

INSTABILIDADE E VIBRAÇÃO NÃO LINEARES DE UMA TRELIÇA PIRAMIDAL DE MATERIAL HIPERELÁSTICO

Renata M. Soares

renatasoares@ufg.br

Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, UFG

Av. Universitária, 1488, Setor Universitário, 74605-200, Goiânia, GO, Brasil

Abstract. In pyramidal space trusses the geometric nonlinearity is particularly significant and in recent years, intensive research has been conducted on the development of new materials, including shape memory polymers and elastomers. This work presents an analyzed for a shallow pyramidal truss composed of 6 equally spaced bars using the finite element method through the Abaqus[®] program. The truss is composed of an isotropic, homogeneous and hyperelastic material, which is modeled with neo-Hookean and Mooney–Rivlin models. The loss of stability and nonlinear vibrations of these structures under static and dynamic loads is analyzed. A parametric analysis of the geometric relation height and base is made and its nonlinear behavior, time responses, phase portraits are obtained. The results highlight the complex nonlinear dynamics of this class of structures.

Keywords: Pyramidal space trusses, MEF, Hyperelastic material.

1 Introdução

Treliças abatidas são estruturas que possuem um comportamento altamente não linear com crescente perda de rigidez quando submetida a esforços compressivos que levam a perda de estabilidade por ponto limite ou bifurcações simétricas instáveis ao longo do caminho não linear de equilíbrio (Bazant e Cedolin [1]). O conhecimento desse comportamento não linear, estático e dinâmico, é de grande importância para a correta utilização e projeto dessas estruturas. Além disso, a utilização de materiais capazes de sofrer grandes deformações, como os hiperelásticos, nessas estruturas pode produzir efeitos ainda não conhecidos.

Ligarò e Valvo [2] analisaram analiticamente o problema de estabilidade de treliças espaciais piramidais compostas de material elástico linear submetidas a cargas concentradas nas direções vertical e oblíqua. Os autores consideraram grandes deslocamentos, pequenas ou moderadas deformações e observaram que esse sistema mecânico exibe uma variedade de respostas pós críticas com o aparecimento de pontos de bifurcação e limites. Posteriormente, Santana *et al* [3] examinou a estabilidade estática não-linear e a capacidade de carga de treliças espaciais piramidais submetida a cargas estáticas atuando na direção vertical, no plano horizontal ou ao longo de uma direção oblíqua genérica validando sua formulação com os resultados obtidos por Ligarò e Valvo [2]. Os autores também observaram que esse sistema estrutural exibe uma ampla variedade de respostas pós-críticas, além dos ramos primários e secundários regulares, os caminhos de equilíbrio podem incluir ramos neutros. A análise foi conduzida usando o método dos elementos finitos juntamente com uma formulação co-rotacional para as barras.

Também considerando material elástico linear, Orlando *et al* [4] apresentaram uma formulação não linear exata para uma treliça piramidal composta de n barras e estudaram a perda de estabilidade e vibrações não lineares destas estruturas sob cargas estáticas e dinâmicas. Para compreensão do comportamento não linear os autores apresentaram respostas no tempo, planos de fase, diagramas de bifurcação, perfis de energia e bacias de atração. Os resultados mostraram a importância da não linearidade na dinâmica e estabilidade da estrutura e que, à medida que a carga aumenta, o vale referente à posição pré-crítica diminui, revelando que o aumento da carga compressiva produz progressivamente a perda de capacidade de resistir a perturbações iniciais sem que haja perda de estabilidade.

Um estudo do comportamento não linear, estabilidade e vibrações de treliças de treliças abatidas e não abatidas compostas de material elastomérico foi realizado por Fonseca [5] apresentando uma análise paramétrica detalhada destas estruturas submetidas à carga estática vertical ou horizontal. Assim, são obtidos os caminhos de equilíbrio, frequências naturais e bacias de atração que demonstram que a presença simultânea da não linearidade do material e geométrica dá origem a novos caminhos de equilíbrio que não são esperados para os materiais elásticos lineares, resultando em várias soluções estáveis e instáveis coexistentes e em uma complexa superfície de energia potencial, esclarecendo a influência do modelo neo-Hookeano nos resultados.

Assim, neste trabalho estuda-se numericamente via MEF utilizando o programa comercial Abaqus® o comportamento não linear, estático e dinâmico, de uma treliça de geometria abatida com seis barras e composta de material hiperelástico. Para isso, considera-se o material isotrópico, homogêneo e incompressível modelado como Mooney-Rivlin e sua simplificação neo-Hookeana. Obtêm-se as cargas críticas, caminho não linear de equilíbrio, frequência natural, relação frequência-deslocamento e planos fase. Verifica-se a influência do modelo constitutivo utilizado e da geometria da membrana, através da relação B/H , no comportamento da treliça.

2 Formulação do Problema

Seja uma treliça especial piramidal composta de seis barras idênticas, com os nós da base igualmente espaçados e os nós do topo conectados, como apresentado na Fig. 1. Considera-se a

pirâmide de altura H , base poligonal circunscrita em um círculo de base B e comprimento das barras da treliça L conforme Eq. 1.

$$L = \sqrt{H^2 + B^2}. \quad (1)$$

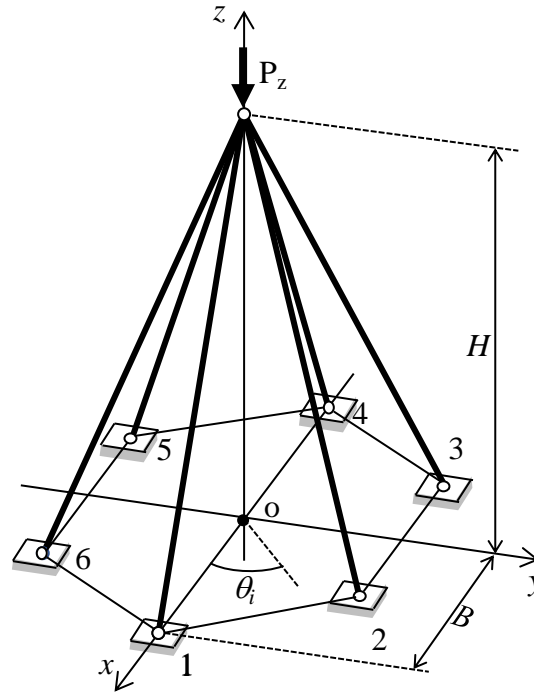


Figura 1. Treliça espacial piramidal (Ligarò e Valvo [2] – adaptada)

O nó do topo da treliça é livre para se deslocar e submetido a uma força concentrada P_z na direção z , e os nós da base são apoiados. A geometria da treliça pode ser definida utilizando o sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) e o sistema de coordenadas circunferencial (r, θ, z) , os quais se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} r, \theta, z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right), z \end{bmatrix}^T. \quad (2)$$

Assim na configuração indeformada, as coordenadas dos nós do topo (\mathbf{X}_t) e da base (\mathbf{X}_{b_i}) respectivamente são definidas por:

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} x, y, z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0, 0, H \end{bmatrix}^T. \quad (3)$$

$$\mathbf{X}_{b_i} = \begin{bmatrix} x_i, y_i, z_i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} B \cos \theta_i, B \sin \theta_i, H \end{bmatrix}^T. \quad (4)$$

onde

$$\theta_i = \frac{\pi}{3}(i - 1), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (5)$$

As barras da treliça possuem seção transversal de área A e são compostas de material homogêneo, isotrópico, incompressível e hiperelástico descrito segundo o modelo constitutivo de Mooney-Rivlin:

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3). \quad (6)$$

sendo C_1 e C_2 parâmetros do material e I_1 e I_2 os invariantes de deformação. Quando $C_2 = 0$ tem-se a

simplificação para o modelo constitutivo neo-Hookeano.

A solução do problema é realizada via o método dos elementos finitos através do programa comercial Abaqus®, no qual se utiliza uma malha de seis elementos barra do tipo T3D2 (um em cada barra da treliça). O elemento utilizado é tridimensional, isoparamétrico com interpolação linear.

3 Resultados Numéricos

Para obtenção dos resultados numéricos considera-se altura da treliça $H = 1\text{ m}$, área da seção transversal $A = 0,12\text{ m}^2$ e densidade do material $\gamma = 1200\text{ N/m}^3$. Para a análise paramétrica consideram-se quatro valores da base $B = 2, 3, 4, \text{ e } 5\text{ m}$ e dois materiais com as seguintes propriedades: para o modelo neo-Hookeano (nH) $C_1 = 0.1361\text{ MPa}$ e $C_2 = 0.0$, e para o modelo de Mooney-Rivlin (MR) $C_1 = 0.1361\text{ MPa}$ e $C_2 = 0.00806\text{ MPa}$ [6].

Em ambas as análises, estática e dinâmica, observa-se a influência da relação B/H e do material constitutivo no comportamento da treliça.

3.1 Análise linear

Na análise linear são obtidas as frequências naturais e as cargas críticas do problema. Para isso a solução é obtida através da solução de um problema de autovalor. Na Tabela 1 apresentam-se as frequências naturais obtidas para as treliças consideradas, onde ω_o refere-se ao modo de vibração com deslocamento do nó do topo na direção vertical z e ω_r refere-se ao modo de vibração com deslocamento do nó do topo na direção radial.

Tabela 1. Frequências Naturais (rad/s)

| B/H | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| | ω_o | ω_r | ω_o | ω_r | ω_o | ω_r | ω_o | ω_r |
| nH | 7.378 | 10.435 | 3.689 | 7.826 | 2.170 | 6.138 | 1.419 | 5.017 |
| MR | 7.594 | 10.739 | 3.797 | 8.054 | 2.233 | 6.317 | 1.460 | 5.163 |
| % | 2.93 | 2.91 | 2.93 | 2.91 | 2.90 | 2.92 | 2.89 | 2.91 |

Observa-se a partir da Tab. 1 que com o aumento da relação B/H as frequências naturais diminuem e que a treliça modelada com material neo-Hookeano possui frequências naturais aproximadamente 2,9% menores do que a treliça modelada com material Mooney-Rivlin. Isso se deve a presença do segundo invariante de deformação no modelo MR.

Posteriormente, obtiveram-se as frequências de vibração das treliças estudadas previamente carregadas por uma carga concentrada P_z na direção vertical z . A relação carga aplicada *versus* frequência de vibração ao quadrado é apresentada na Fig. 2, de forma dimensional (Fig. 2 (a)) e normalizada (Fig. 2 (b)).

Comprova-se que as frequências naturais são maiores para menores relações B/H e para as treliças modeladas com o material MR. Observa-se também uma relação não linear entre a carga aplicada e a frequência de vibração e que esse comportamento é o mesmo independente da relação geométrica B/H e do modelo do material considerado. Os valores das cargas limites, onde $\omega^2 = 0$, obtidos a partir desta análise são apresentados na Tab. 2 (P_{lim}) juntamente com os valores obtidos a partir da solução de carga crítica do problema (P_{cr}). A terceira coluna (%p) para cada relação B/H representa a variação percentual entre as cargas crítica e limite obtidas e a terceira linha (%m) representa a variação percentual entre as cargas considerando os diferentes modelos.

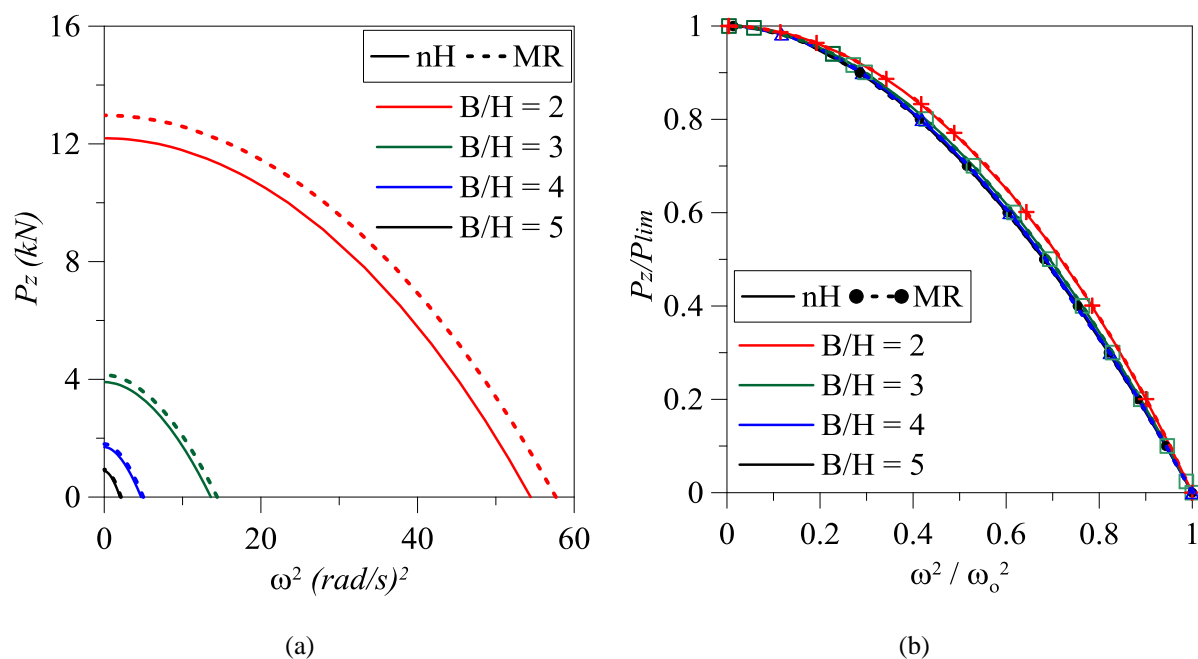


Figura 2. Relação frequência de vibração ao quadrado *versus* carga aplicada P_z (a) dimensional (b) adimensional.

Tabela 2. Cargas crítica e limite (kN)

| B/H | 2 | | | 3 | | | 4 | | | 5 | | |
|-----|----------|-----------|------|----------|-----------|------|----------|-----------|------|----------|-----------|------|
| | P_{cr} | P_{lim} | %p | P_{cr} | P_{lim} | %p | P_{cr} | P_{lim} | %p | P_{cr} | P_{lim} | %p |
| nH | 52.59 | 12.19 | 76.9 | 18.59 | 3.91 | 79.0 | 8.389 | 1.70 | 79.7 | 4.435 | 0.88 | 80.1 |
| MR | 55.70 | 12.97 | 76.7 | 16.69 | 4.15 | 75.1 | 8.885 | 1.80 | 79.7 | 4.698 | 0.93 | 80.2 |
| %m | 5.58 | 6.01 | -- | -11.38 | 5.78 | -- | 5.58 | 5.56 | -- | 5.6 | 5.38 | -- |

Observa-se a partir da Tab. 2 que a solução linear do problema obtida através de um problema de autovalor fornece valores de carga crítica aproximadamente 80% maiores que os obtidos para P_{lim} . Isso se justifica pelo fato da treliça não se comportar como um problema de clássico de carga crítica e, além disso, comprova que uma análise simplificada desse problema leva a resultados equivocados superestimando a capacidade de carga da estrutura.

Já considerando os diferentes modelos (%m), percebe-se que os resultados para o modelo MR são, na maioria dos casos, maiores que os considerando o modelo nH. Essa mesma observação ocorreu para a frequência natural (Tab. 1) e se deve ao fato da influência do segundo invariante de deformação presente no modelo MR.

3.2 Análise não linear estática

Na análise não linear estática obtêm-se o caminho de equilíbrio utilizando-se o método de comprimento de arco de Ricks, proposto pelo programa Abaqus®. Assim, calcula-se o deslocamento (w) na direção vertical z do nó do topo com o incremento no carregamento P_z , que são apresentados na Fig. 3. Na Fig. 3 (b) a normaliza-se a carga (eixo vertical) com o valor de carga limite obtido a partir da análise linear.

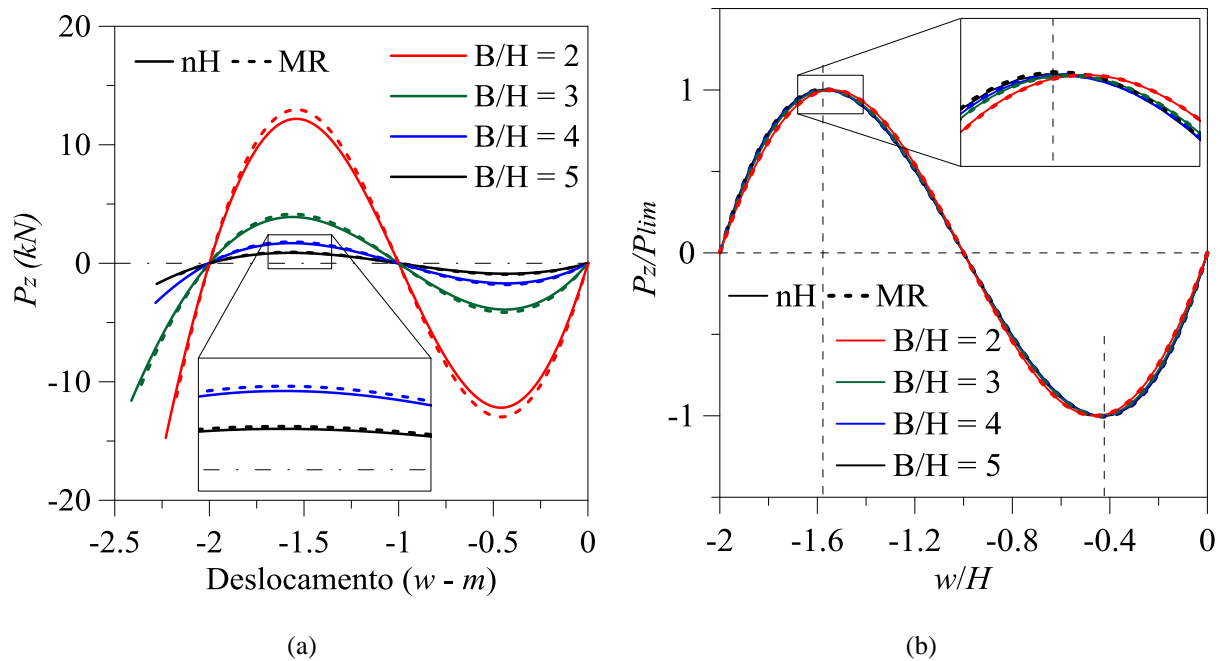


Figura 3. Caminho não linear de equilíbrio: deslocamento do nó do topo w versus carga aplicada P_z (a) dimensional (b) normalizada.

Observa-se que em todos os casos que a treliça apresenta um comportamento com perda de estabilidade através de uma bifurcação simétrica instável ao longo do caminho não linear de equilíbrio e que o comportamento de *snapthrough*, típico de estruturas abatidas, ocorre mesmo considerando que o material que as compõe é do tipo hiperelástico. Seguindo o mesmo padrão observado na análise linear, as respostas utilizando o modelo MR são maiores que as do modelo nH e que a diminuição da relação geométrica B/H aumenta o valor da carga limite da treliça (Fig.3 (a)).

Conforme observado por Orlando *et al* [4] em treliças abatidas compostas de material elástico, os pontos limites de carga ocorrem para as coordenadas normalizadas do deslocamento do nó do topo da treliça em 0.423 e 1.577. Essas coordenadas aparecem em linha tracejada na Fig. 3(b) e pode-se observar que nos casos estudados, de treliças com material hiperelástico, os pontos limites são próximos a esses valores, porém há uma pequena divergência com a diminuição da relação B/H . Esse comportamento era esperado já que para essas geometrias a treliça se torna menos abatida.

Além disso, comprova-se a acurácia da análise linear realizada a partir da relação P_z versus ω^2 já que os valores limites de carga adimensionais, apresentado na Fig. 3 (b), para as treliças é unitário.

3.3 Análise não linear dinâmica

Primeiramente a resposta no tempo para a vibração livre da treliça é obtida. Para isso perturbou-se a treliça impondo um deslocamento inicial na direção vertical z no nó do topo da treliça e obteve-se a resposta no tempo para um sistema levemente amortecido, como ilustrado na Fig. 4.

A partir desta resposta no tempo e utilizando a metodologia proposta por Nandakumar e Chatterjee [7], pode-se obter a relação frequência de vibração-deslocamento para o nó do topo da treliça. Para isso considera-se o deslocamento de dois picos positivos e sucessivos nos tempos t_1 e t_2 e calcula-se sua média w_1 . Posteriormente, toma-se o valor absoluto do deslocamento negativo w_2 do pico entre t_1 e t_2 e então, se define o deslocamento como a média entre w_1 e w_2 . O período é obtido pela diferença entre t_2 e t_1 e a frequência de vibração pelo inverso do período.

Com os valores dos deslocamentos na direção vertical z e das frequências de vibração, obtém-se as relações frequência – deslocamento que são ilustradas na Fig. 5 para os casos estudados.

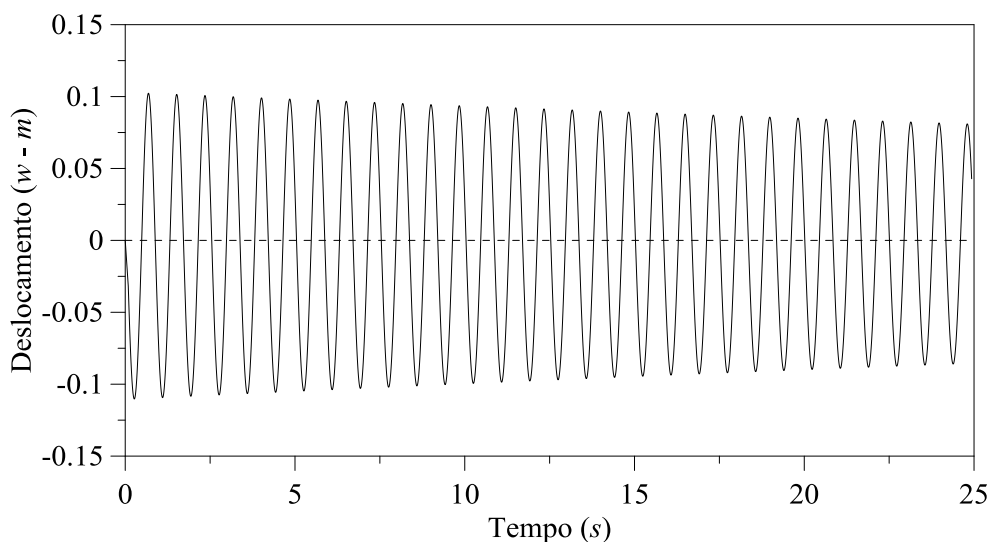


Figura 5. Resposta no tempo da vibração livre do nó do topo da treliça.

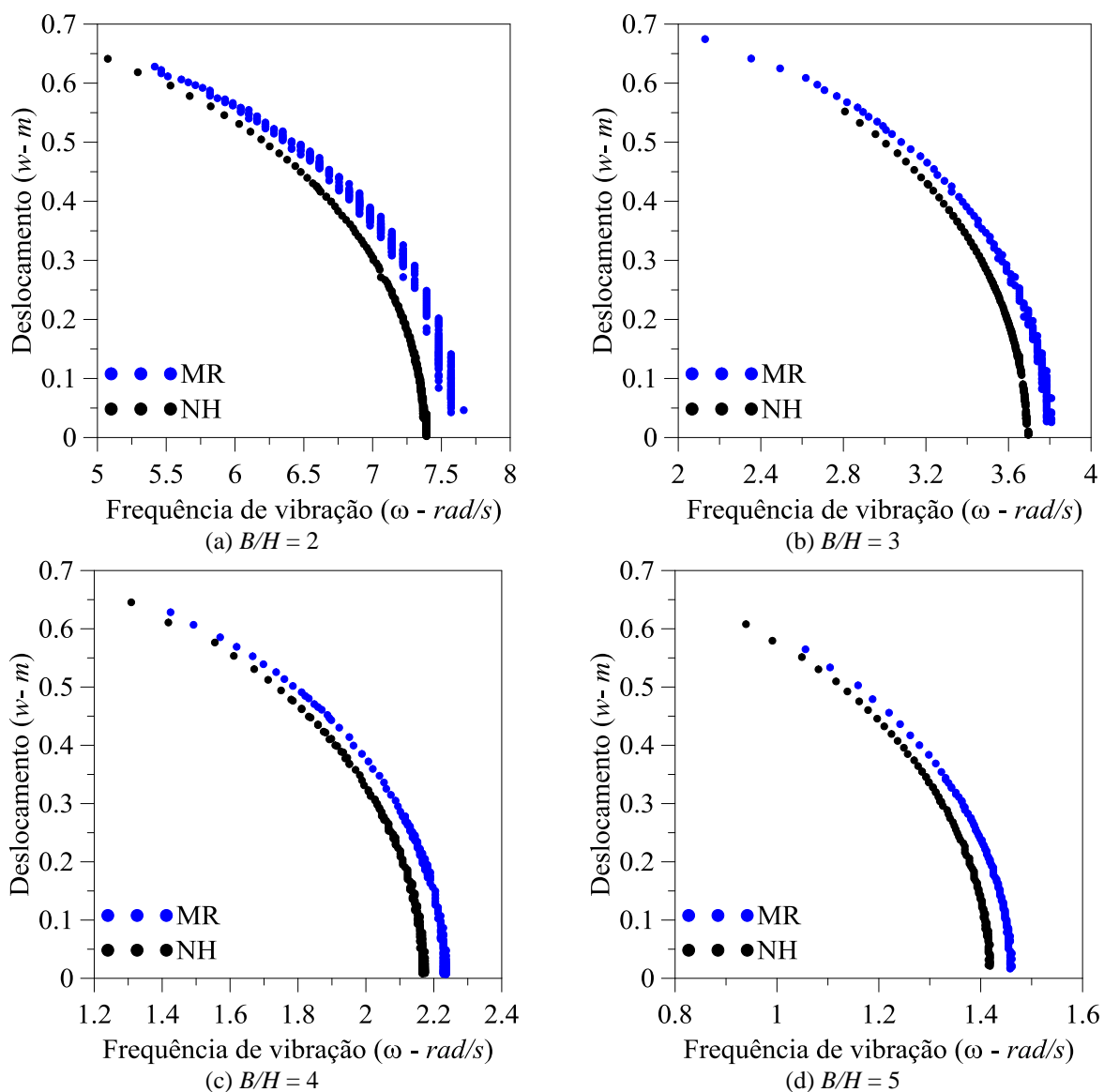


Figura 5. Relação frequência de vibração *versus* deslocamento vertical do nó do topo (a) nH (b) MR.

Observa-se que em todos os casos estudados uma diminuição da frequência de vibração com o aumento do deslocamento caracterizando um comportamento com perda de rigidez (*softening*) da treliça. Comportamento esse observado para treliças abatidas compostas de material elástico por Orlando *et al* [4].

Verifica-se também que a curva da treliça com o material MR se desloca para direita, ou seja, possuem frequências de vibração maiores que da treliça com material nH, mas mantém o padrão de comportamento em ambos materiais. Além disso, confirma-se que o aumento da relação B/H diminui a frequência de vibração da treliça.

A relação frequência de vibração normalizada versus deslocamento é apresentada na Fig. 6. Observa-se nos dois materiais que para menores valores de deslocamento as curvas para diferentes relações B/H se sobrepõem. E à medida que o deslocamento aumenta as curvas se deslocam para direita, a frequência de vibração normalizada aumenta, com a diminuição da relação B/H . Assim, percebe-se que para treliças menos abatidas a perda de rigidez é menor.

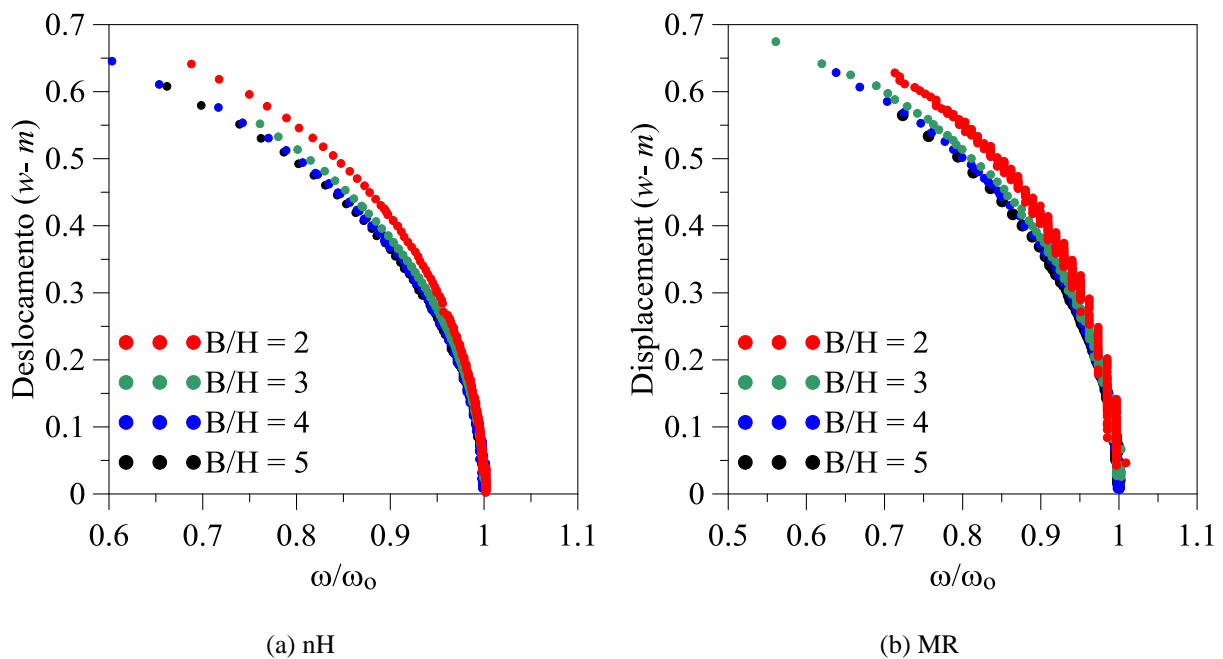


Figura 6. Relação frequência de vibração normalizada *versus* deslocamento na direção vertical z do nó do topo (a) nH (b) MR.

Já Fig. 7 ilustra as possíveis órbitas da resposta no tempo em vibração livre não amortecida do sistema em plano fase. Neste caso foram apresentadas as repostas para treliça considerando o material nH, já que as respostas para a treliça compostas de material MR são similares. Há dois centros que correspondem a duas posições de equilíbrio estável e um ponto de sela que corresponde a uma posição de equilíbrio instável. As duas órbitas homoclínicas do ponto de sela delimitam os dois vales potenciais e separam as três possíveis soluções.

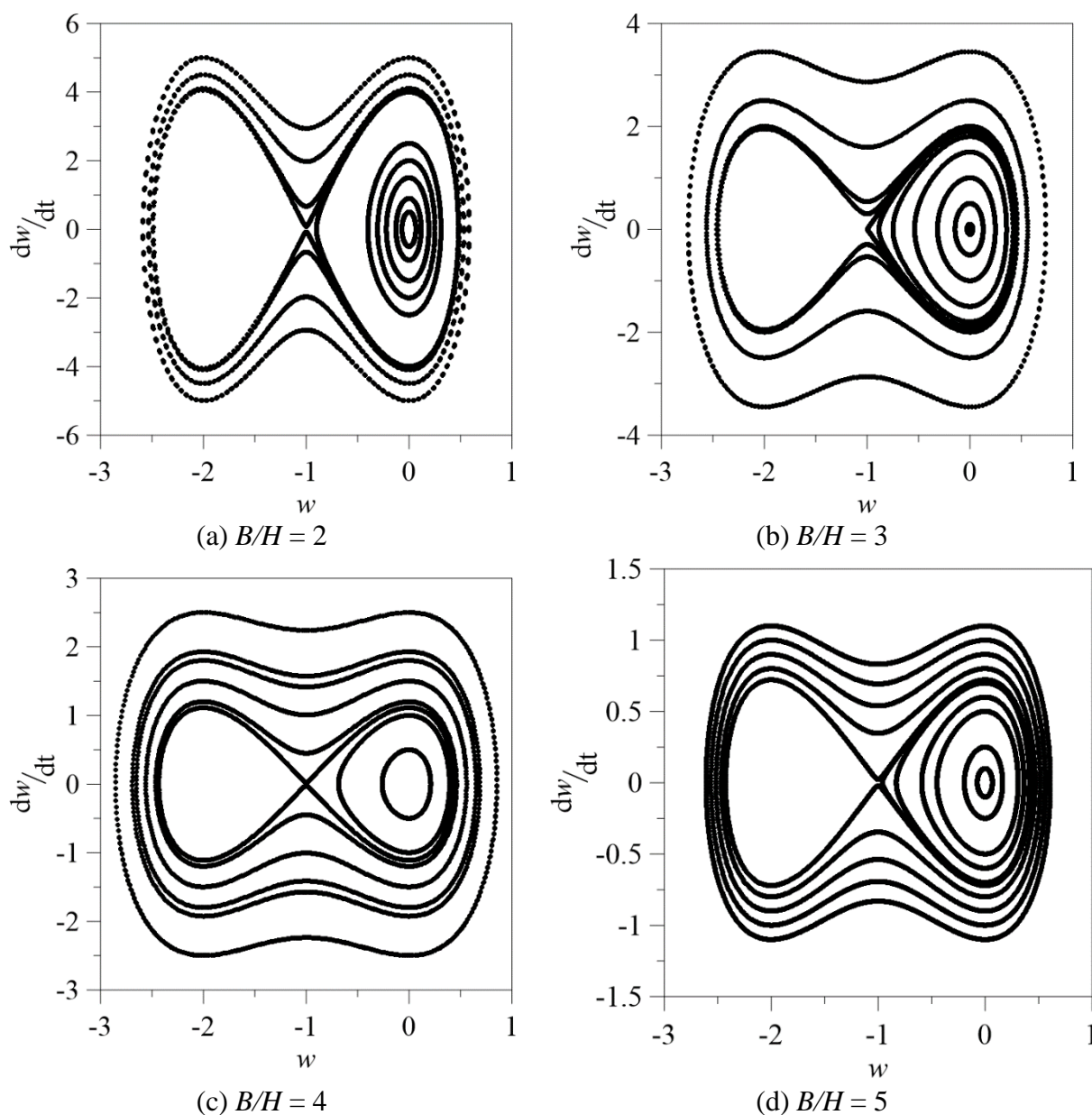


Figura 7 – Planos Fase da treliça nH para diferentes relações B/H .

4 Considerações Finais

Estudou-se numericamente via MEF o comportamento não linear de uma treliça piramidal abatida com seis barras e composta de material hiperelástico. Considerou-se o material isotrópico, homogêneo e incompressível modelado como Mooney-Rivlin e sua simplificação neo-Hookeana. A partir das soluções de carga crítica, caminho não linear de equilíbrio, frequência natural, relação frequência-deslocamento e planos fase verificou-se a influência do modelo constitutivo e da relação B/H nesses resultados.

Qualitativamente o comportamento da treliça composta de material hiperelástico não se difere do comportamento da treliça de material elástico, mantendo um caminho não linear de equilíbrio com a ocorrência de *snapthrough* e uma vibração com perda de rigidez. O modelo MR aumenta os valores das frequências de vibração.

Existe relação não linear entre a carga aplicada e a frequência de vibração sendo esse comportamento independente da relação geométrica B/H e do modelo do material considerado (MR ou nH). Além disso, observou-se que a solução linear do problema obtida através de um problema de autovalor fornece valores de carga crítica maiores que os valores de carga limite, comprovando que uma análise simplificada desse problema leva a resultados equivocados superestimando a capacidade de carga da estrutura.

A partir dos plano fase verifica-se a presença de três soluções, duas posições de equilíbrio estável e uma posição de equilíbrio instável.

Agradecimentos

Este trabalho foi possível devido ao apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás FAPEG.

Referências

- [1] Z. Bazant, Z., L. Cedolin,. *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories*. Oxford: UK: Oxford University Press, 1991.
- [2] S. S. Ligarò, P. S. Valvo. Large displacement analysis of elastic pyramidal trusses. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, pp. 4867–4887, 2006, <https://doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.06.100>.
- [3] M. V. B. Santana, P. B. Gonçalves, R. A. M. Silveira, 2018. Static stability and load capacity of pyramidal trusses. *MATEC Web of Conferences (ICoEV 2017)*, <https://doi.org/10.1051/mateconf/201814807005>
- [4] D. Orlando, C. H. L. Castro and P. B. Gonçalves. Nonlinear vibrations and instability of a bistable shallow reticulated trusses. *Nonlinear Dynamic*, 2018, <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4437-1>.
- [5] F. M. Fonseca. Comportamento não linear, bifurcações e instabilidade de uma treliça hiperelástica. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2018.
- [6] A.P.S. Selvadurai, Deflections of a rubber membrane. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*. v 54, pp. 1093 – 1119, 2006.
- [7] K. Nandakumar, A. Chatterjee. Resonance, Parameter Estimation, and Modal Interactions in a Strongly Nonlinear Benchtop Oscillator. *Nonlinear Dynamics*. v. 40, p. 149-167, 2005.