

## **MODELAGEM DINÂMICA DE ESTRUTURAS E MECANISMOS 3D COM LIGAÇÕES DESLIZANTES POR UMA FORMULAÇÃO NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE ELEMENTOS FINITOS**

**Tiago Morkis Siqueira**

*morkis@usp.br*

**Humberto Breves Coda**

*hbcoda@sc.usp.br*

*Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo*

*Av. Trabalhador Sãocarlense, 400, CEP 13560-590, São Carlos, São Paulo, Brasil*

**Resumo.** Este trabalho trata do desenvolvimento de uma formulação matemática para ligações deslizantes aplicadas na análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais junto à sua implementação computacional. Esse tipo de conexão permite a modelagem de diversas aplicações nas indústrias civil, mecânica e aeroespacial como, por exemplo: antenas de satélites, braços robóticos e guindastes, estruturas aporticadas como as formadas por elementos pré-moldados, o acoplamento entre veículos e pontes, dentre outras. Emprega-se uma formulação Lagrangeana total para descrição dos elementos finitos de pórtico espacial e casca utilizados. Nessa abordagem são utilizadas posições e vetores generalizados como parâmetros nodais, evitando o emprego de fórmulas para o tratamento de giros finitos. A relação constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, que relaciona a deformação de Green-Lagrange com a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, é adotada para descrever os materiais. As equações do movimento são obtidas pelo Princípio da Energia Total Estacionária no qual são introduzidos multiplicadores de Lagrange para impor as equações de restrição cinemática que descrevem as ligações deslizantes. Dada a presença das restrições, adota-se o método  $\alpha$ -generalizado para desenvolver a marcha no tempo. O sistema não linear resultante é resolvido pelo método de Newton-Raphson e se discute um exemplo de aplicação da formulação desenvolvida.

**Palavras-chave:** Ligações deslizantes, Dinâmica não linear, Método dos Elementos Finitos Posicional.

## **1 Introdução**

A literatura sobre análise dinâmica de estruturas e mecanismos flexíveis através do Método dos Elementos Finitos (MEF) é um vasto campo de estudo dentro da Mecânica Computacional. Motivada fortemente pela evolução que a tecnologia dos materiais trouxe ao permitir estruturas mais esbeltas e flexíveis, diversas formulações que consideram deslocamentos e giros finitos vem sendo desenvolvidas. Em particular, a consideração de partes móveis dentro dos corpos, na forma de ligações deslizantes, permite a modelagem de diversas aplicações nas indústrias civil, mecânica e aeroespacial como, por exemplo: antenas de satélites, braços robóticos e guindastes, estruturas apertadas como as formadas por elementos pré-moldados, o acoplamento entre veículos e pontes, dentre outras.

Dessa forma, neste estudo apresenta-se o desenvolvimento matemático e os resultados da implementação de uma formulação dinâmica não linear geométrica aplicada para consideração de ligações deslizantes em estruturas e mecanismos tridimensionais. Para tanto é utilizada como base uma descrição Lagrangeana total do método dos elementos finitos em sua abordagem posicional desenvolvida nos trabalhos de Coda e Paccola [1] e Coda, Paccola e Sampaio [2] para elementos de pórtico espacial e casca. Esta formulação emprega posições e vetores generalizados como parâmetros nodais ao contrário de deslocamentos e rotações utilizados usualmente. Com essa escolha de graus de liberdade evita-se o uso de formulações mais complexas para tratamento dos giros finitos, simplificando os desenvolvimentos.

Diferentemente do que é proposto neste trabalho, as formulações mais disseminadas para análise dinâmica de ligações deslizantes pelo MEF são baseadas na abordagem Lagrangeana atualizada, em particular formulações corrotacionais como nos trabalhos de Jelenic e Crisfield [3], Ibrahimbegovic e Taylor [4] e Belytschko e Glaum [5]. Além disso, a consideração dos pares cinemáticos é feita por formalismos da dinâmica de multicorpos (Bauchau [6], Cardona, Géradin e Doan [7] e Géradin e Cardona [8]), os quais se baseiam na mecânica dos corpos rígidos para estender a teoria linear para referenciais intermediários móveis. A consideração de pequenas deformações nesses referenciais leva à uma relação deslocamento-deformação inexata acarretando acúmulo de erros em processos longos de atualização numérica (Pai, Chapman e Feng [9] e Pai [10]). Além disso, como o sistema de referência não é o material, a matriz de massa varia com a orientação do referencial levando à necessidade de esquemas de integração temporal especialmente desenvolvidos para estas abordagens como nos trabalhos de Mamouri, Hammadi e Ibrahimbegović [11], Simo, Tarnow e Wong [12] e Pimenta, Campello e Wriggers [13].

Para descrição dos materiais emprega-se o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff que relaciona a medida de deformação objetiva de Green-Lagrange com a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. A obtenção das equações do movimento é feita pelo Princípio da Energia Total Estacionária no qual são introduzidos multiplicadores de Lagrange para impor as equações de restrição cinemática que descrevem as ligações deslizantes. Estas equações relacionam os parâmetros nodais de um elemento chamando deslizante com o elemento ativo da sua trajetória.

Dada a presença de restrições no sistema de equações, adota-se o método  $\alpha$ -generalizado para desenvolver a marcha no tempo. Este é capaz de dissipar numericamente de forma controlada as altas frequências indesejáveis relacionadas às restrições impostas, ao mesmo tempo em que preserva as baixas frequências importantes para a resposta mecânica. Por fim o sistema não linear resultante é resolvido pelo método de Newton-Raphson e se discute um exemplo de aplicação da formulação desenvolvida.

## **2 Equações Não Lineares Geométricas do Movimento com Restrições**

O procedimento geral para obtenção das equações do movimento do sistema mecânico-estrutural contendo restrições é apresentado nesta seção. Nas seções subsequentes são apresentados os detalhes das cinemáticas dos elementos finitos empregados e a equação de restrição cinemática para a ligação deslizante desenvolvida. A abordagem variacional adotada para descrever o comportamento

não linear geométrico dos sólidos em um ambiente Lagrangeano total é o Princípio da Energia Total Estacionária conforme utilizado em Siqueira e Coda [14], por exemplo.

## 2.1 Equilíbrio dinâmico não linear

A energia total do sistema compreende a energia de deformação e os potenciais dos carregamentos externos além da energia cinética e uma possível dissipação devido ao amortecimento e é escrita como:

$$\Pi = \int_{V_0} u(\mathbf{E}(\vec{Y})) dV_0 - \vec{F} \cdot \vec{Y} - \int_{s_0} \vec{q} \cdot \vec{y} ds_0 + \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{\vec{y}} \cdot \dot{\vec{y}} dV_0 + \mathcal{Q}(\vec{Y}), \quad (1)$$

nesta expressão o vetor  $\vec{Y}$  reúne todos os parâmetros nodais utilizados para descrever a cinemática dos elementos finitos,  $u$  é a energia de deformação específica (por unidade de volume) escrita aqui em função do tensor de deformação de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$ ,  $\vec{y}$  e  $\dot{\vec{y}}$  são os vetores de posições e velocidade dos pontos materiais e  $\vec{F}$  e  $\vec{q}$  representam as cargas externas conservativas concentradas e distribuídas, respectivamente. Para o elemento finito de casca,  $s_0$  representa a superfície média enquanto no pórtico espacial é a sua linha de referência. Devido ao aspecto Lagrangeano total da formulação,  $s_0$  se refere à configuração inicial do corpo do mesmo modo que a densidade de massa  $\rho_0$  e o volume  $V_0$ . A parcela  $\mathcal{Q}$  indica a energia que é dissipada pelo sistema devido ao amortecimento viscoso externo, esta não pode ser escrita explicitamente, mas sua variação é conhecida conforme indicam Gurtin, Fried e Anand [15].

No equilíbrio a energia total expressa pela Eq. (1) deve ser estacionária para qualquer variação da posição atual do corpo. Assim, é necessário que:

$$\delta \Pi = 0, \quad (2)$$

onde o símbolo  $\delta$  indica variação.

Como as variáveis que descrevem o sistema estão reunidas em  $\vec{Y}$ , a variação indicada em (2) pode ser desenvolvida como:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \int_{V_0} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} - \int_{s_0} \vec{q} \cdot \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} ds_0 + \int_{V_0} \rho_0 \frac{d\dot{\vec{y}}}{dt} \cdot \dot{\vec{y}} \cdot \delta t dV_0 + \\ + \int_{V_0} c \rho_0 \dot{\vec{y}} \cdot \delta \vec{y} dV_0 = 0 \end{aligned}, \quad (3)$$

onde a variação da energia dissipada foi introduzida diretamente na sua forma variacional resultando em um amortecimento do tipo Rayleigh proporcional à massa com coeficiente  $c$ , em analogia ao realizado em Siqueira e Coda [14]. Sabendo que  $\dot{\vec{y}} \cdot \delta t = \delta \vec{y}$ , o núcleo da variação da energia cinética se torna  $\rho_0 \ddot{\vec{y}} \cdot \delta \vec{y}$ . Além disso, devido à propriedade do conjugado energético, Ogden [16], a derivada da energia de deformação específica para a medida de deformação de Green resulta no tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie  $\mathbf{S}$ . Considerando estas observações, chega-se em:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} - \int_{s_0} \vec{q} \cdot \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} ds_0 + \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\vec{y}} \cdot \delta \vec{y} dV_0 + \\ + \int_{V_0} c \rho_0 \dot{\vec{y}} \cdot \delta \vec{y} dV_0 = 0 \end{aligned}. \quad (4)$$

Da equação anterior fica claro que, para a solução do sistema mecânico por meio de elementos finitos, a cinemática de cada elemento deve ser introduzida para resolver a variação da posição dos pontos materiais. A cinemática dos elementos, descrita através das suas funções de mapeamento, será apresentada posteriormente, todavia, a Eq. (4) na formulação posicional empregada neste trabalho pode ser escrita de uma maneira geral como:

$$\delta \Pi = \vec{F}^{\text{int}} \cdot \delta \vec{Y} - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} = 0, \quad (5)$$

na qual a primeira integral indicada na Eq. (4) representa as forças internas agrupadas no vetor  $\vec{F}^{\text{int}}$  e as cargas concentradas e distribuídas (como nodais equivalentes) são agrupadas no mesmo vetor  $\vec{F}$ , por simplicidade. A matriz de massa  $\mathbf{M}$  é constante, como se espera de uma formulação Lagrangeana total, e é indicada pelas Eq. (39) e (41), como também a matriz de amortecimento proporcional à massa  $\mathbf{D} = c\mathbf{M}$ .

Como as variações  $\delta\vec{Y}$  são arbitrárias, estas podem ser eliminadas da Eq. (5) chegando-se às equações do movimento (equilíbrio dinâmico não linear geométrico) sem restrições como:

$$\vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}} = \vec{0}, \quad (6)$$

nesta,  $\dot{\vec{Y}}$  e  $\ddot{\vec{Y}}$  são os vetores de velocidade e aceleração dos parâmetros nodais.

## 2.2 Introdução de restrições

Para introduzir as restrições cinemáticas das ligações deslizantes, a metodologia empregada anteriormente pode ser estendida ao entender-se o Princípio da Energia Total Estacionária como uma técnica de otimização irrestrita, desenvolvida através do cálculo variacional e aplicada em problemas da dinâmica dos sólidos, na qual a energia total do sistema mecânico é minimizada. Dessa forma, quando restrições cinemáticas são adicionadas ao sistema pode-se interpretar a busca da solução como um problema de otimização restrito.

Diversas metodologias podem ser aplicadas para estabelecer a solução de um sistema restrito. Neste trabalho empregam-se multiplicadores de Lagrange como método de imposição das restrições. Além disso, as aplicações aqui apresentadas limitam-se a restrições holonômicas, isto é, as equações de restrição que são escritas somente em função das variáveis que definem o problema,  $\vec{Y}$ , e também, possivelmente, de maneira explícita do tempo. Pode-se escrever o vetor que agrupa as diversas equações de restrição holonômicas  $\vec{c}$  introduzidas ao sistema como:

$$\vec{c}(\vec{Y}, t) = \vec{0}, \quad (7)$$

onde, agora entende-se que o vetor  $\vec{Y}$  agrupa, além dos parâmetros nodais, quaisquer variáveis adicionais introduzidas pela própria equação de restrição.

Dessa forma, estende-se o Princípio da Energia Total Estacionária para o caso com restrições somando-se à expressão da energia total, Eq. (1), um potencial de restrição adicional denominado  $\mathcal{C}$  e aplicando-se a condição de estacionariedade, Eq. (2). Para o método dos multiplicadores de Lagrange, este potencial tem a forma:

$$\mathcal{C} = \vec{\lambda} \cdot \vec{c}, \quad (8)$$

na qual o vetor  $\vec{\lambda}$  reúne os multiplicadores para cada equação de restrição. Como estes representam novos graus de liberdade do sistema, escreve-se a variação do potencial de restrição, Eq. (8), em função dos parâmetros nodais e dos multiplicadores como:

$$\delta\mathcal{C} = \delta\vec{Y} \cdot \nabla\vec{c} \cdot \vec{\lambda} + \delta\vec{\lambda} \cdot \vec{c} = \left\{ \delta\vec{Y} \quad \delta\vec{\lambda} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \nabla\vec{c} \cdot \vec{\lambda} \\ \vec{c} \end{array} \right\} = \left\{ \delta\vec{Y} \quad \delta\vec{\lambda} \right\} \cdot \vec{F}^{\text{res}}, \quad (9)$$

sendo  $\nabla\vec{c}$  o gradiente do vetor de restrição, isto é, sua matriz Jacobiana, e  $\vec{F}^{\text{res}}$  o vetor que representa as forças que impõem as restrições ao sistema advindo do potencial de restrições introduzido.

Considerando a arbitrariedade das variações na equação anterior junto à Eq. (5), obtêm-se as equações do movimento restritas (equilíbrio dinâmico não linear geométrico com restrições) como:

$$\vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}} + \vec{F}^{\text{res}} = \vec{0}. \quad (10)$$

Embora o método dos multiplicadores introduza mais incógnitas ao sistema, a equação de restrição é imposta de forma exata, sem dependência de qualquer parâmetro adicional como em métodos que dependem de coeficientes de penalização. Além disso, os multiplicadores possuem uma representação mecânica como a força interna necessária para que a restrição seja imposta e, a depender da expressão da equação de restrição e dos graus de liberdade associados, é possível relacioná-los a entidades mecânicas como força ou momento.

### 3 Integração Temporal

Para a integração temporal das equações não lineares do movimento é possível utilizar-se de algoritmos de marcha no tempo largamente empregadas na dinâmica linear de estruturas, como o de Newmark [17], por exemplo. Isto porque a formulação empregada tem uma descrição Lagrangeana total do movimento a qual origina matrizes de massa constantes devido estar sempre relacionada ao referencial da configuração inicial, que é inercial. Este é um procedimento análogo ao que é feito em análises não lineares físicas nas quais a força inercial pode ser calculada por uma matriz de massa constante e as forças internas são dependentes da configuração atual do sólido. Os trabalhos de Simo e Vu-Quoc [18,19] e ainda Paultre [20] esclarecem a aplicação dos métodos clássicos de integração temporal direta em sistemas não lineares.

Mesmo sendo teoricamente possível empregar estes integradores temporais clássicos, a introdução das equações de restrições cinemáticas ao sistema mecânico-estrutural pode dificultar a solução da marcha no tempo a depender da formulação adotada [3,21–23]. Em particular o uso de multiplicadores de Lagrange, mesmo em análises lineares, pode levar à instabilidade da resposta, necessitando de um tratamento particular. Conforme explicam Géradin e Cardona [8], isso se deve ao fato dos multiplicadores introduzirem equações algébricas, Eq. (7), em um sistema de equações diferenciais, Eq. (6), que para o caso particular da dinâmica dos sólidos flexíveis possuem ainda a peculiaridade de serem rígidas. Como os multiplicadores de Lagrange não possuem massa associada, estes estão relacionados com frequências de vibração (autovalores) infinitos que acabam prejudicando a resposta.

Uma solução possível para este entrave é a introdução de dissipação numérica controlada no integrador temporal, favorecendo a estabilidade da resposta, tanto em relação a filtrar os altos modos de vibração próprios do sistema de equações diferenciais rígidas quanto às frequências oriundas das restrições impostas pelos multiplicadores.

Com esse intuito, adota-se neste trabalho o método  $\alpha$ -generalizado proposto por Chung e Hulbert [24] o qual é capaz de filtrar altos modos de vibração ao introduzir parâmetros adicionais relacionados aos instantes de tempo nos quais as parcelas de força da equação do movimento são equilibradas. O método  $\alpha$ -generalizado, como o de Newmark, é um método de integração direto, implícito e de um passo somente. Para seu emprego, reescreve-se a equação de equilíbrio, equação (10), para o instante de tempo auxiliar  $t+1-\alpha_f$ , com exceção da força inercial a qual é equilibrada em um instante  $t+1-\alpha_m$ , resultando em:

$$\vec{F}_{t+1-\alpha_f}^{\text{int}} - \vec{F}_{t+1-\alpha_f} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_{t+1-\alpha_m} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}}_{t+1-\alpha_f} + \vec{F}_{t+1-\alpha_f}^{\text{res}} = \vec{0}. \quad (11)$$

Utiliza-se uma combinação linear do tipo:

$$d_{t+1-\alpha} = (1-\alpha)d_{t+1} + \alpha d_t, \quad (12)$$

para representar uma variável  $d$  qualquer no instante de equilíbrio a partir dos seus valores no instante atual  $d_{t+1}$  e no instante passado  $d_t$ . O valor  $\alpha$  pode representar tanto  $\alpha_f$  quanto  $\alpha_m$ .

Substituindo na Eq. (11) as forças equilibradas nos instantes de tempo auxiliares pela respectiva combinação linear de cada uma, Eq. (12), obtém-se:

$$\begin{aligned} & (1-\alpha_f)\vec{F}_{t+1}^{\text{int}} + \alpha_f\vec{F}_t^{\text{int}} - (1-\alpha_f)\vec{F}_{t+1} - \alpha_f\vec{F}_t + (1-\alpha_m)\mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_{t+1} + \alpha_m\mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_t + \\ & + (1-\alpha_f)\mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}}_{t+1} + \alpha_f\mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}}_t + (1-\alpha_f)\vec{F}_{t+1}^{\text{res}} + \alpha_f\vec{F}_t^{\text{res}} = \vec{0} \end{aligned} \quad (13)$$

As aproximações do método de Newmark para velocidade e aceleração dos parâmetros nodais escrita para um incremento de tempo  $\Delta t$ , com seus parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$ , são dadas por:

$$\vec{Y}_{t+1} = \vec{Y}_t + \Delta t \dot{\vec{Y}}_t + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\vec{Y}}_t + \beta \ddot{\vec{Y}}_{t+1} \right] \quad (14)$$

e

$$\dot{\vec{Y}}_{t+1} = \dot{\vec{Y}}_t + \Delta t (1-\gamma) \ddot{\vec{Y}}_t + \gamma \Delta t \ddot{\vec{Y}}_{t+1} \quad (15)$$

e são aplicadas à Eq. (13) para escrever a aceleração e velocidade do instante de tempo atual como função da posição atual e de valores do instante anterior, resultando em:

$$(1 - \alpha_f)(\vec{F}_{t+1}^{\text{int}} + \vec{F}_{t+1}^{\text{res}} - \vec{F}_{t+1}) + \left[ \frac{(1 - \alpha_m)}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1 - \alpha_f)\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{D} \right] \vec{Y}_{t+1} + \vec{P}_t = \vec{0} \quad (16)$$

com o vetor que agrupa os termos do instante de tempo anterior dado por:

$$\vec{P}_t = \alpha_f (\vec{F}_t^{\text{int}} + \vec{F}_t^{\text{res}} - \vec{F}_t) + \alpha_m \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_t - (1 - \alpha_m) \mathbf{M} \cdot \vec{T}_t + \alpha_f \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}}_t + (1 - \alpha_f) \mathbf{D} \cdot \vec{R}_t \quad (17)$$

sendo,

$$\vec{T}_t = \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\vec{Y}}_t + \frac{\dot{\vec{Y}}_t}{\beta \Delta t} + \frac{\vec{Y}_t}{\beta \Delta t^2} \quad \text{e} \quad \vec{R}_t = \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\vec{Y}}_t + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\vec{Y}}_t - \frac{\gamma \vec{Y}_t}{\beta \Delta t}. \quad (18)$$

No final de passo de tempo a velocidade e a aceleração devem ser calculadas a partir das expressões de Newmark que desenvolvidas, resultam em:

$$\dot{\vec{Y}}_{t+1} = \frac{\gamma \vec{Y}_{t+1} - \vec{R}_t}{\beta \Delta t} \quad \text{e} \quad \ddot{\vec{Y}}_{t+1} = \frac{\vec{Y}_{t+1} - \vec{T}_t}{\beta \Delta t^2}. \quad (19)$$

Além disso, a aceleração inicial pode ser calculada a partir da Eq. (10) avaliada no instante inicial como:

$$\ddot{\vec{Y}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\vec{F}_0 - \vec{F}_0^{\text{int}} - \vec{F}_0^{\text{res}} - \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}}_0). \quad (20)$$

Pode-se observar que o método  $\alpha$ -generalizado possui quatro parâmetros: dois deles originários das aproximações de Newmark e outros dois que localizam o equilíbrio das parcelas de força em determinado instante de tempo. Adotando-se  $\alpha_m = \alpha_f = 0$  o método dá origem a família de aproximações de Newmark. Diferentes combinações de parâmetros recaem ainda em outros métodos conforme notam Chung e Hulbert [24]. De maneira a apresentar uma combinação ótima da dissipação entre altas e baixas frequências, isto é, maximizar a dissipação de modos mais altos e minimizá-la para os modos fundamentais, os autores recomendam calcular os parâmetros  $\alpha$  como:

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad \text{e} \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}, \quad (21)$$

sendo  $\rho_\infty \in [0, 1]$  um valor adotado para o raio espectral da região de altas frequências. Sendo o raio espectral uma medida de dissipação numérica, quando este é igual a unidade não é introduzido efeito dissipativo ao sistema e quando este é nulo ocorre o caso de aniquilação assintótica, isto é, as altas frequências são aniquiladas após um passo de tempo.

Para que o método possua precisão de segunda ordem (para o caso linear) e maximização da dissipação de altas frequências, os outros dois parâmetros devem respeitar as seguintes relações, respectivamente:

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2. \quad (22)$$

Dessa forma, observa-se que, apesar de apresentar quatro parâmetros, pode-se utilizar o método com uma combinação ótima de dissipação entre altas e baixas frequências ao se definir somente a quantidade de dissipação da região de altas frequências através de um único parâmetro  $\rho_\infty$ .

É importante ressaltar que o método  $\alpha$ -generalizado é incondicionalmente estável (para o caso linear sem restrições) quando se respeita a relação [24]:

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2}, \quad (23)$$

todavia, particularmente em problemas que apresentam restrições introduzidas através do método dos multiplicadores de Lagrange, de acordo com Géradin e Cardona [8], para estabilidade incondicional do método  $\alpha$ -generalizado (no caso linear) deve-se ter além de (23) a condição  $\alpha_m \neq \alpha_f$  o que efetivamente impede o uso do caso sem dissipação numérica.

## 4 Solução do Sistema Não Linear

Nota-se dos desenvolvimentos anteriores que a equação do movimento é não linear em relação a variável  $\vec{Y}$  que agrupa todos os parâmetros nodais. Assim, de modo a aplicar o método de Newton-Raphson para solução do sistema não linear, reescreve-se a equação de equilíbrio já discretizada no tempo, conforme expressa em (16), com o vetor de desbalanceamento mecânico  $\vec{g}$  (resíduo do método de solução) no instante atual como:

$$\vec{g}_{t+1} = (1 - \alpha_f) (\vec{F}_{t+1}^{\text{int}} + \vec{F}_{t+1}^{\text{res}} - \vec{F}_{t+1}) + \left[ \frac{(1 - \alpha_m)}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1 - \alpha_f) \gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{D} \right] \vec{Y}_{t+1} + \vec{P}_t = \vec{0}. \quad (24)$$

Expandindo-se a igualdade anterior em série de Taylor truncada em primeira ordem chega-se ao seguinte sistema linear de equações para uma solução tentativa  $\{\vec{Y}_{t+1}^0, \vec{\lambda}_{t+1}^0\}^t$ :

$$\begin{Bmatrix} \Delta \vec{Y}_{t+1} \\ \Delta \vec{\lambda}_{t+1} \end{Bmatrix} = -(\mathbf{H}_{t+1})^{-1} \cdot \vec{g}(\vec{Y}_{t+1}^0, \vec{\lambda}_{t+1}^0) \quad (25)$$

no qual  $\mathbf{H}_{t+1} = \nabla \vec{g}_{t+1}$  é a matriz Hessiana, ou operador tangente do método de Newton.

Resolvendo-se o sistema linear, Eq. (25), encontram-se as correções  $\Delta \vec{Y}_{t+1}^0$  e  $\Delta \vec{\lambda}_{t+1}^0$  da solução tentativa a qual é atualizada iterativamente até que o erro seja respeitado para uma dada tolerância. Para isso utiliza-se a norma de posição  $\|\Delta \vec{Y}\| / \|\vec{X}\|$ , sendo  $\vec{X}$  o vetor de parâmetros nodais na configuração inicial.

A matriz hessiana pode ser desenvolvida de forma compacta, respeitando-se a organização dos graus de liberdade do sistema, como:

$$\mathbf{H}_{t+1} = (1 - \alpha_f) (\nabla \vec{F}_{t+1}^{\text{int}} + \nabla \vec{F}_{t+1}^{\text{res}}) + \frac{(1 - \alpha_m)}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1 - \alpha_f) \gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{D}, \quad (26)$$

nesta,  $\nabla \vec{F}_{t+1}^{\text{int}}$  representa a parcela estática da matriz tangente associada ao potencial de energia de deformação dos elementos finitos e  $\nabla \vec{F}_{t+1}^{\text{res}}$  representa a parte associada ao potencial de restrições cinemáticas impostas.

A parcela estática pode ser expressa por:

$$\nabla \vec{F}_{t+1}^{\text{int}} = \frac{\partial \vec{F}_{t+1}^{\text{int}}}{\partial \vec{Y}} \Big|_{t+1} = \int_{V_0} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \Big|_{t+1} : \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \Big|_{t+1} + \mathbf{S}_{t+1} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \Big|_{t+1} \right) dV_0 \quad (27)$$

na qual o tensor constitutivo elástico de quarta ordem para o material de Saint-Venant-Kirchhoff isotrópico adotado é dado por, Holzapfel [25]:

$$\mathfrak{C} = \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mu \mathbf{II}, \quad (28)$$

onde os parâmetros  $\mu$  e  $\nu$  reproduzem o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson em pequenas deformações. Os tensores identidade de segunda e quarta ordens são representados por  $\mathbf{I}$  e  $\mathbf{II}$ , respectivamente e  $\otimes$  representa produto tensorial. As derivadas da deformação de Green na Eq. (27) são dependentes dos parâmetros escolhidos para descrever a cinemática particular de um elemento finito, como descrito no item seguinte, e vêm das Eq. (33), (38) e (40). Maiores detalhes podem ser encontrados em [1,2].

A parcela da hessiana referente às forças de restrição pode ser desenvolvida a partir da Eq. (9) como:

$$\nabla \vec{F}_{t+1}^{\text{res}} = \frac{\partial \vec{F}_{t+1}^{\text{res}}}{\partial \{\vec{Y}, \vec{\lambda}\}} \Big|_{t+1} = \begin{bmatrix} \vec{\lambda} \cdot \nabla (\nabla \vec{c}) & \nabla \vec{c} \\ (\nabla \vec{c})^t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Big|_{t+1}, \quad (29)$$

sendo  $\nabla(\nabla\bar{c})$  um tensor de ordem 3 que pode ser entendido como o conjunto que agrupa as matrizes hessianas de cada equação de restrição  $c_i$  e  $\mathbf{0}$  uma matriz nula. Conhecidas as equações de restrição cinemática, apresentadas posteriormente para as ligações deslizantes, pode-se calcular as derivadas indicadas na equação anterior.

## 5 Cinemática dos Elementos Finitos Posicionais

Para calcular o campo de deformações, o movimento dos pontos materiais que compõem o corpo entre as configurações inicial e atual deve ser estabelecido. Conforme os trabalhos de Bonet et. al [26] e Coda e Paccola [27], na abordagem posicional do método dos elementos finitos a função mudança de configuração (ou movimento) é obtida de uma composição entre dois mapeamentos baseados em domínios de referência adimensionais como:

$$\bar{f} = \bar{f}^1 \circ (\bar{f}^0)^{-1}, \quad (30)$$

onde  $\bar{f}^1$  representa o mapeamento do espaço adimensional para a configuração atual do corpo e  $\bar{f}^0$  para a configuração inicial. Como a expressão da função mudança de configuração não precisa ser explicitamente conhecida para definir a medida de deformação, mas somente seu gradiente, da Eq. (30) escreve-se:

$$\mathbf{A} = \text{Grad}(\bar{f}) = \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1}, \quad (31)$$

na qual  $\mathbf{A}^1$  e  $\mathbf{A}^0$  são valores numéricos calculados nos pontos de integração. Ambos tensores são obtidos das derivadas para as variáveis adimensionais dos respectivos mapeamentos:

$$\mathbf{A}^0 = \frac{\partial \bar{f}^0}{\partial \bar{\xi}} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^1 = \frac{\partial \bar{f}^1}{\partial \bar{\xi}}. \quad (32)$$

Conhecido o gradiente do movimento, a medida de deformação objetiva de Green-Lagrange empregada neste trabalho pode ser escrita como, Ogden [16]:

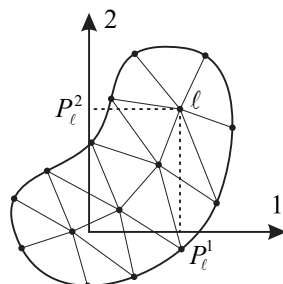
$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}), \quad (33)$$

onde  $\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}$  é o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green.

Apresenta-se brevemente a seguir a cinemática dos elementos finitos de casca e pórtico espacial na formulação posicional através das expressões particulares dos seus mapeamentos. Maiores detalhes podem ser adquiridos nas referências indicadas.

### 5.1 Pórtico Espacial

Para descrever a cinemática do elemento finito de pórtico espacial utilizam-se de posições, ao invés dos deslocamentos, e de vetores generalizados, no lugar de giros finitos de forma a evitar seu tratamento não trivial no espaço. Com estes parâmetros é possível definir um ponto no domínio do elemento a partir da localização da sua linha de referência. Esta linha de referência pode se encontrar em qualquer ponto do plano que contém a seção transversal da barra já que a seção também é discretizada por uma malha auxiliar de elementos finitos (Figura 1). Assim, pode-se simular seções transversais de geometria quaisquer.



**Figura 1 – Discretização da seção transversal com os eixos sobre a linha de referência**



A Figura 2 apresenta o mapeamento do elemento com os dois vetores generalizados que definem o plano da seção transversal. Na configuração inicial assume-se que os vetores formam uma base ortonormal juntamente com o versor tangente à linha de referência, enquanto que após a deformação estes não são necessariamente unitários ou ortogonais. Isso caracteriza uma cinemática um pouco mais geral do que a cinemática de Reissner para barras já que este elemento também é capaz de representar mudanças nas dimensões da seção transversal através da liberdade de deformação do par de vetores generalizados. Adicionalmente, como será apresentado a seguir, os efeitos de torção também serão considerados na cinemática da barra para que se possa adotar uma lei constitutiva tridimensional completa dado que a seção transversal é inteiramente livre para se deformar.

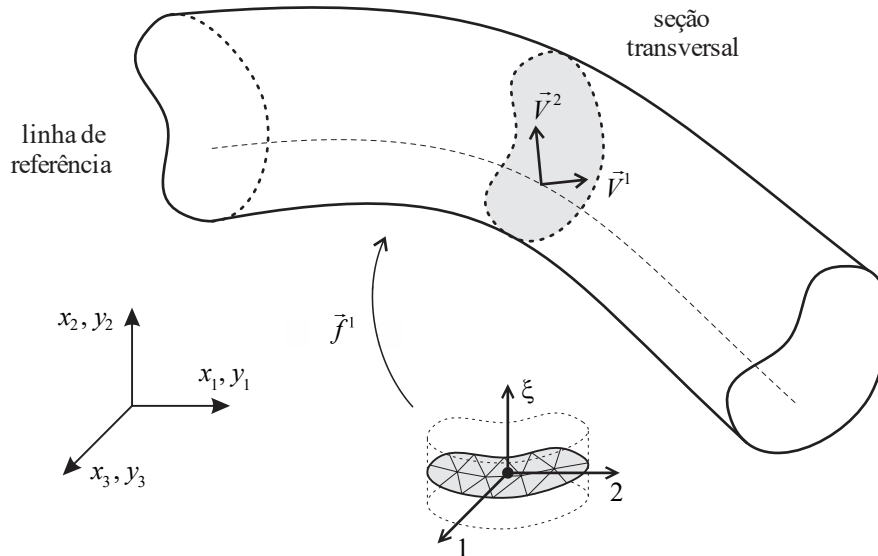


Figura 2 – Mapeamento do elemento de pórtico espacial

Sabendo-se disso, o mapeamento da configuração atual é escrito de forma compacta como:

$$f_i^1 = y_i = \phi_\ell(\xi) Y_i^\ell + \left\{ \varphi_k(\eta_1, \eta_2) P_k^j + \phi_m(\xi) A_j^m \left[ \varphi_k(\eta_1, \eta_2) P_k^{(j)} \right]^2 \right\} \phi_\ell(\xi) V_i^{j\ell}. \quad (34)$$

Na Eq. (34)  $Y_i^\ell$  representam as coordenadas atuais dos nós  $\ell$  da linha de referência para as direções  $i = 1, 2, 3$  e  $V_i^{j\ell}$  os vetores generalizados das duas direções  $j = 1, 2$  geradoras da seção transversal. Em notação indicial não há soma para a variável indicada entre parêntesis.

As funções de forma da linha de referência são designadas por  $\phi_\ell(\xi)$ , sendo  $\xi$  sua variável adimensional. A discretização da seção transversal é feita por meio de elementos triangulares os quais não envolvem variáveis nodais adicionais, mas servem somente para definição da geometria e propriedade materiais da seção, sendo  $\varphi_k(\eta_1, \eta_2)$  suas funções de forma,  $\eta_1$  e  $\eta_2$  suas coordenadas adimensionais e  $P_k^j$  as coordenadas dos nós  $k$  da malha da seção definidas nos eixos  $j$  (definidos pelos vetores generalizados) conforme ilustra a Figura 1.

Ainda na Eq. (34), os parâmetros  $A_j^m$  são introduzidos como enriquecimento da seção transversal de modo a evitar travamentos ao esforço cortante e volumétrico que ocorrem quando se utiliza a cinemática de Reissner e relações constitutivas tridimensionais completas conforme discutem Bischoff e Ramm [28]. Estes parâmetros representam taxas de variação lineares da deformação para as duas direções  $j$  sobre o plano da seção transversal.

Apesar da cinemática apresentada ser capaz de evitar travamentos ao esforço cortante e volumétrico, o travamento devido à torção pode ainda ocorrer em alguns problemas dado ao uso da relação constitutiva tridimensional completa. De modo a flexibilizar a seção transversal para esse esforço, introduz-se à sua cinemática o modo de empenamento unitário. Este modo de empenamento,

indicado por  $d$ , é obtido ao resolver o problema de torção linear de Saint-Venant na geometria inicial da malha auxiliar de elementos finitos que descreve a seção transversal, resultando em:

$$d = \varphi_q(\eta_1, \eta_2) D_q, \quad (35)$$

sendo  $D_q$  o vetor que contém os deslocamentos devido ao modo de empenamento unitário para todos os nós  $q$  da seção transversal.

Como o modo de empenamento representa o deslocamento dos pontos da seção transversal em uma direção fora do plano dessa seção utiliza-se dos vetores generalizados para se definir a direção do empenamento no espaço tridimensional como:

$$n_i = \epsilon_{jki} \phi_\ell(\xi) V_j^{1\ell} \phi_m(\xi) V_k^{2m} \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (36)$$

onde,  $n_i$  é o vetor que indica a direção do empenamento na configuração atual,  $\epsilon_{jki}$  é o símbolo de permutação e  $\ell$  e  $m$  se referem aos nós da linha de referência.

Nota-se que o modo de empenamento dado pela expressão (35) se refere ao valor unitário da solução do problema de torção de Saint-Venant para uma dada geometria da seção transversal, mas que de modo geral o empenamento varia ao longo da barra. Assim, introduz-se um parâmetro adicional  $W_p$ , referido como intensidade de empenamento, para cada nó  $p$  da linha de referência do elemento de pórtico, para que se possa escrever o deslocamento devido ao empenamento  $w_i$  de um ponto genérico do sólido como:

$$w_i = \varphi_q(\eta_1, \eta_2) D_q \left[ \epsilon_{jki} \phi_\ell(\xi) V_j^{1\ell} \phi_m(\xi) V_k^{2m} \right] \phi_p(\xi) W_p. \quad (37)$$

Finalmente, o mapeamento da configuração atual é obtido a partir de (34) e (37) como:

$$f_i^1 = y_i = \phi_\ell(\xi) Y_i^\ell + \left\{ \varphi_k(\eta_1, \eta_2) P_k^j + \phi_m(\xi) A_j^m \left[ \varphi_k(\eta_1, \eta_2) P_k^{(j)} \right]^2 \right\} \phi_\ell(\xi) V_i^{j\ell} + \varphi_q(\eta_1, \eta_2) D_q \left[ \epsilon_{jki} \phi_\ell(\xi) V_j^{1\ell} \phi_m(\xi) V_k^{2m} \right] \phi_p(\xi) W_p. \quad (38)$$

Ressalta-se que a malha auxiliar para a seção transversal não acrescenta graus de liberdade ao sistema já que a sua mudança de forma se faz exclusivamente pela a alteração dos vetores generalizados, das taxas de variação da deformação e da intensidade de empenamento em cada nó da linha de referência. Assim, cada nó do elemento de pórtico possui 12 graus de liberdade: três posições, seis componentes dos vetores generalizados, duas taxas de variação da deformação e a intensidade de empenamento. Nota-se que a formulação empregada utiliza mais graus de liberdade do que formulações baseadas em rotações finitas, todavia, os parâmetros adicionais permitem que o elemento reticulado seja descrito como um sólido, fornecendo mais informações a respeito do seu comportamento mecânico.

Em geral, as vibrações relativas aos parâmetros de enriquecimento da deformação da seção transversal não são tão importantes quanto os demais para a movimentação geral do corpo. Dessa forma, e também para se obter uma matriz de massa constante, desprezam-se estas variáveis na Eq. (38) quando do desenvolvimento da Eq. (6) resultando em uma matriz (sem os termos nulos) dada por:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{Y}} = \int_{V_0} \rho_0 \begin{bmatrix} \phi_n \phi_\ell & \varphi_k P_k^j \phi_n \phi_\ell \\ \varphi_k P_k^i \phi_n \phi_\ell & \varphi_k P_k^i (\phi_n \phi_\ell) \varphi_p P_p^j \end{bmatrix} dV_0 \cdot \left\{ \begin{matrix} \ddot{Y}_i^\ell \\ \ddot{V}_i^{j\ell} \end{matrix} \right\}, \quad (39)$$

onde o índice  $n$  está relacionado aos nós da linha de referência e  $t = 1, 2$  as direções no plano da seção transversal. Nota-se que os graus de liberdade de posição estão relacionados consistentemente com a inércia de translação e os vetores generalizados com a inércia de rotação do corpo.

O mapeamento da configuração inicial é análogo à Eq. (38) adotando-se nulos os parâmetros  $A_j^m$  e  $W_p$ . Maiores detalhes sobre este elemento finito podem ser encontrados nos trabalhos de Coda [29] e Coda e Paccola [1] e também em Coda e Paccola [30], em especial sobre o enriquecimento à torção.

## 5.2 Casca

Ao desenvolver-se a cinemática do elemento finito de casca utilizam-se parâmetros nodais análogos aos do pórtico espacial. As posições dos nós da superfície são empregadas para representar os deslocamentos translacionais, mas agora somente um vetor generalizado é suficiente para descrição dos giros de uma seção da casca. Além disso, uma taxa de variação linear da deformação é empregada de modo a evitar o travamento ao esforço cortante e volumétrico quando da lei constitutiva tridimensional completa adotada.

A partir da Figura 3 pode-se escrever o mapeamento de um ponto do domínio da casca na configuração atual a partir da sua superfície média como:

$$f_i^l = y_i = \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) Y_i^\ell + \frac{h_0}{2} \left[ \xi_3 + \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) A_\ell \xi_3^2 \right] \phi_k(\xi_1, \xi_2) V_i^{k1}, \quad (40)$$

onde,  $Y_i^\ell$  são as coordenadas atuais dos nós  $\ell$  da superfície de referência (adotada como a superfície média) para as direções  $i = 1, 2, 3$ ,  $V_i^{\ell 1}$  é o vetor generalizado medido a partir da superfície média e  $A_\ell$  representa o parâmetro de enriquecimento para taxa de deformação linear da espessura. Ainda,  $h_0$  é a espessura inicial do elemento,  $\phi_\ell(\xi_1, \xi_2)$  são as funções de forma do elemento triangular com suas variáveis adimensionais  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , e  $\xi_3$  é a coordenada adimensional na direção da espessura.

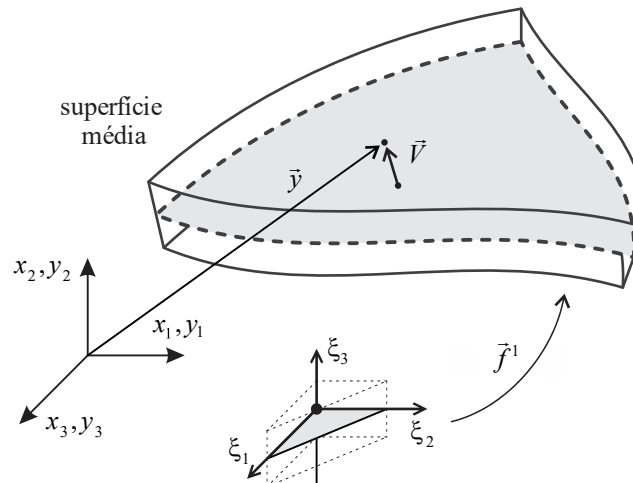


Figura 3 – Mapeamento do elemento de casca

Conforme apresentado para o elemento de pórtico espacial, o parâmetro de enriquecimento da deformação é desprezado quando se utiliza a expressão (40) para desenvolver-se a Eq. (6), resultando em uma matriz de massa constante escrita, sem os termos nulos, como:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{Y}} = \int_{V_0} \rho_0 \begin{bmatrix} \phi_\ell \phi_k & h_0 \xi_3 \phi_\ell \phi_k / 2 \\ h_0 \xi_3 \phi_\ell \phi_k / 2 & (h_0 \xi_3)^2 \phi_\ell \phi_k / 4 \end{bmatrix} dV_0 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \ddot{Y}_i^\ell \\ \ddot{V}_i^{\ell 1} \end{array} \right\}, \quad (41)$$

na qual  $k$  indica os nós da superfície da casca.

O mapeamento da configuração inicial se escreve da mesma forma que a Eq. (40) adotando-se nulos os parâmetros  $A_\ell$ . Nesta configuração os vetores generalizados são considerados unitários e ortogonais à superfície de referência, já que se conhecem as coordenadas dos nós do elemento. Já na configuração atual os vetores generalizados não serão necessariamente unitários nem ortogonais à superfície de referência, caracterizando, similarmente ao pórtico espacial, uma cinemática mais geral do que a Reissner-Mindlin para placas e cascas.

Este elemento finito de casca possui, então, 7 graus de liberdade em cada nó: três posições, três componentes do vetor generalizado e a taxa de variação da deformação na espessura. Maiores detalhes sobre o elemento finito de casca podem ser encontrados nos trabalhos de Coda e Paccola [31] e Coda, Paccola e Sampaio [2].

## 6 Ligações Deslizantes

Apresenta-se neste item as equações de restrição cinemática desenvolvidas para as ligações deslizantes entre elementos de pórtico e entre pórtico e casca. Para tanto, são utilizados os parâmetros nodais dos elementos finitos apresentados anteriormente quando formam um conjunto de um elemento denominado deslizante e outro elemento que compõe a trajetória do movimento.

A ligação deslizante espacial desenvolvida permite o movimento translacional entre um nó deslizante  $\hat{P}$  e seu ponto de contato  $\bar{P}$  sobre uma trajetória, sem impedir as rotações relativas entre os corpos. A geometria da trajetória é definida pela linha de referência dos elementos de pórtico espacial que a compõem. Além disso, é considerado que a trajetória pode possuir um perfil de rugosidade, isto é, um afastamento entre o nó deslizante e seu ponto de contato conforme ilustra a Figura 4. Utiliza-se no que segue a notação  $(\bar{\bullet})$  para identificar as variáveis relacionadas com os elementos da trajetória e  $(\hat{\bullet})$  para o elemento deslizante.

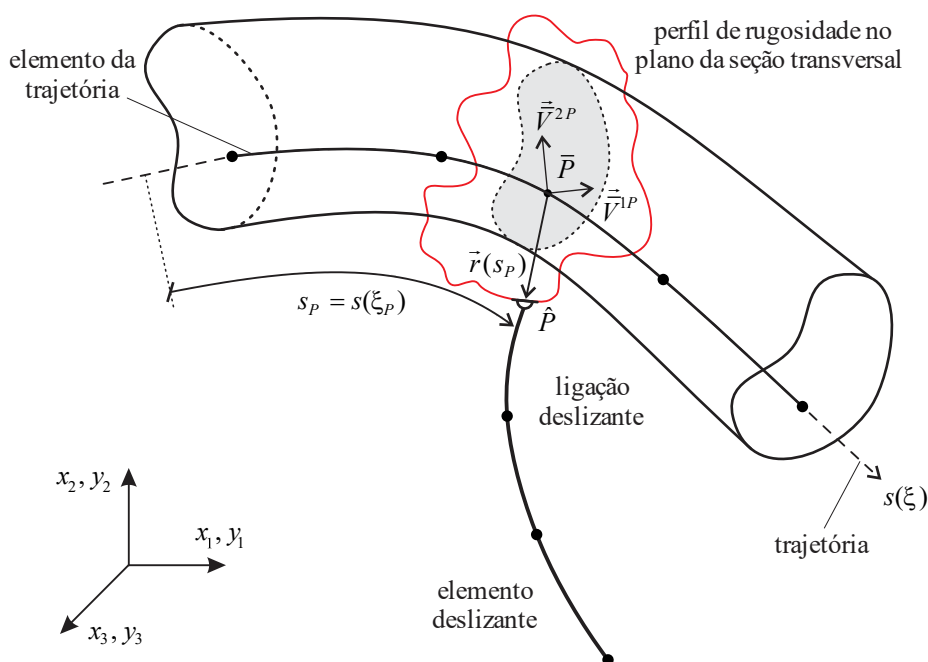


Figura 4 – Ligação deslizante espacial em um perfil de rugosidade arbitrário da seção transversal

Para definição de um perfil de rugosidade, como a trajetória se encontra no espaço tridimensional, o vetor de rugosidade  $\vec{r}(s)$  medido a partir do ponto de contato  $\bar{P}$  pode ser definido no plano da seção transversal do elemento da trajetória com o auxílio dos vetores generalizados por:

$$\vec{r}(s_p) = r_h^1(s_p)\bar{V}^1P + r_h^2(s_p)\bar{V}^2P, \quad (42)$$

sendo  $\bar{V}^1P$  e  $\bar{V}^2P$  os vetores geradores da seção transversal no ponto de contato e  $r_h^1(s)$  e  $r_h^2(s)$  as “alturas” do perfil de rugosidade na direção dos respectivos vetores como ilustrado na Figura 5. Nota-se que o vetor  $\vec{r}$ , que está localizado no espaço tridimensional, pertence ao plano da seção transversal.

Utilizando-se da geometria do elemento finito da trajetória pode-se escrever o vetor  $\vec{r}$  para o ponto de contato de forma compacta como:

$$r_i(s_p) = r_h^j(s_p)\phi_\ell(\xi_p)\bar{V}_i^{j\ell} \quad (i=1,2,3 \text{ e } j=1,2), \quad (43)$$

onde empregou-se a aproximação  $\bar{V}_i^{jP} = \phi_\ell(\xi_p)\bar{V}_i^{j\ell}$  para cada vetor  $j$ , sendo  $\phi_\ell$  as funções de forma para cada nó  $\ell$  da trajetória.

Percebe-se dessa maneira que o perfil de rugosidade depende da posição da junta na trajetória a partir das funções de altura de rugosidade  $r_h^j(s)$ , que são independentes da discretização, e que este

perfil também se deforma e gira acompanhando a movimentação do corpo sólido em concordância com sua cinemática.

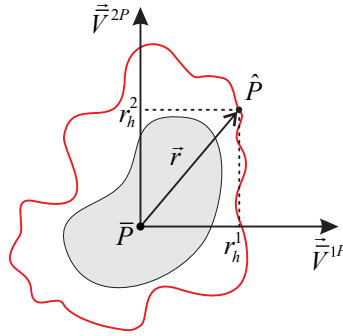


Figura 5 – Perfil de rugosidade definido a partir da seção transversal do elemento da trajetória

Conhecido o vetor de rugosidade, pode-se escrever as restrições cinemáticas entre os elementos sabendo-se que  $\hat{Y}_i^P = \bar{Y}_i^P + r_i$  e aproximando-se a posição de contato na trajetória por  $\bar{Y}_i^P = \phi_\ell(\xi_p)\bar{Y}_i^\ell$  resultando nas seguintes equações:

$$c_i = \hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_p)\bar{Y}_i^\ell - r_h^j(s_p)\phi_\ell(\xi_p)\bar{V}_i^{j\ell} = 0_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (44)$$

onde, para as três direções coordenadas  $\bar{Y}_i^\ell$  representa as posições de um nó  $\ell$  do elemento atual da trajetória interpoladas no ponto de contato adimensional  $\xi_p$ .

A variável  $s_p = s(\xi_p)$ , indicada na Figura 4, define a posição curvilínea de um ponto  $\bar{P}$  da trajetória e está relacionada com a sua coordenada adimensional  $\xi_p = \xi(s_p)$  a qual também varia durante o movimento. A relação entre essas variáveis é importante para o desenvolvimento do procedimento de solução e será apresentada em seguida.

Pode-se perceber que a restrição cinemática expressa pela Eq. (44) depende das posições e vetores do elemento de pórtico espacial da trajetória, da variável curvilínea, mas em relação ao elemento deslizante esta somente é função da posição do nó deslizante. Assim, como na abordagem do método dos elementos finitos empregada todos os elementos são descritos por suas posições nodais, esta mesma equação de restrição pode ser estendida para qualquer tipo de elemento finito espacial. Em relação ao uso em elementos de casca, deve-se considerar o conjunto de equações de restrição (44) para cada nó do elemento deslizante, Figura 6. Assim, para cada nó deslizante  $\hat{P}_k$ , pode-se escrever:

$$c_i^{P_k} = \hat{Y}_i^{P_k} - \phi_\ell(\xi_{P_k})\bar{Y}_i^\ell - r_h^j(s_{P_k})\phi_\ell(\xi_{P_k})\bar{V}_i^{j\ell} = 0_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (45)$$

onde  $k$  se refere aos nós deslizantes do elemento de casca.

## 6.1 Posição curvilínea e adimensional da ligação

A definição da variável curvilínea  $s_p = s(\xi_p)$  determinada diretamente pela atualização das variáveis no procedimento de solução do método de Newton-Raphson, é fundamental para a correta identificação da posição no perfil de rugosidade.

Entretanto, o cálculo da força de restrição e da matriz Hessiana dependem da variável adimensional  $\xi_p = \xi(s_p)$  que não é explicitamente determinada. Portanto, para sua obtenção, é preciso calcular  $\xi_p$  de modo iterativo para uma posição tentativa. Isso é feito definindo-se o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\mathcal{R}_i(\xi_{P_k}) = \hat{Y}_i^{P_k} - \phi_\ell(\xi_{P_k})\bar{Y}_i^\ell - r_h^j(s_{P_k})\phi_\ell(\xi_{P_k})\bar{V}_i^{j\ell} = 0_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (46)$$

o qual é exatamente a restrição cinemática presente na Eq. (45), obviamente com valores conhecidos de  $\hat{Y}_i^P$ ,  $\bar{Y}_i^\ell$  e  $s_p$ . Na Eq. (46)  $\mathcal{R}_i(\xi_p)$  representa o resíduo quando do processo iterativo para se determinar  $\xi_p$ .

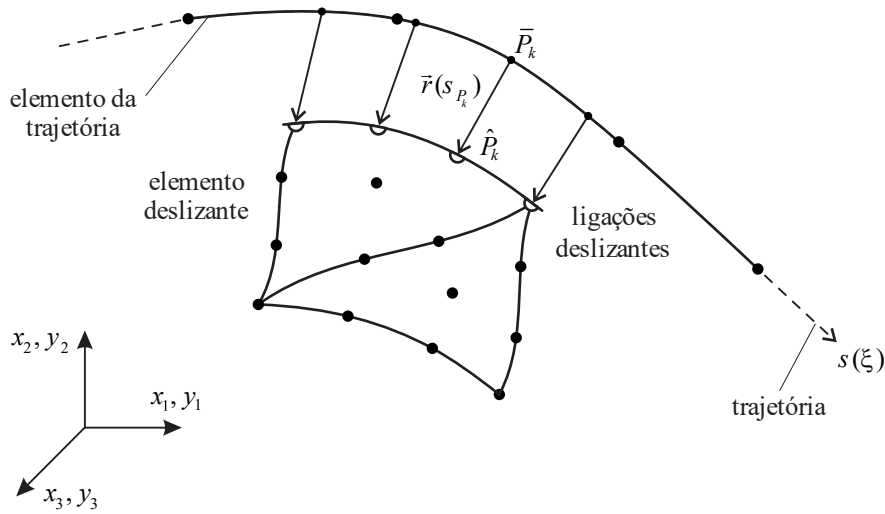


Figura 6 – Ligações deslizantes para elemento finito de casca

Como esse sistema é sobredeterminado, pode-se aplicar uma técnica de mínimos quadrados para sua solução, Nocedal e Wright [32]. Para tanto, a seguinte função objetivo positiva é definida:

$$p(\xi_p) = \frac{1}{2} [\mathcal{R}_i(\xi_p)]^2 = 0. \quad (47)$$

Como o método dos mínimos quadrados tenta determinar o menor resíduo, e, como a função objetivo é quadrática e positiva, a condição necessária para minimização é que  $\nabla p(\xi_p) = 0$  na solução. Para isso, a função objetivo pode ser expandida em série de Taylor de primeira ordem como:

$$p(\xi_p) \cong p(\xi_p^0) + \nabla p(\xi_p^0) \Delta \xi_p = 0, \quad (48)$$

sendo  $\xi_p^0$  um valor tentativa conhecido previamente. Assim, tem-se:

$$\nabla p(\xi_p) = \nabla p(\xi_p^0) + \nabla^2 p(\xi_p^0) \Delta \xi_p = 0. \quad (49)$$

Resulta desta expressão o método de Newton aplicado à um problema de minimização ao se determinar  $\Delta \xi_p$  por:

$$\Delta \xi_p = -\frac{\nabla p(\xi_p^0)}{\nabla^2 p(\xi_p^0)}, \quad (50)$$

e atualizar-se a variável incógnita por  $\xi_p = \xi_p^0 + \Delta \xi_p$  até que  $|\Delta \xi_p / \xi_p^0|$  respeite uma tolerância previamente estabelecida.

As derivadas da Eq. (50) são facilmente obtidas e dadas em função do vetor resíduo por:

$$\nabla p(\xi_p^0) = \vec{\mathcal{R}} \cdot \frac{d\vec{\mathcal{R}}}{d\xi}(\xi_p) \quad \text{e} \quad \nabla^2 p(\xi_p^0) = \frac{d\vec{\mathcal{R}}}{d\xi}(\xi_p) \cdot \frac{d\vec{\mathcal{R}}}{d\xi}(\xi_p) + \vec{\mathcal{R}} \cdot \frac{d^2\vec{\mathcal{R}}}{d\xi^2}(\xi_p). \quad (51)$$

Conhecido o valor da coordenada adimensional  $\xi_p$  para um valor de  $s_p$ , implícito nos valores de  $\hat{Y}_i^P$  e  $\bar{Y}_i^\ell$ , o processo global de solução prossegue normalmente. Nota-se que, conhecido o valor numérico da coordenada adimensional, a transição entre elementos da trajetória é direta quando este excede o domínio do espaço adimensional.

## 7 Exemplo - Pêndulo Deslizante

A Figura 7 apresenta um pêndulo de 1,0 m de comprimento, inicialmente orientado na direção positiva do eixo  $x$  com uma ligação deslizante no ponto B. Este pêndulo é livre para deslizar sobre uma trajetória modelada por 13 elementos finitos cúbicos de pórtico espacial. A trajetória é apoiada em A e B de forma que nesses pontos os três deslocamentos são restritos. Um pequeno trecho de 0,10 m existe após o apoio B para permitir a movimentação livre do pêndulo além deste ponto.

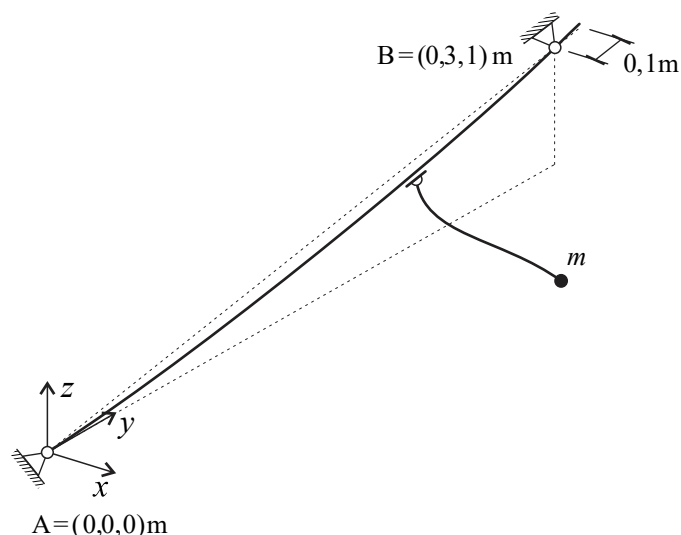


Figura 7 – Geometria do pêndulo

Este exemplo é apresentado para verificar as ligações deslizantes espaciais em duas configurações diferentes: uma junta cilíndrica, na qual o giro relativo entre o pêndulo e a trajetória é restringido, e uma junta esférica deslizante, na qual o giro relativo é livre. Para a junta esférica o pêndulo é modelado através de 10 elementos cúbicos de pórtico espacial de forma a possuir todos os giros livres na ligação por ter somente um ponto de contato, Figura 8 a). A junta cilíndrica é modelada por 20 elementos cúbicos de casca para que exista uma linha de contato com a trajetória de modo que o giro da conexão seja possível somente em torno desta linha, Figura 8 b).

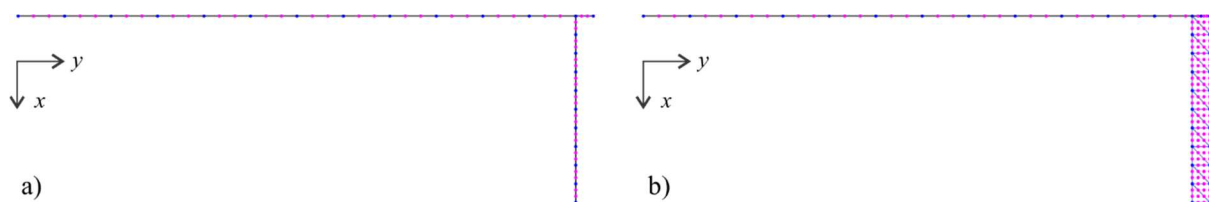


Figura 8 – Malhas para a) junta esférica deslizante e b) junta cilíndrica

O pêndulo e a sua trajetória são bastante flexíveis com módulo de elasticidade igual a 1,0 MPa, coeficiente de Poisson igual a 0,3 e densidade de 800,0 kg/m<sup>3</sup>. A seção transversal para trajetória e para o pêndulo é quadrada de lado igual a 10,0 cm. Ainda, uma massa concentrada  $m = 1,0$  kg existe na extremidade livre do pêndulo. No caso da discretização por elementos de casca a massa é uniformemente distribuída nos nós desta extremidade. A seção transversal para os elementos de pórtico foi discretizada com dois elementos planos triangulares de aproximação linear em sua malha auxiliar.

Inicialmente a trajetória é deformada por um carregamento estático ao longo do seu comprimento de 0,80 N/m na direção negativa do eixo  $z$ , o qual permanece por toda a análise. Após encontrada a posição estática deformada de equilíbrio da trajetória, o pêndulo é solto e submetido ao mesmo carregamento da trajetória em seu comprimento e a uma carga de 10,0 N na direção negativa do eixo  $z$  é aplicada na massa concentrada. Para a discretização com elementos de casca os mesmos carregamentos são apropriadamente distribuídos nos elementos. A simulação termina quando o



pêndulo atinge o final da trajetória. Para imposição das restrições foi empregado o método dos multiplicadores de Lagrange com o integrador temporal  $\alpha$ -generalizado com resolução temporal de 10,0 ms e raio espectral  $\rho_\infty = 0,9$ .

Pode-se observar na Figura 9 a evolução da posição curvilínea para as duas juntas, medida com sentido positivo para o mesmo sentido do movimento descendente do pêndulo (de B para A). Inicialmente nota-se que há um pequeno deslocamento negativo para a junta esférica deslizante impulsionada pelo movimento de quase queda livre da ponta do pêndulo, como pode ser visto claramente na Figura 10. Para a junta cilíndrica, embora o movimento de queda livre também exista, não há retorno da ligação dado ao tipo de restrição que esta impõe, o qual não é pontual, mas em linha, gerando um momento reativo suficiente para impedir este retorno. Por esse mesmo motivo (da ligação compreender diversos nós na sua linha) a medida da posição curvilínea é realizada para o nó do bordo da seção que chega primeiro ao final da trajetória.

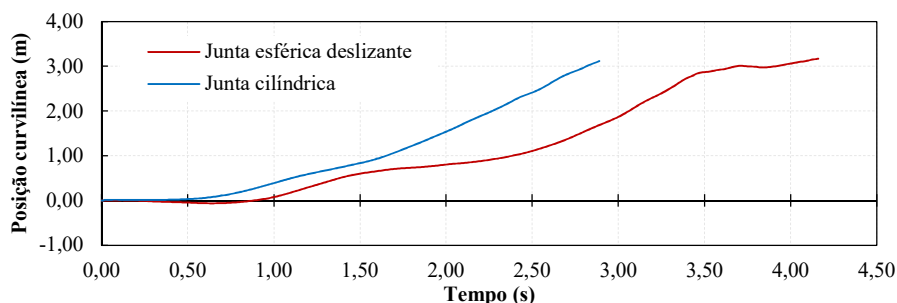


Figura 9 – Evolução da posição curvilínea

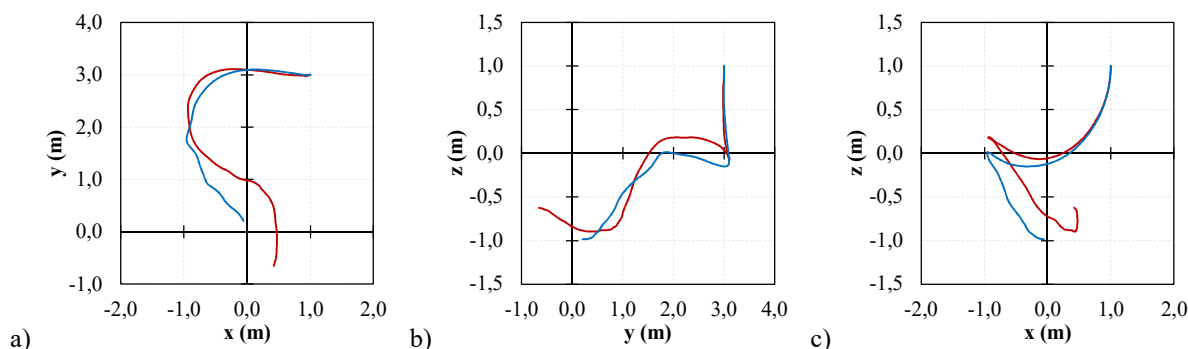


Figura 10 – Posição da ponta do pêndulo para os três planos coordenados: em vermelho a junta esférica deslizante e em azul a junta cilíndrica (as curvas se iniciam no primeiro quadrante dos gráficos)

Da Figura 9 percebe-se ainda que a junta cilíndrica atinge o final da trajetória com mais rapidez do que a junta esférica deslizante. Além disso, esta última apresenta um patamar entre 3,5 s e 4,0 s onde ela se encontra quase parada ao final da trajetória em torno da posição curvilínea de 3,0 m. Isso ocorre por um movimento pendular na direção do eixo y do corpo deslizante que acontece nesse intervalo de tempo e segura a ligação nessa posição. A Figura 11 a) ilustra algumas posições deformadas para a junta esférica deslizante onde é possível visualizar esse aspecto. Para a junta cilíndrica algumas posições deformadas de interesse são apresentadas na Figura 11 b).

Sendo a trajetória bastante flexível como pode ser notado nas deformadas acima, na Figura 12 pode-se observar a diferença entre a utilização dos dois tipos de ligações deslizantes também para os deslocamentos da trajetória, medidos no ponto médio entre os apoios A e B. Em particular, para a junta esférica, nota-se que o intervalo no qual a conexão estava quase parada (posição curvilínea em torno de 3,0 m) há um pico de deslocamentos nas direções y e z.



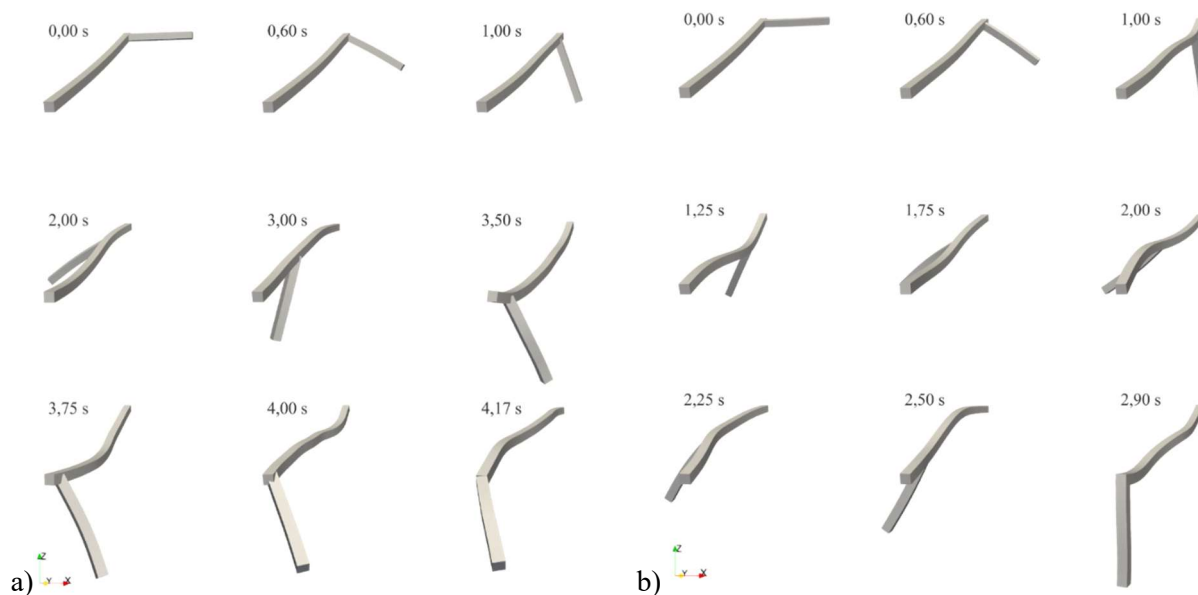


Figura 11 – Deformadas para a junta esférica deslizante, a), e para a junta cilíndrica, b), em representação volumétrica dos corpos

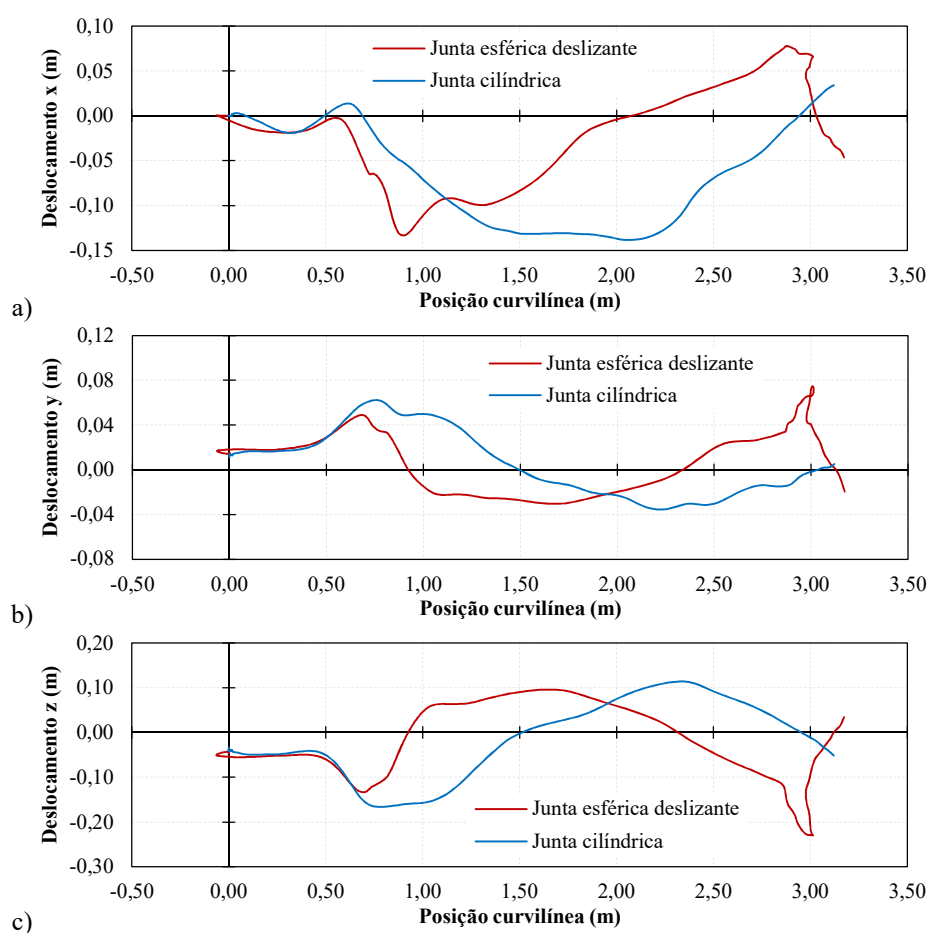


Figura 12 – Deslocamentos do ponto médio entre apoios da trajetória

Percebe-se, deste modo, a grande influência que o modelo das juntas tem sobre a resposta do sistema. É importante ressaltar que, embora as conexões na realidade sejam mais parecidas com o modelo da junta cilíndrica, no qual o contato é realizado por uma linha ou mesmo em uma área, em detrimento do contato pontual da junta esférica deslizante, deve-se lembrar que juntas reais possuem

folgas e lubrificação que não foram consideradas neste estudo. Assim, o emprego de modelos pontuais de contato bidirecional para avaliação do comportamento local das juntas em aplicações reais deve ser feito com cuidado levando em consideração todos os efeitos que sejam pertinentes.

Mesmo assim, em relação à formulação desenvolvida e sua implementação computacional nota-se que foram obtidos bons resultados e representativos quando se busca uma resposta global para o sistema mecânico-estrutural.

## 8 Conclusões

O desenvolvimento de um equacionamento para modelagem computacional de ligações deslizantes tridimensionais foi realizado em um ambiente dinâmico não linear geométrico com descrição Lagrangeana total. Expressões para as equações cinemáticas das restrições foram formuladas especificamente para os elementos finitos de pórtico espacial e casca com abordagem posicional. Além disso, foi apresentado um procedimento para o cálculo da variável de posição adimensional da ligação, necessária para os cálculos no procedimento de solução.

Para a obtenção das equações do movimento não lineares contendo estas restrições, o Princípio da Energia Total Estacionária foi estendido para abarcar a presença dos multiplicadores de Lagrange. A integração temporal do sistema algébrico-diferencial resultante foi tratada pelo método  $\alpha$ -generalizado capaz de obter respostas estáveis quando na presença das restrições via multiplicadores.

Por fim um exemplo representativo das capacidades da formulação e do código computacional desenvolvidos foi apresentado e seus resultados evidenciam a boa representação do comportamento dos sólidos quando da presença das ligações deslizantes.

Em trabalhos futuros espera-se explorar aplicações que empreguem o perfil de rugosidade para análise da vibração em, por exemplo, veículos que trafeguem sobre pontes.

## Agradecimentos

Os autores agradecem a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) - Processo N° 2018/18321-1 pelo suporte financeiro necessários para o desenvolvimento desta pesquisa.

## Referências

- [1] Coda HB, Paccola RR. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. *Finite Elem Anal Des* 2011;47:319–33.
- [2] Coda HB, Paccola RR, Sampaio MDSM. Positional description applied to the solution of geometrically non-linear plates and shells. *Finite Elem Anal Des* 2013;67:66–75.
- [3] Jelenic G, Crisfield MA. Dynamic analysis of 3D beams with joints in presence of large rotations. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2001;190:4195–230. doi:10.1016/S0045-7825(00)00344-3.
- [4] Ibrahimbegovic A, Taylor RL. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2002;191:5159–76. doi:10.1016/S0045-7825(02)00442-5.
- [5] Belytschko T, Glaum LW. Applications of higher order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis. *Comput Struct* 1979;10:175–82. doi:http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949(79)90085-3.
- [6] Bauchau OA. Computational Schemes for Flexible, Nonlinear Multi-Body Systems. *Multibody Syst Dyn* 1998;2:169–225.
- [7] Cardona A, Géradin M, Doan DB. Rigid and flexible joint modeling in multibody dynamics using finite element. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1991;89:395–418. doi:10.1016/0045-7825(91)90050-g.

- [8] Gérardin M, Cardona A. Flexible multibody dynamics: a finite element approach. Chichester: John Wiley & Sons; 2001.
- [9] Pai PF, Chapman RD, Feng Z. Geometrically exact displacement-based shell theory. *Thin-Walled Struct* 2013;70:1–18. doi:10.1016/j.tws.2013.04.010.
- [10] Pai PF. *Highly Flexible Structures: Modeling, Computation, and Experimentation*. Reston, VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics; 2007. doi:10.2514/4.861925.
- [11] Mamouri S, Hammadi F, Ibrahimbegović A. Decaying/conserving implicit scheme and non-linear instability analysis of 2D frame structures. *Int J Non Linear Mech* 2014;67:144–52.
- [12] Simo JC, Tarnow N, Wong KK. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1992;100:63–116. doi:10.1016/0045-7825(92)90115-Z.
- [13] Pimenta PM, Campello EMB, Wriggers P. An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational DOFs and general hyperelasticity. Part 1: Rods 2008;42:715–32. doi:10.1007/s00466-008-0271-5.
- [14] Siqueira TM, Coda HB. Flexible actuator finite element applied to spatial mechanisms by a finite deformation dynamic formulation. *Comput Mech* 2019. doi:10.1007/s00466-019-01732-0.
- [15] Gurtin ME, Fried E, Anand L. *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. New York: Cambridge University Press; 2010.
- [16] Ogden RW. *Non-linear elastic deformations*. Chichester: Ellis Horwood; 1984.
- [17] Newmark NM. A method of computation for structural dynamics. *J Eng Mech Div* 1959;44:67–94.
- [18] Simo JC, Vu-Quoc L. On the dynamics of flexible beams under large overall motions — the plane case. II. *J Appl Mech Asme* 1986;53:855–63.
- [19] Simo JC, Vu-Quoc L. On the dynamics of flexible beams under large overall motions — the plane case. I. *J Appl Mech Asme* 1986;53:849–54.
- [20] Paultre P. *Dynamics of structures*. Croydon: John Wiley & Sons; 2011.
- [21] Cardona A, Gérardin M. Time integration of the equations of motion in mechanism analysis. *Comput Struct* 1989;33:801–20. doi:10.1016/0045-7949(89)90255-1.
- [22] Laulusa A, Bauchau OA. Review of classical approaches for constraint enforcement in multibody systems. *J Comput Nonlinear Dyn* 2008;3.
- [23] Bauchau OA, Laulusa A. Review of contemporary approaches for constraint enforcement in multibody systems. *J Comput Nonlinear Dyn* 2008;3. doi:10.1115/1.2803258.
- [24] Chung J, Hulbert GM. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- $\alpha$  Method. *J Appl Mech* 1993;60:371. doi:10.1115/1.2900803.
- [25] Holzapfel GA. *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*. Chichester, UK: John Wiley & Sons; 2000.
- [26] Bonet J, Wood RD, Mahaney J, Heywood P. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2000;190:579–95. doi:10.1016/s0045-7825(99)00428-4.
- [27] Coda HB, Paccola RR. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. *Comput Mech* 2007;40:185–200.
- [28] Bischoff M, Ramm E. On the physical significance of higher order kinematic and static variables in a three-dimensional shell formulation. *Int J Solids Struct* 2000;37:6933–60.
- [29] Coda HB. A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2009;198:3712–22. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2009.08.001.
- [30] Coda HB, Paccola RR. Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. *Appl Math Model* 2010;34:1107–37.
- [31] Coda HB, Paccola RR. Unconstrained Finite Element for Geometrical Nonlinear Dynamics of Shells. *Math Probl Eng* 2009;2009:1–32. doi:10.1155/2009/575131.
- [32] Nocedal J, Wright SJ. *Numerical optimization*. New York: Springer; 1999.