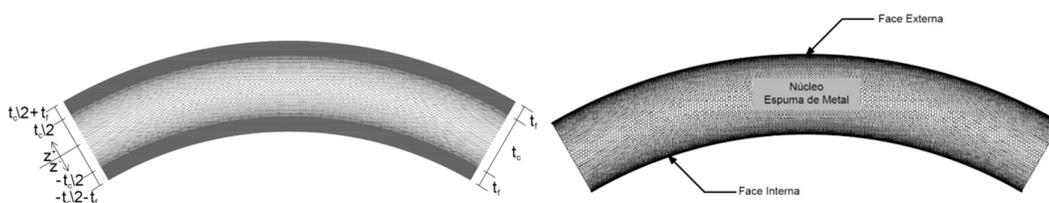


Figura 1. (a) casca sanduíche; (b) casca com gradação de material constituinte ao longo da espessura.

Ashby et al. [4] caracterizam as espumas metálicas como uma nova classe de material de baixa densidade e com inúmeras particularidades no que se refere às propriedades físicas, mecânicas, térmicas, elétricas e acústicas. Elas substituem as espumas poliméricas em situações em que a multifuncionalidade é requerida [5] e oferecem um grande potencial para estruturas que necessitam de baixo peso e boa absorção de energia, além de poderem ser recicladas e não serem tóxicas ou inflamáveis como as espumas poliméricas. As técnicas para a produção deste material ainda estão em desenvolvimento, e, em face disso, tem-se uma grande variabilidade em suas propriedades.

Peters [6] define uma estrutura sanduíche como sendo a união entre três elementos: um par de faces finas e rígidas e um núcleo de baixo peso que separa essas faces. Usando o mesmo raciocínio, Shokrollahi et al. [7], definem que as estruturas sanduíche consistem de duas faces (uma externa/superior e uma interna/inferior) conectadas entre si por um núcleo geralmente de material ou estrutura leve. Este material pode ser madeira, espuma metálica ou polimérica, chapas corrugadas, borracha, entre outros. Já as faces demandam um material de alta rigidez como o aço, ligas de alumínio ou plásticos reforçados. Esses elementos sanduíche são muito eficientes no isolamento térmico e acústico e reduzem a vibração de estruturas leves e flexíveis, onde o núcleo é fortemente deformado no cisalhamento, devido às camadas rígidas confinantes [8].

Sofyiev [9] define materiais de gradação funcional como materiais multifuncionais em que a sua composição varia de acordo com a finalidade desejada para aplicação, seja para controle de variações térmicas, propriedades estruturais ou funcionais. A gradação funcional permite que as tensões ao longo da espessura da casca se desenvolvam de forma suave, sem concentrações ou descontinuidades.

Este trabalho tem como objetivo estudar as frequências naturais e as cargas críticas de cascas sanduíche com gradação funcional (CGF), comparando cascas com cisalhamento no núcleo (CSCN)

e cascas de material homogêneo e isotrópico (CH). Usando a teoria linear de Donnell, derivam-se as equações de equilíbrio e movimento e obtêm-se as matrizes de massa, rigidez e rigidez geométrica para cascas simplesmente apoiadas, o que permite o cálculo de frequências naturais e cargas críticas. As influências das relações geométricas da casca e do fator de gradação do material são estudadas. Também são analisadas cascas de mesma massa e cascas com as mesmas frequências naturais e cargas críticas para averiguar a importância da camada de espuma metálica no comportamento estrutural.

## 2 Formulação matemática

### 2.1 Hipóteses básicas

Considere uma casca cilíndrica de raio médio  $R$ , comprimento  $L$  e espessura  $h$ , como ilustra a Figura 2.a, onde  $x$ ,  $y = R\theta$  e  $z$  constitui o sistema de coordenadas, sendo  $U$  o deslocamento na direção axial  $x$ ,  $V$ , o deslocamento na direção circunferencial  $\theta$  e  $W$ , o deslocamento na direção radial  $z$ .

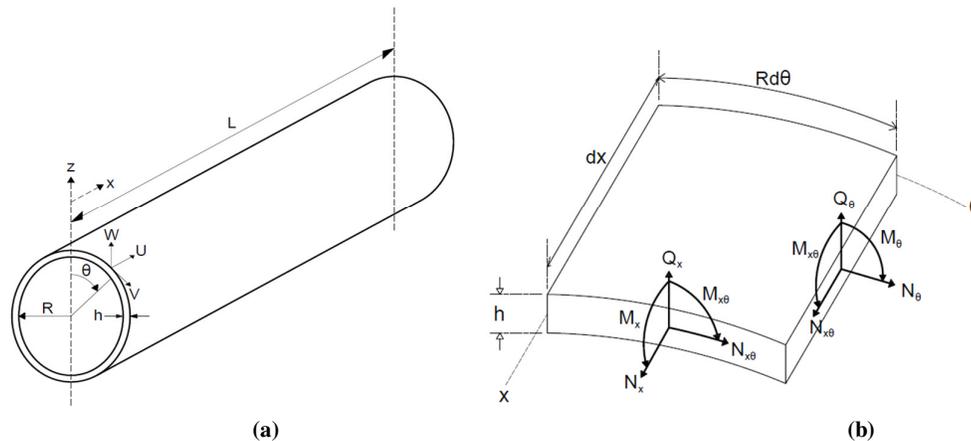


Figura 2. (a) Sistema de coordenadas, propriedades geométricas e campo de deslocamentos; (b) Esforços internos na casca cilíndrica.

### 2.2 Teoria de Donnell

A teoria clássica de cascas esbeltas, com base na hipótese das seções planas, assume que o campo de deslocamentos é dado por [10]:

$$\begin{aligned} U(x, \theta, z, t) &= u(x, \theta, t) + z \cdot \beta_x(x, \theta, t) \\ V(x, \theta, z, t) &= v(x, \theta, t) + z \cdot \beta_\theta(x, \theta, t) \\ W(x, \theta, z, t) &= w(x, \theta, t), \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $u$  é o deslocamento axial,  $v$  é o deslocamento circunferencial e  $w$  é o deslocamento radial da superfície média da casca e  $\beta_x$  e  $\beta_\theta$  são as rotações da seção transversal. Considerando que as seções normais da superfície média não deformada permanecem retas e normais à superfície média deformada e que não sofrem deformação, tem-se que:

$$\beta_x = -w_{,x}; \quad \beta_\theta = -w_{,\theta}/R. \quad (2)$$

Neste caso, existem apenas três incógnitas, que são os deslocamentos da superfície média da casca. Considerando que as seções normais da superfície média indeformada permanecem retas, mas não normais à superfície média deformada, tem-se que as rotações  $\beta_x$  e  $\beta_\theta$  são incógnitas do problema, tendo-se assim cinco incógnitas.

As relações não lineares deformação-deslocamento propostas por Donnell para cascas abatidas são dadas por [10]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= U_{,x} + w_{,x}^2/2 \\ \varepsilon_\theta &= (V_{,\theta} + W)/R + w_{,\theta}^2/2R^2 \\ \gamma_{x\theta} &= U_{,\theta}/R + V_{,x} + w_{,x} w_{,\theta}/R\end{aligned}\quad (3.a)$$

Quando as rotações  $\beta_x$  e  $\beta_\theta$  são incógnitas do problema, duas outras deformações são consideradas,

$$\gamma_{xz} = \beta_x + W_{,x}; \quad \gamma_{\theta z} = \beta_\theta + W_{,\theta}/R \quad (3.b)$$

Tanto o metal puro quanto a espuma metálica são considerados materiais elásticos e lineares que obedecem à Lei de Hooke, portanto tem-se que

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta); \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x); \quad \tau_{x\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{x\theta} \\ \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz}; \quad \tau_{\theta z} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{\theta z}\end{aligned}\quad (4)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade ou de Young e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.  $G = E/2(1 + \nu)$  é o módulo de elasticidade transversal. Em um material com gradação funcional, tanto o módulo de Young ( $E$ ) quanto o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) variam ao longo da espessura da casca. Assim, estes dois parâmetros dependem da coordenada  $z$  da casca. As leis da variação aqui adotadas são:

$$E = (E_1 - E_2) \cdot V_b + E_2; \quad \nu = (\nu_1 - \nu_2) \cdot V_b + \nu_2 \quad (5)$$

onde o subscrito 1 se refere aos parâmetros relacionados à espuma metálica na superfície neutra e o subscrito 2 aos parâmetros do metal puro. O fator multiplicador  $V_b$  descreve a variação desses materiais ao longo da espessura e aqui é dado pela expressão [11]:

$$V_b = \left[ \left( 1 - \frac{2 \cdot z}{h} \right) \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot z}{h} \right) \right]^{2 \cdot S + 1} \quad (6)$$

onde  $S$  é um número real maior que zero. A Figura 3.a mostra a variação de  $V_b$  ao longo da espessura para valores selecionados de  $S$ . Observa-se que à medida que  $S$  cresce, a espessura das camadas das faces aumenta.

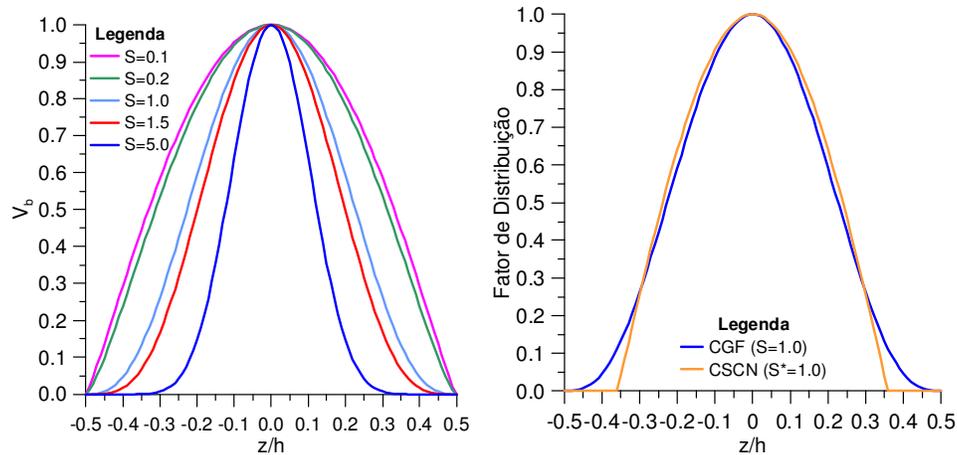


Figura 3. (a) Variação dos parâmetros físicos ao longo da espessura da casca com gradação funcional; (b) variação dos parâmetros físicos ao longo da espessura do núcleo da casca sanduíche comparados com a gradação funcional.

Tendo-se as relações cinemáticas e a lei constitutiva, podem-se encontrar os esforços seccionais a partir da integração das tensões ao longo da espessura da casca. No caso da casca sanduíche, seguindo

o trabalho de Magnucka-Blandzi [12], para as camadas das faces, o módulo de elasticidade ( $E_f$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu_f$ ) são constantes e considera-se que o núcleo tenha uma variação semelhante à do material com gradação funcional, sendo a variação do módulo de elasticidade dada por:

$$E_c = E_f \left[ 1 - \left( 1 - \frac{E_{co}}{E_f} \right) \cos \left( \frac{\pi z}{t_c} \right) \right] \quad (7)$$

A Figura 3.b mostra uma comparação entre a variação das propriedades da casca com gradação funcional para  $S=1$ , Eq. 6, com a variação das propriedades do núcleo da casca sanduíche, Eq. 7.

### 2.3 Parcelas de energia e equações de movimento

A energia interna de deformação é dada por

$$U_d = \frac{R}{2} \iiint_V (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_\theta \cdot \varepsilon_\theta + \tau_{x\theta} \cdot \gamma_{x\theta} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \tau_{\theta z} \cdot \gamma_{\theta z}) dz d\theta dx \quad (8.a)$$

Assim como  $E$  e  $\nu$ , a massa específica do material ( $\rho$ ) varia na direção radial da casca, e segue a mesma lei de variação da Equação 5, ou seja,  $\rho = (\rho_1 - \rho_2) \cdot V_b + \rho_2$ . Usando o campo de deslocamento da Eq. 1, a energia cinética da casca é dada por:

$$T = \frac{R}{2} \iiint_V \rho \cdot (\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) dz d\theta dx \quad (8.b)$$

A energia potencial total é a soma da energia interna de deformação (Equação 7) com a o potencial das cargas externas conservativas,  $V$ , ou seja,  $\Pi = U_d + V$ . O Lagrangiano é dado pela diferença entre a energia cinética e a energia potencial total, ou seja,  $L = T - \Pi$ . O Lagrangiano é, portanto, uma função dos deslocamentos e suas derivadas com relação às coordenadas  $x$  e  $\theta$  e ao tempo,  $t$ . Usando o Princípio de Hamilton, obtêm-se as equações de movimento da casca. Considerando a teoria clássica, tem-se as equações de movimento que, em termos dos esforços (ver Fig. 1.b), são dadas por:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{x\theta,\theta} / R + \ddot{u} \cdot \left( \int \rho dz \right) &= 0 \\ N_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} / R + \ddot{v} \cdot \left( \int \rho dz \right) &= 0 \\ -N_\theta / R + \left( M_{x,xx} + 2 \cdot M_{x\theta,x\theta} / R + M_{\theta,\theta\theta} / R^2 \right) + \left( N_x w_{,x} + 2N_{x\theta} w_{,x\theta} / R + N_\theta w_{,\theta} / R^2 \right) \\ + \ddot{w} \cdot \left( \int \rho dz \right) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

e, considerando o efeito do cisalhamento, tem-se:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{x\theta,\theta} / R + \ddot{u} \cdot \left( \int \rho dz \right) &= 0 \\ N_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} / R + \ddot{v} \cdot \left( \int \rho dz \right) &= 0 \\ -N_\theta / R + Q_{x,x} + Q_{\theta,\theta} / R + \left( N_x w_{,x} + 2N_{x\theta} w_{,x\theta} / R + N_\theta w_{,\theta} / R^2 \right) + \ddot{w} \cdot \left( \int \rho dz \right) &= 0 \\ -Q_x + M_{x,x} + M_{x\theta,\theta} / R + \ddot{\beta}_x \cdot \left( \int \rho dz \right) &= 0 \\ -Q_\theta + M_{x\theta,x} + M_{\theta,\theta} / R + \ddot{\beta}_\theta \cdot \left( \int \rho dz \right) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Os esforços são obtidos a partir da integração das tensões ao longo da espessura da casca, sendo dados por:

$$\begin{aligned} N_x &= \int \sigma_x dz; \quad N_\theta = \int \sigma_\theta dz; \quad N_\theta = \int \sigma_\theta dz; \quad M_x = \int \sigma_x z dz \\ M_\theta &= \int \sigma_\theta z dz; \quad M_{x\theta} = \int \tau_{x\theta} z dz; \quad Q_x = \int \tau_{xz} dz; \quad Q_\theta = \int \tau_{\theta z} dz \end{aligned} \quad (11)$$

onde  $N_x$ ,  $N_\theta$  e  $N_{x\theta}$  são as intensidades das forças normais e de cisalhamento no plano do elemento;  $M_x$ ,  $M_\theta$  e  $M_{x\theta}$  são os momentos fletores e torsor;  $Q_x$  e  $Q_\theta$  são as forças cisalhantes transversais.

## 2.4 Solução para uma casca simplesmente apoiada

Considerando a casca simplesmente apoiada em ambas as extremidades, a solução deve obedecer às seguintes condições de contorno em  $x = 0$  e  $x = L$ :

$$v = w = N_x = M_x = 0 \quad (12)$$

A solução analítica para o campo de deslocamentos de uma casca cilíndrica simplesmente apoiada em ambas às extremidades que corresponde aos modos de vibração livre é dada por:

$$\begin{aligned} u(x, \theta, t) &= u_A \cdot \cos(m\pi x/L) \cdot \cos(n\theta) \cdot \exp^{i\omega t} \\ v(x, \theta, t) &= v_A \cdot \sin(m\pi x/L) \cdot \sin(n\theta) \cdot \exp^{i\omega t} \\ w(x, \theta, t) &= u_A \cdot \sin(m\pi x/L) \cdot \cos(n\theta) \cdot \exp^{i\omega t} \\ \beta_x(x, \theta, t) &= \beta_{xA} \cdot \cos(m\pi x/L) \cdot \cos(n\theta) \cdot \exp^{i\omega t} \\ \beta_\theta(x, \theta, t) &= \beta_{\theta A} \cdot \sin(m\pi x/L) \cdot \sin(n\theta) \cdot \exp^{i\omega t} \end{aligned} \quad (13)$$

onde  $m$  é o número de meia-ondas longitudinais,  $n$  é o número de ondas circunferenciais,  $\omega$  a frequência angular de vibração e  $u_A$ ,  $v_A$ ,  $w_A$ ,  $\beta_{xA}$  e  $\beta_{\theta A}$  são as amplitudes modais.

A matriz de rigidez geométrica é obtida através do critério de equilíbrio adjacente que resulta nas seguintes equações de equilíbrio linearizadas [10]:

$$\begin{aligned} -N_\theta/R + (M_{x,xx} + 2 \cdot M_{x\theta,x\theta}/R + M_{\theta,\theta\theta}/R^2) + (N_{x0}w_{,x} + 2N_{x\theta0}w_{,x\theta}/R + N_{\theta0}w_{,\theta}/R^2) &= 0 \\ -N_\theta/R + Q_{x,x} + Q_{\theta,\theta}/R + (N_{x0}w_{,x} + 2N_{x\theta0}w_{,x\theta}/R + N_{\theta0}w_{,\theta}/R^2) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

onde  $N_{x0}$ ,  $N_{x\theta0}$  e  $N_{\theta0}$  são os esforços de membrana relativos ao estado fundamental de equilíbrio. No caso da compressão axial ( $P$ ), tem-se:

$$N_{x0} = -P/2\pi R \quad (15.a)$$

e para a pressão lateral ( $p$ ) tem-se:

$$N_{x\theta0} = -pR \quad (15.b)$$

Substituindo a solução analítica nas equações de movimento obtêm-se as matrizes de massa, rigidez e rigidez geométrica que são mostradas em detalhe em Bezerra [13].

## 3 Propriedades dos materiais

As propriedades físicas do alumínio e da espuma de alumínio que são utilizadas neste e no próximo capítulo são baseados na literatura disponível. Hibbeler [14] adota para uma liga de alumínio forjada 6061-T6 um módulo de Young de 68,9 GPa, peso específico de 2710 kg/m<sup>3</sup> e coeficiente de Poisson de 0,35. Bart-Smith, Hutchinson e Evans [15] utilizam a mesma liga de alumínio forjada com módulo de Young 69 GPa e para a espuma metálica (ALPORAS<sup>®</sup>) um módulo de Young de 0,23 GPa, uma densidade relativa à liga de alumínio de 0,08 e coeficiente de Poisson de 0,3. Ramamurty e Paul [16] realizaram testes em espécimes de espuma de alumínio ALPORAS<sup>®</sup> encontrando para o módulo de elasticidade valores entre 0,124 e 0,547 GPa e peso específico entre 226 e 303 kg/m<sup>3</sup>. Miyoshi et al. [17] definem que a densidade da espuma de alumínio ALPORAS<sup>®</sup> varia entre 180 e 240 kg/m<sup>3</sup> e indicam que a densidade do alumínio sólido é cerca de 13 vezes maior que estes valores, ou seja, algo entre 2340 e 3120 kg/m<sup>3</sup>. Por fim, Ashby et al. [4] catalogou as principais espumas metálicas disponíveis no mercado e elencou suas propriedades físicas. A Tabela 1 mostra os valores das propriedades adotadas neste trabalho tanto para o alumínio quanto para a espuma metálica de alumínio.

Tabela 1. Propriedades físicas dos materiais

Alumínio	E (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Sólido	68.9	0.35	2710
Espuma na superfície neutra	1.0	0.32	250

## 4 Frequências naturais

Esta seção traz um estudo das frequências naturais comparando as três teorias de cascas cilíndricas (CH, CGF e CSCN), em função das propriedades físicas dos materiais e dos parâmetros geométricos  $R/h$  e  $L/R$ . Com a finalidade de ilustrar a eficiência e aplicabilidade das cascas sanduíche aqui estudadas, é feita uma análise das frequências para cascas com mesma massa e do peso das cascas conservando a frequência constante, em função das variações do material ao longo da espessura.

### 4.1 Variação da matriz de massa

No cálculo da energia cinética (Eq. 8.b), tem-se na literatura três tipos de abordagens. Considerando o caso mais geral para o campo dos deslocamentos, têm-se cinco variáveis independentes, os deslocamentos da superfície média,  $u$ ,  $v$  e  $w$ , que correspondem aos termos de inércia translacional, e as rotações  $\beta_x$  e  $\beta_\theta$ , relativos à inércia da rotação. Uma primeira aproximação usual é considerar que os termos relativos à inércia a rotação podem ser negligenciados em relação aos termos associados à inércia a translação. Uma segunda abordagem habitual é considerar apenas o deslocamento radial ( $w$ ) com base na hipótese de que em cascas esbeltas os deslocamentos no plano da casca,  $u$  e  $v$ , são muito menores que o deslocamento transversal,  $w$ . Assim, a seguinte notação é adotada na análise: a energia cinética assumindo apenas o deslocamento radial ( $Mw$ ), considerando os três deslocamentos translacionais ( $Muvw$ ) e, finalmente, considerando todos os deslocamentos ( $MComp$ ).

Tabela 2. Influência dos termos de inércia nas frequências naturais mínimas ( $m=1$ ).

Teoria	$Mw \rightarrow Muvw$	$Mw \rightarrow MComp$	$Muvw \rightarrow MComp$
CH 3var	-1,3964%	-	-
CGF 3var	-2,0118%	-	-
CH 5var	-1,3964%	-1,3970%	-0,0006%
CGF 5var	-2,0118%	-2,0124%	-0,0006%
CSCN	-2,0124%	-2,0130%	-0,0006%

As cascas utilizadas para este estudo têm as seguintes propriedades geométricas: comprimento de 4 m, raio médio de 1 m e espessura de 2 mm. No caso da CSCN a espessuras das faces é de 0.1 mm e do núcleo de 1.8 mm. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 2 que mostra a redução nas frequências mínimas entre as teorias. Verifica-se que a influência da inércia a rotação é desprezível quando compara à inércia a translação (terceira coluna, variação de -0,0006%). Já a consideração das inércias a translação no plano da casca têm uma pequena influência nos resultados, principalmente nas cascas com gradação funcional e sanduíche (em torno de -2%).

### 4.2 Influência das relações geométricas

A Figura 4.a mostra a variação da frequência natural mínima (frequência fundamental) da casca sanduíche com a relação geométrica  $L/R$  para valores selecionados de  $R/h$  e  $S=1.0$ , bem como o número de ondas circunferenciais associado à frequência mínima. A Figura 4.b compara os resultados para a casca homogênea, a casca com gradação funcional com  $S=1.0$ , ambos com considerando cinco variáveis (5Var), e para a casca sanduíche. A matriz de massa, neste caso, levou em conta todos os

termos ( $MComp$ ). Nota-se que em todos os casos a frequência natural mínima aumenta à medida que a razão  $R/h$  diminui (a casca se torna mais espessa) e decresce à medida que  $L/R$  aumenta, ou seja, à medida que a casca se torna mais longa. Em todos os casos, a frequência natural mínima ocorre para  $m = 1$ , enquanto o número de ondas circunferenciais,  $n$ , diminui com a razão  $L/R$  e aumenta com a razão  $R/h$ .

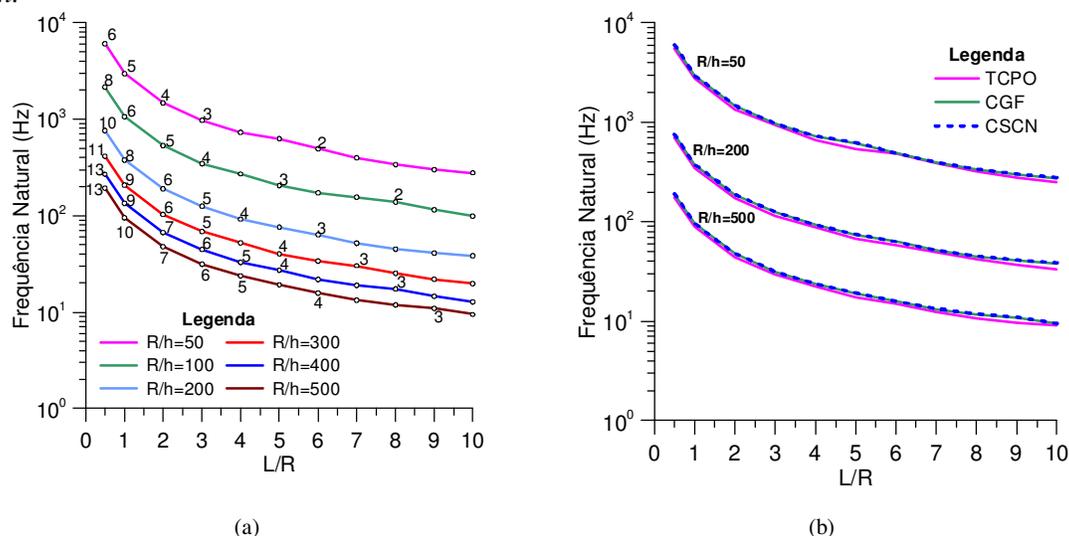


Figura 4. Influência dos parâmetros geométricos  $R/h$  e  $L/R$  na frequência natural mínima obtida pelas três teorias de casca

### 4.3 Cascas cilíndricas de mesma massa

A Tabela 3 mostra as espessuras das cascas com mesma massa, para cada teoria, levando em consideração os distintos valores de  $S$ . Estes valores são obtidos pela igualdade entre as integrais da massa específica dos materiais ao longo da espessura da casca. Primeiramente é estabelecida uma espessura para a casca homogênea. Em seguida se faz a equivalência para casca com gradação funcional (5var), em peso, para cada valor de  $S$  utilizado. Por fim, faz-se a equivalência entre a casca com gradação funcional e a casca sanduíche encontrando as espessuras do núcleo ( $t_c$ ) e, em seguida, das faces ( $t_f$ ). Salienta-se que tanto a casca com gradação funcional quanto a casca sanduíche possuem a mesma espessura total. As cascas analisadas nesta seção têm um comprimento de 4.0m e um raio médio de 1.0 m, ou seja,  $L/R=4$ . Observa-se que, à medida que  $S$  diminui a espessura da casca aumenta em consonância com a Fig. 3.a.

Tabela 3. Espessura (em mm) de cascas com mesma massa

CH (Ref.)	CGF	CSCN
2.000	$S=0.1$	$t_c=4.693$ $t_f=0.017$
	$S=0.2$	$t_c=4.176$ $t_f=0.119$
	$S=1.0$	$t_c=2.455$ $t_f=0.482$
	$S=1.5$	$t_c=2.023$ $t_f=0.573$
	$S=5.0$	$t_c=1.061$ $t_f=0.776$

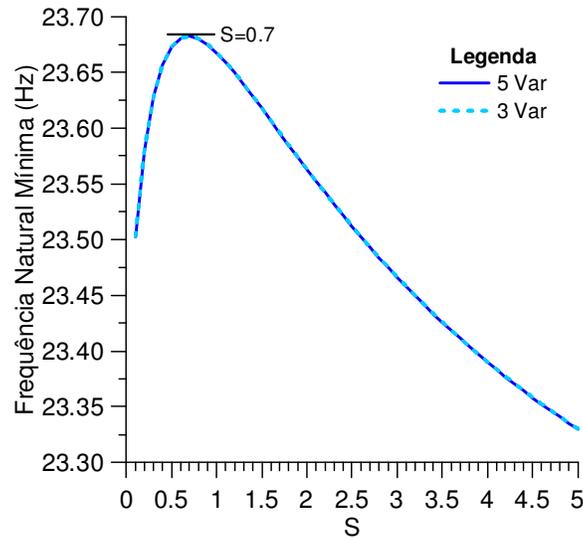
A Tabela 4 mostra a frequências naturais mínimas em Hz de cascas com mesma massa e  $S = S^* = 1.0$ . Os resultados mostram um aumento de aproximadamente 42% na frequência natural mínima para a casca com gradação funcional e da casca sanduíche em relação à casca homogênea. Neste caso, a espessura total das camadas é cerca de 70% maior que a da casca homogênea. No entanto esta diferença diminui à medida que  $S$  aumenta. Para  $S=S^*= 1,5$  a frequência mínima é aproximadamente 34% maior que para a casca homogênea e para  $S=S^*=5,0$  cerca de 17% maior.

Tabela 4. Frequência fundamental (Hz) de cascas com mesma massa ( $m=1$ ).

CH (3Var)	CGF (3var) S=1.0	CH (5Var)	CGF (5var) S=1.0	CSCN S*=1.0
22.2846	31.4559	22.2842	31.4541	31.6977

#### 4.4 Influência do fator S nas frequências naturais

Para este estudo toma-se uma casca com gradação funcional (5var) com  $L=4.0m$ ,  $R=1.0m$  e  $h=2.0mm$ . Varia-se então o valor de  $S$ , que influencia diretamente no módulo de Young, coeficiente de Poisson e massa específica, de 0.1 a 5.0. Nota-se, na Fig. 5, que existe um valor de  $S$  que resulta na maior frequência fundamental.

Figura 5. Estudo da influência de  $S$  na frequência natural mínima (CGF).

#### 4.5 Cascas cilíndricas de mesma frequência

Para o estudo de cascas cilíndricas de mesma frequência, tomam-se como referência as frequências naturais da casca homogênea para determinadas relações geométricas  $L/R$  e  $R/h$  com espessura de referência de 2.0 mm e encontram-se as espessuras das cascas com gradação funcional e sanduíche que resultam nas mesmas frequências naturais.

A Tabela 5 apresenta as reduções em peso para valores selecionados de  $S$ . A casca com gradação funcional exibe reduções de peso entre 31.0% a 63.3% e a casca sanduíche entre 30.4% a 45.9%. As maiores reduções ocorrem para pequenos valores de  $S$ .

Tabela 5. Reduções médias de peso (em %) de cascas com mesma frequência mínima para a CGF (5var) e CSCN em relação à espessura referência (2mm) da casca homogênea usando CH (5var)

Teoria	S=0.1	S=0.2	S=1.0	S=1.5	S=5.0
CGF	63,3025	61,1858	49,8493	45,4313	31,0378
CSCN	44,0682	45,9356	45,5105	42,5782	30,4061

## 5 Cargas críticas

Esta seção traz um estudo das cargas críticas da casca sob carga axial e pressão lateral em função das propriedades físicas dos materiais e dos parâmetros geométricos  $R/h$  e  $L/R$ . Com a finalidade de ilustrar a eficiência e aplicabilidade das cascas sanduíche aqui estudadas, é feita uma análise das

cargas críticas para cascas com mesma massa e do peso das cascas conservando a carga crítica constante, em função das variações do material ao longo da espessura.

### 5.1 Influência da geometria

A carga crítica da casca sob compressão axial é constante, independentemente dos valores de  $m$  e  $n$ . A tensão crítica para a casca homogênea:

$$\sigma_{cr} = \frac{Eh}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (16)$$

é uma função apenas das propriedades do material e da relação geométrica  $R/h$ , sendo inversamente proporcional a essa relação. Deve-se notar que a expressão acima é obtida por um processo de minimização onde  $m$  e  $n$  são considerados variáveis contínuas, enquanto na estrutura real os valores de  $m$  e  $n$  são inteiros (valores discretos), o que leva a pequenas flutuações no valor da carga crítica como explicam Hunt et al. [18].

Em relação à pressão lateral, a pressão crítica ocorre sempre para  $m = 1$ . A Figura 6.a mostra a variação da pressão lateral crítica com  $L/R$  para valores selecionados de  $R/h$  para a casca sanduíche mostrando a variação do número de ondas circunferenciais crítico, enquanto a Figura 6.b compara os resultados obtidos para os três tipos de casca considerando  $S=S^*=1$  onde se verifica que, para cascas com mesma geometria, a maior carga crítica ocorre para a casca homogênea e a menor para a casca sanduíche. O valor de  $n$  crítico diminui com o aumento da relação  $L/R$  e com a diminuição da relação  $R/h$ .

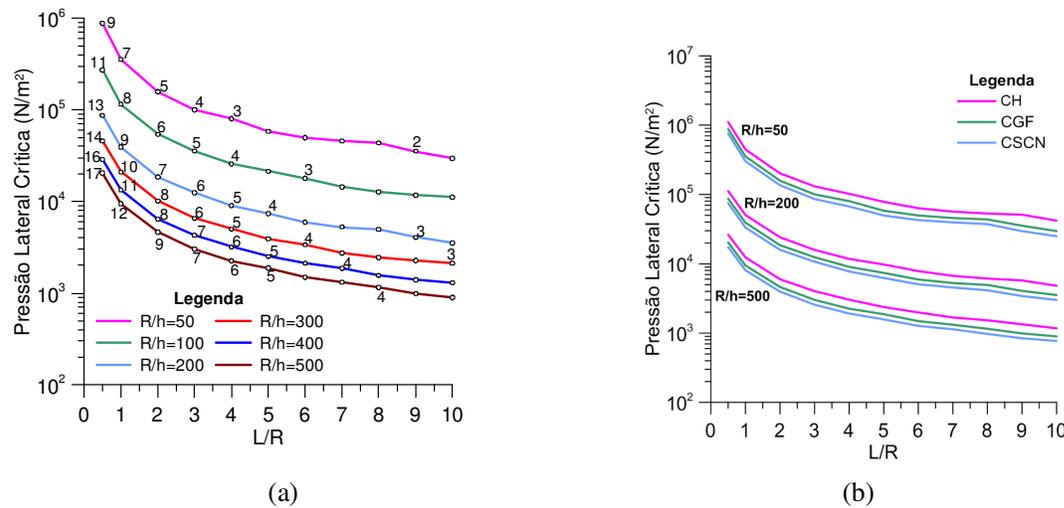


Figura 6. Influência relações geométricas na pressão lateral crítica ( $S=S^*=1$  e  $m=1$ ).

### 5.2 Cascas cilíndricas de mesma massa

Usando as mesmas espessuras da Tabela 2, observa-se na Tabela 6 um aumento significativo da carga crítica axial das cascas sanduíche e com gradação funcional considerando cascas de mesma massa.

Tabela 6. Aumento da carga axial crítica em função de  $S$  com relação à casca de material homogêneo

	$S=0.1$	$S=0.2$	$S=1.0$	$S=1.5$	$S=5.0$	CH	Teoria
CCA (N)	$2,91 \cdot 10^6$	$2,75 \cdot 10^6$	$2,13 \cdot 10^6$	$1,96 \cdot 10^6$	$1,55 \cdot 10^6$	$1,11 \cdot 10^6$	CGF
%	161,21	146,99	91,14	75,71	39,06	-	
CCA (N)	$3,01 \cdot 10^6$	$2,77 \cdot 10^6$	$2,15 \cdot 10^6$	$1,97 \cdot 10^6$	$1,55 \cdot 10^6$	$1,11 \cdot 10^6$	CSCN
%	170,38	148,46	93,28	77,40	39,41	-	

Para a pressão lateral, o aumento da carga crítica tanto da casca de gradação funcional como da casca sanduíche em relação à casca homogênea é significativa, o que demonstra a importância destas estruturas em várias aplicações práticas. Em termos gerais, a capacidade de carga é ampliada em cerca de 73% para  $S=5.0$  até 373% para  $S=0.1$ , conforme mostrado na Tabela 7. Observa-se que o aumento na capacidade de carga é bem superior a aquele observado para o caso da casca sob compressão axial. Nas pressões laterais críticas para cascas de mesma massa, a influência da teoria utilizada na análise é mínima.

Tabela 7. Aumento da pressão lateral crítica em função de  $S$  com relação à casca de material homogêneo

	$S=0.1$	$S=0.2$	$S=1.0$	$S=1.5$	$S=5.0$	CH	Teoria
PLC ( $N/m^2$ )	$1,44 \cdot 10^4$	$1,30 \cdot 10^4$	$8,82 \cdot 10^3$	$7,90 \cdot 10^3$	$5,27 \cdot 10^3$	$3,04 \cdot 10^3$	CGF
%	373,19	329,68	190,52	160,10	73,64	-	
PLC ( $N/m^2$ )	$1,44 \cdot 10^4$	$1,32 \cdot 10^4$	$8,96 \cdot 10^3$	$7,99 \cdot 10^3$	$5,30 \cdot 10^3$	$3,04 \cdot 10^3$	CSCN
%	373,66	333,77	195,04	163,31	74,62	-	

### 5.3 Cascas cilíndricas com mesma carga crítica

As cascas cilíndricas com mesma carga crítica foram obtidas da seguinte forma: (i) a carga crítica de referência é obtida em cada caso a partir da casca homogênea considerando o efeito do cisalhamento (5Var) fixando uma espessura de 2.0 mm e utilizando relações geométricas para  $R/h$  (100, 200, 300, 400 e 500) e  $L/R$  (4, 2 e 1) compatíveis com as aplicações práticas; (ii) em seguida, para a casca com gradação funcional de cinco variáveis, encontram-se as espessuras que levam à mesma carga crítica da casca homogênea. Essas espessuras são as mesmas adotadas para a casca sanduíche. De posse dessas espessuras calcula-se a massa da casca com gradação funcional e da casca sanduíche comparando-as com a massa da correspondente casca homogênea. Os resultados para as cargas axiais críticas mostram que as relações geométricas utilizadas de  $L/R$  e  $R/h$  não tiveram significativo impacto nas reduções de peso das cascas. A Tabela 8 apresenta essas reduções médias em peso mostrando que tanto a casca com gradação funcional quanto para a casca sanduíche apresentam reduções de massa similares, entre 16% e 39%, dependendo do valor de  $S$ . Este resultado é importante já que a redução da massa (e, conseqüentemente, do peso) tem importância fundamental da otimização de estruturas.

Tabela 8. Reduções de peso (em %) de cascas de mesma carga axial crítica na CGF 5var e CSCN em relação a espessura de referência (2mm) de cascas homogêneas usando CH (5var)

Teoria	$S=0.1$	$S=0.2$	$S=1.0$	$S=1.5$	$S=5.0$
CGF 5var	39,3950	37,6844	29,1657	26,1230	16,9623
CSCN	39,4203	37,9919	29,9207	26,7636	16,5672

Os resultados das reduções médias em cascas com mesma pressão lateral crítica estão na Tabela 9 e são superiores às reduções encontradas para as cargas axiais. As reduções estão entre 20% a 47%, dependendo do valor de  $S$ .

Tabela 9. Reduções médias no peso (em %) de cascas de mesma pressão lateral crítica na CGF 5var e CSCN em relação a espessura de referência (2mm) de cascas homogêneas usando CH (5var)

Teoria	$S=0.1$	$S=0.2$	$S=1.0$	$S=1.5$	$S=5.0$
CGF 5var	46,9600	44,9741	35,0385	31,4610	20,6004
CSCN	47,0006	45,4288	36,5360	32,9337	21,3050

## 5.4 Cascas cilíndricas sob carga axial e pressão lateral

A Figura 7 mostra o comportamento paramétrico de cascas de mesma massa, submetidas simultaneamente a uma carga axial e pressão lateral. Valores positivos indicam compressão axial e pressão externa, enquanto valores negativos indicam tração axial e pressão interna. O comportamento é linear para as três teorias. Observa-se que a casca com gradação funcional e a casca sanduíche apresentam resultados bem próximos, em virtude de uma distribuição semelhante de materiais ao longo da espessura. Para quase todas as combinações de carregamento a casca com gradação funcional e a casca sanduíche apresentam uma maior capacidade de carga que a casca homogênea de mesma massa.

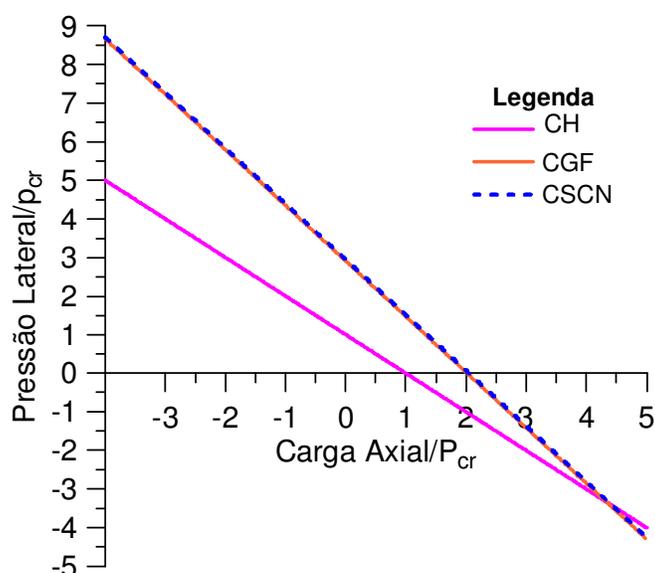


Figura 7. Carga crítica para cascas sob carga axial e pressão lateral.

## 6 Conclusões

Inicialmente, foi estudada a influência das inércias translacionais e rotacionais nas frequências naturais de vibração. Observa-se, em todos os casos, que as frequências decrescem à medida que o número de termos não nulos na diagonal principal da matriz de massa cresce em função do aumento da flexibilidade do sistema. Em seguida, ao se variar os parâmetros geométricos  $R/h$  e  $L/R$ , constata-se que, em todos os casos, as frequências naturais decrescem à medida que  $R/h$  e/ou  $L/R$  cresce. Observa-se também que o número de ondas circunferenciais associado à frequência natural mínima (frequência fundamental) decresce com  $R/h$  e  $L/R$ . A frequência mínima sempre ocorre para um modo com meia onda longitudinal. Para se pesquisar a vantagem da casca com núcleo de espuma metálica, compararam-se as frequências naturais de cascas de mesma massa. Observa-se que tanto cascas com gradação funcional quanto cascas sanduíche apresentam frequências naturais superiores a cascas isotrópicas e homogêneas, graças ao aumento da espessura. Verifica-se que, à medida que a espessura das faces cresce, as frequências naturais decrescem se aproximando assintoticamente das frequências naturais da casca de material homogêneo. Para cascas com mesma frequência fundamental, quanto maior a espessura da camada de espuma metálica, maior é a redução de peso. Nas cascas com gradação funcional e sanduíche a redução de peso em relação à casca homogênea encontra-se entre 63% e 30%.

No que se refere às cargas críticas, estudou-se o comportamento das cascas sob carga axial e pressão lateral. Para a carga axial, observa-se, como no caso de cascas homogêneas, um patamar relativo à carga mínima, independentemente das relações geométricas  $R/h$  e  $L/R$ , que pode assim ser considerada constante para uma dada distribuição de espuma metálica. Para pressões laterais o modo crítico está associado com uma meia onda longitudinal. O número de ondas circunferenciais crítico

umenta com a relação  $R/h$  e decresce com a relação  $L/R$ . Observa-se também que, quanto maior  $R/h$  e/ou  $L/R$  menor é a pressão lateral crítica. Para cascas de mesma massa, as cascas sanduíche chegam a apresentar cargas críticas axiais quase três vezes superiores às da casca isotrópica e homogênea, além de ter um desempenho levemente superior às cascas com gradação funcional. Para as pressões laterais, as cascas sanduíche chegam a apresentar pressões laterais críticas cerca de cinco vezes superiores às cascas isotrópicas e homogêneas, mesmo desempenho encontrado para as cascas com gradação funcional. As cascas com mesma carga crítica axial possuem, para um determinado tipo de distribuição de espuma metálica, espessuras praticamente constantes e independentes das relações geométricas  $R/h$  e  $L/R$ . Tanto a casca com gradação funcional quanto a casca sanduíche apresentam reduções de peso semelhantes para cada distribuição de espuma metálica (valor de  $S$  ou  $S$  equivalente). Quanto menor o valor de  $S$  maior é a redução percentual (entre 39% e 16%). As cascas com gradação funcional e sanduíche que exibem a mesma pressão lateral crítica da casca homogênea apresentam reduções de peso semelhantes para respectivos  $S$  variando entre 47% e 20% para as geometrias analisadas. As espessuras se mantêm constantes independentes das relações geométricas  $R/h$  e  $L/R$  de acordo com o valor de  $S$ . Os resultados confirmam o melhor desempenho estrutural das cascas com gradação funcional e sanduíche em relação à casca de material homogêneo.

## Agradecimentos

A Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC/Rio) pelas oportunidades e ferramentas e infraestrutura de pesquisa. A CAPES, pelo suporte financeiro e bibliográfico.

## References

- [1] M. Farshad. *Design and analysis of shell structures*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [2] S. Hosseini-Hashemi; M. R. Ilkhani and M. Fadaee. Identification of the validity range of Donnell and Sanders shell theories using an exact vibration analysis of functionally graded thick cylindrical shell panel. *Acta Mechanica*, v. 223, n. 5, p. 1101-1118, 2012.
- [3] Vinson, J. R. *The behavior of shells composed of isotropic and composite materials*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [4] M. F. Ashby; T. Evans; N. A. Fleck; J. W. Hutchinson; H. N. G. Wadley and L. J. Gibson. *Metal foams: a design guide*. Elsevier, 2000.
- [5] A. M. Harte; N. A. Fleck and M. F. Ashby. Sandwich panel design using aluminum alloy foam. *Advanced Engineering Materials*, v. 2, n. 4, p. 219-222, 2000.
- [6] S. T. Peters (Ed.). *Handbook of composites*. Springer Science & Business Media, 1998.
- [7] H. Shokrollahi; M. H. Kargarnovin and F. Fallah. Deformation and stress analysis of sandwich cylindrical shells with a flexible core using harmonic differential quadrature method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 37, n. 1, p. 325-337, 2015.
- [8] Y. Zhai; M. Chai; J. Su and S. Liang, S. Dynamics properties of composite sandwich open circular cylindrical shells. *Composite Structures*, v. 189, n. 1, p. 148-159, 2018.
- [9] A. H. Sofiyev. The vibration and buckling of sandwich cylindrical shells covered by different coatings subjected to the hydrostatic pressure. *Composite Structures*, v. 117, p. 124-134, 2014.
- [10] D.O. Brush and B. O. Almroth. *Buckling of bars, plates, and shells*. New York: McGraw-Hill, 1975.
- [11] F.M.A. da Silva, R.O.P. Montes, P.B. Gonçalves and Z.J.G.N. del Prado. Nonlinear vibrations of fluid-filled functionally graded cylindrical considering a time dependent lateral load and static preload, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 230 (1), pp. 102-119, 2016
- [12] E. Magnucka-Blandzi. Mathematical modelling of a rectangular sandwich plate with a metal foam core. *Journal of theoretical and applied mechanics*, 49(2), 439-455, 2011.
- [13] E. A. Bezerra. *Estabilidade e vibrações de cascas cilíndricas sanduíche com núcleo de espuma metálica*. 2019. 158 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

- [14] R. C. Hibbeler. *Resistência dos Materiais*. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- [15] H. Bart-Smith; J. W. Hutchinson and A. G. Evans. Measurement and analysis of the structural performance of cellular metal sandwich construction. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 43, n. 8, p. 1945-1963, 2001.
- [16] U. Ramamurty and A. Paul. Variability in mechanical properties of a metal foam. *Acta Materialia*, v. 52, n. 4, p. 869-876, 2004.
- [17] T. Miyoshi; M. Itoh; S. Akiyama and A. Kitahara. ALPORAS aluminum foam: production process, properties, and applications. *Advanced engineering materials*, v. 2, n. 4, p. 179-183, 2000.
- [18] G. W. Hunt; G. J. Lord and M. A. Peletier. Cylindrical shell buckling: a characterization of localization and periodicity. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, 3(4), 505-518.