

## COMPUTATIONAL TOOL FOR BUCKLING ANALYSIS VIA POSITIONAL FINITE ELEMENT METHOD

**Henrique B. Soares**

*henriquebsoares@usp.br*

*Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo  
Av. Trabalhador São Carlense, 400, 13566-590, São Carlos, SP, Brazil*

**Rodrigo R. Paccola**

*rpaccola@sc.usp.br*

*Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo  
Av. Trabalhador São Carlense, 400, 13566-590, São Carlos, SP, Brazil*

**Humberto B. Coda**

*hbcoda@sc.usp.br*

*Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo  
Av. Trabalhador São Carlense, 400, 13566-590, São Carlos, SP, Brazil*

**Abstract.** In this work, a computational program is developed to perform stability analysis of thin-walled profiles employing the positional formulation of the Finite Element Method (FEM). The profiles are discretized in shell finite elements, which, unlike the traditional formulation, have position and unconstrained vector as nodal parameters. Besides, the formulation considers a parameter corresponding to the rate of thickness variation, which makes the kinematics of the element more general than Reissner-Mindlin. Due to the use of unconstrained vector instead of rotation, it was necessary to use a strategy to perform the coupling between non-coplanar elements. This coupling was accomplished by means of a one-dimensional element connecting the end of the non-coincident vectors of a node. A nonlinear geometric formulation of FEM is adopted, using the total Lagrangian description of the equilibrium. The material is assumed to be elastic linear, represented by the Saint-Venant-Kirchhoff constitutive law. To incorporate the stability analysis, a technique based on the decomposition of the stiffness matrix in the elastic and geometric parts is used. This technique consists of determining eigenvalues and eigenvectors, which corresponds, respectively, to buckling loads and instability modes of the resulting generalized eigenvalue problem. A graphical interface for the program is developed, making it easier to use. For this, an algorithm for triangular and quadrilateral finite element mesh generation was also developed, as well as a post-processing viewer, avoiding possible dependencies with external programs. Finally, numerical examples are presented to validate the developed code and demonstrate the program functionalities.

**Keywords:** Buckling analysis, Thin-walled profiles, Positional FEM, Computational tool.

## 1 Introdução

O fenômeno de instabilidade estrutural é caracterizado por uma mudança abrupta da configuração de um corpo para uma pequena variação do esforço atuante, ou vice-versa. A ocorrência deste fenômeno está diretamente associada à esbeltez da peça ou do sistema estrutural analisado e à intensidade de tensões compressivas atuantes.

Como principal exemplo de estrutura suscetível ao fenômeno de instabilidade, destacam-se os perfis metálicos, usualmente empregados em construções civis. Esses perfis são em geral compostos por partes foliculares planas unidas por meio de solda, denominados perfis soldados, ou compostos de chapas dobradas, resultando nos perfis formados à frio.

A descrição matemática do problema da estabilidade estrutural foi inicialmente realizada por Euler [1], o qual determinou analiticamente a expressão da força crítica de compressão em pilares esbeltos. A partir de então diversos pesquisadores se dedicaram a este estudo, como Bryan [2], Lyapunov [3], Southwell [4], dentre outros.

Um avanço importante na teoria foi realizado por Koiter [5], que descreveu o comportamento de estruturas de cascas cilíndricas e esféricas considerando a existência de imperfeições. O referido autor observou que a presença de imperfeições alterava significativamente o valor da carga crítica, explicando assim os resultados inesperados obtidos nos experimentos realizados na época para este tipo de estrutura. Além disso, o trabalho contemplava a análise do equilíbrio pós-crítico, que originou na chamada Teoria Assintótica de Koiter.

Com o desenvolvimento dos métodos numéricos, análises mais gerais e de caráter aproximado puderam ser realizadas. Destaca-se aqui primeiramente o Método dos Elementos Finitos (MEF), que permitiu um grande avanço na análise de estruturas, incluindo a possibilidade de resolução de problemas cuja solução analítica era de difícil ou impossível obtenção. Entre esses problemas, cita-se a análise não-linear geométrica, na qual a análise de estabilidade se insere.

Além da formulação geral do MEF para análises de estabilidade, outras formulações simplificadas também foram desenvolvidas. Em destaque estão a Teoria Generalizada de Vigas (GBT), desenvolvida originalmente por Schardt [6], e o Método das Faixas Finitas (FSM), utilizado para análises de instabilidade inicialmente por Schafer [7]. Entre os principais trabalhos que utilizam a GBT, pode-se citar Dinis et al. [8], Bebiano et al. [9], Gonçalves et al. [10], Basaglia et al. [11, 12], dentre outros. Quanto à utilização do FSM, pode-se citar os trabalhos de Ádány e Schafer [13, 14], Naderian e Ronagh [15], Rendall et al. [16], Shojaee et al. [17], dentre outros.

Diante disso, define-se como objetivo deste trabalho a elaboração de um programa computacional para realizar análises lineares de estabilidade empregando a formulação posicional do MEF com utilização de elementos de casca. A formulação deste elemento finito foi desenvolvida por Coda e Paccola [18, 19] e apresentou bons resultados para as análises pretendidas. Aqui, portanto, busca-se realizar sua aplicação para análises de estabilidade, avançando assim nos estudos relacionados à aplicação do MEF.

## 2 Formulação numérica

Neste trabalho foram realizadas análises de estabilidade para elemento finito de casca com descrição baseada em posições e vetores generalizados, ao invés dos tradicionais deslocamentos e giros. Essa formulação foi desenvolvida inicialmente por Coda e Paccola [18], mas apresentou problemas de travamento volumétrico em decorrência da adoção de uma lei constitutiva completa e cinemática de Reissner-Mindlin. Posteriormente, Coda e Paccola [19] acrescentaram um parâmetro nodal que introduz uma taxa de variação linear da espessura, flexibilizando a cinemática do elemento finito e reduzindo drasticamente os efeitos de travamento.

Por se tratar de uma formulação não-linear geométrica com descrição lagrangiana total, se faz necessário o mapeamento das configurações inicial e atual do elemento finito de casca, conforme Fig. 1. As funções de mapeamento das configurações inicial e atual são definidas, respectivamente, como:

$$f_i^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_\ell(\xi_1, \xi_2)X_{\ell i} + \frac{h_0}{2}\xi_3\phi_\ell(\xi_1, \xi_2)V_{\ell i} \quad (1)$$

$$f_i^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_\ell(\xi_1, \xi_2)Y_{\ell i} + \frac{h_0}{2}[\xi_3 + \phi_m(\xi_1, \xi_2)\Gamma_m\xi_3^2]\phi_\ell(\xi_1, \xi_2)G_{\ell i} \quad (2)$$

nas quais  $X_{\ell i}$  corresponde à coordenada inicial  $i$  do nó  $\ell$ ,  $Y_{\ell i}$  corresponde à coordenada atual  $i$  do nó  $\ell$ ,  $V_{\ell i}$  corresponde à componente  $i$  do vetor normal inicial associado ao nó  $\ell$ ,  $G_{\ell i}$  corresponde à componente  $i$  do vetor generalizado atual associado ao nó  $\ell$ ,  $\Gamma_m$  é o valor da taxa variação linear da espessura associada ao nó  $m$  e  $\phi_\ell$  é a função de forma atrelada ao nó  $\ell$ .

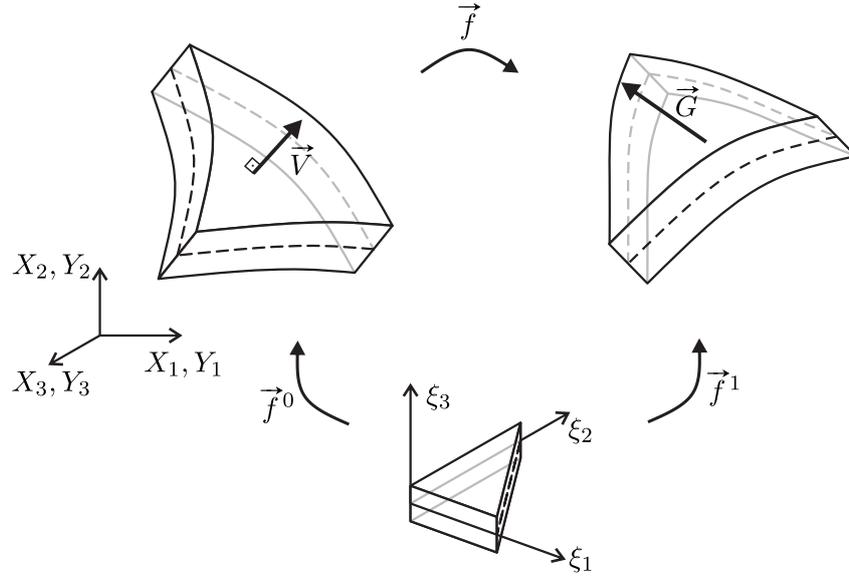


Figura 1. Mapeamento das configurações inicial e atual a partir de um espaço de referência adimensional

Dessa forma, pode-se determinar a função mudança de configuração por meio da composição das funções de mapeamento anteriormente definidas:

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1} \quad (3)$$

Adota-se para o comportamento do material a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, cuja expressão de energia específica é fornecida como:

$$u_e = \frac{1}{2}\mathbb{E} : \mathfrak{C} : \mathbb{E} \quad (4)$$

na qual  $\mathbb{E}$  é o tensor de deformações de Green-Lagrange e  $\mathfrak{C}$  é o tensor constitutivo de expressão idêntica à utilizada na lei de Hooke.

Para a definição da condição de equilíbrio utiliza-se aqui a abordagem energética. A energia mecânica total, considerando-se problemas estáticos, fica definida pelo funcional  $\Pi = \mathbb{U} + \mathbb{P}$ , sendo  $\mathbb{U}$  a energia interna de deformação e  $\mathbb{P}$  a energia potencial das forças externas. Neste trabalho considera-se apenas forças externas conservativas. Do princípio de estacionariedade da energia mecânica, tem-se que a condição de equilíbrio é dada por:

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{P} = \left( \frac{\partial\mathbb{U}}{\partial\vec{Y}} + \frac{\partial\mathbb{P}}{\partial\vec{Y}} \right) \delta\vec{Y} = 0 \quad (5)$$

em que  $\vec{Y}$  é um vetor que reúne os parâmetros nodais de posição, vetor generalizado e taxa de variação de espessura.

Considerando a arbitrariedade de  $\delta\vec{Y}$ , a expressão entre parênteses da Eq. (5) deve ser nula e representa um sistema não-linear de dimensão igual ao número de graus de liberdade correspondente à discretização adotada.

A derivada de  $\mathbb{U}$  presente na Eq. (5) corresponde à força interna e a derivada de  $\mathbb{P}$  corresponde à força externa atuante, sendo fornecidos como:

$$\vec{F}^{int} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \vec{Y}} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \vec{Y}} dV_0 = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \mathbb{E}} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \vec{Y}} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \vec{Y}} dV_0 \quad (6)$$

$$\vec{F}^{ext} = -\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \vec{Y}} \quad (7)$$

em que  $\mathbf{S} = \mathfrak{C} : \mathbb{E}$  é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff.

Para a resolução do sistema não-linear utiliza-se o método de Newton-Raphson, que consiste na linearização do erro no equilíbrio em torno de uma determinada solução tentativa. Surge então a necessidade da determinação da segunda derivada da energia de deformação, denominada matriz Hessiana:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} = \int_{V_0} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \vec{Y}} : \mathfrak{C} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \vec{Y}} dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} dV_0 \quad (8)$$

O sistema linear a ser resolvido no processo iterativo é dado por:

$$\mathbf{H} \cdot \Delta \vec{Y} = -\vec{R} \quad (9)$$

em que  $\vec{R} = \vec{F}^{int} - \vec{F}^{ext}$  é vetor desbalanceamento mecânico e  $\Delta \vec{Y}$  é a correção a ser aplicada em  $\vec{Y}$ , inicialmente tomado igual à posição inicial ( $\vec{Y} = \vec{X}$ ). O processo iterativo é repetido até que se atinja um valor de tolerância sobre  $\Delta \vec{Y}$  e/ou  $\vec{R}$ . Mais detalhes sobre esta formulação podem ser encontrados em Coda e Paccola [19].

## 2.1 Acoplamento entre elementos não-coplanares

Devido à adoção de vetores generalizados ao invés de giros como parâmetros nodais, mais de um versor normal pode ser definido nos nós situados no encontro entre elementos não coplanares, a depender do elemento finito analisado. Surge então a necessidade de se definir estratégias para contornar este problema.

A estratégia aqui utilizada é a apresentada por Soares et al. [20], resumida a seguir. Quando o ângulo entre os versores normais não coincidentes de um mesmo nó for menor que um valor limite  $\bar{\theta}$ , é admitida a utilização do versor bissetriz como único versor pertencente àquele nó. Caso contrário, os versores não coincidentes são mantidos e acoplados por meio de um elemento de penalização conectando suas extremidades.

Utilizou-se  $15^\circ$  para o valor limite  $\bar{\theta}$ . Para valores acima deste limite, foi adotado um elemento de barra simples com rigidez elevada para realizar o acoplamento. Para evitar problemas de mal condicionamento na matriz resultante, Soares et al. [20] propuseram uma estratégia para determinar uma rigidez para o elemento de barra simples que levasse em consideração a geometria e o material presentes na região do acoplamento. Isso foi realizado por meio de uma equivalência entre as energias de deformação do elemento de barra simples e do sólido que preenche o espaço de conexão, conforme apresentado na Fig. 2.

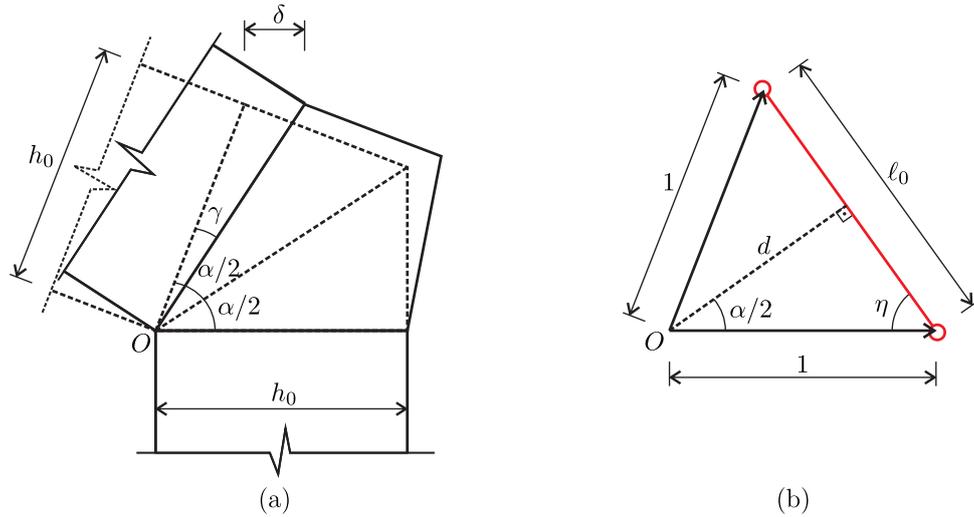


Figura 2. Equivalência entre energias de deformação de (a) sólido que preenche o espaço de conexão e (b) elemento de barra simples

A energia de deformação para o elemento de barra simples é determinada a partir da Lei de Hooke unidimensional como:

$$U_e^{bar} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 A \ell_0 = \frac{1}{4} E A \gamma^2 \tan^2 \eta \cos \eta \quad (10)$$

em que  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal da barra,  $A$  é a área da seção transversal e  $\varepsilon$  é a deformação linear longitudinal da barra.

Para o sólido adota-se a Lei de Hooke Generalizada e considera-se, por simplicidade, apenas o efeito de distorção na determinação da energia de deformação, que resulta em:

$$U_e^{sol} = \frac{1}{2} G \gamma^2 h_0^2 b \tan \left( \frac{\alpha}{2} \right) \quad (11)$$

na qual  $G$  é o módulo de elasticidade transversal do sólido  $b$  é a distância entre dois nós consecutivos ao longo do comprimento de conexão.

Igualando-se Eq. (10) e Eq. (11), determina-se o produto de rigidez  $EA$  a ser adotado para o elemento de barra simples:

$$EA = 2Gb h_0^2 \left[ \tan^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) \sec \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right] \quad (12)$$

Conforme mostrado por Soares et al. [20], a utilização da rigidez fornecida na Eq. (12) conduz a resultados próximos aos obtidos para uma conexão rígida, com a vantagem de não introduzir um mal condicionamento ao sistema. Mais detalhes sobre a estratégia empregada podem ser encontrados em Soares et al. [20] e Soares [21].

### 3 Análise linear de estabilidade (buckling)

Uma condição suficiente para uma estrutura ser considerada estável é descrita pelo teorema de Lagrange-Dirichlet, que afirma, segundo Bažant e Cedolin [22], que um sistema onde atuem apenas

forças conservativas e dissipativas é estável se a energia potencial possuir um mínimo local. Isso ocorre quando a segunda variação da energia é positiva, ou seja:

$$\delta^2\Pi = \frac{1}{2!}\delta Y_i \frac{\partial \Pi}{\partial Y_i \partial Y_j} \delta Y_j = \frac{1}{2}\delta Y_i \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_i \partial Y_j} \delta Y_j = \frac{1}{2}\delta \vec{Y}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \delta \vec{Y} > 0 \quad (13)$$

Da Eq. (13), conclui-se que a positividade da matriz Hessiana garante a estabilidade do sistema. Um sistema deixa de ser estável quando, para algum  $\delta \vec{Y}$ , tem-se  $\delta^2\Pi < 0$ . Contudo, para que o sistema alcance uma situação de instabilidade, um ponto crítico, no qual  $\delta^2\Pi = 0$  para algum  $\delta \vec{Y}$ , deve ser ultrapassado. Isso equivale a dizer que pelo menos um autovalor da matriz Hessiana deve ser nulo, tornando o equilíbrio crítico necessariamente caracterizado por:

$$\det(\mathbf{H}) = 0 \quad (14)$$

A matriz Hessiana, apresentada na expressão Eq. (8), possui duas parcelas. Em um regime de pequenos deslocamentos, observa-se que a primeira parcela se aproxima da matriz de rigidez linear e a segunda parcela é diretamente proporcional ao nível de tensão atuante. Essas parcelas são denominadas de rigidez elástica e geométrica, respectivamente, e são fornecidas como:

$$\mathbf{H}^E = \int_{V_0} \left( \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \vec{Y}} \Big|_{\vec{Y}=\vec{X}} : \mathbf{c} : \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial \vec{Y}} \Big|_{\vec{Y}=\vec{X}} \right) dV_0 \quad (15)$$

$$\mathbf{H}^G = \int_{V_0} \left( \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} \Big|_{\vec{Y}=\vec{X}} \right) dV_0 \quad (16)$$

Na análise linear de estabilidade, a configuração inicial do sistema é tomada como referência. Considerando um regime de pequenos deslocamentos, o problema iterativo apresentado na seção anterior se reduz à resolução de um sistema linear. De fato, tem-se que na configuração inicial a tensão é nula, anulando-se, portanto, a matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{H}^G$  e a força interna  $\vec{F}^{int}$ . A matriz de rigidez elástica  $\mathbf{H}^E$  e a força externa  $\vec{F}^{ext}$  não dependem de  $\vec{Y}$ . Portanto, o processo iterativo apresentado na seção 2 se resume à resolução do seguinte sistema linear:

$$\mathbf{H}^E \cdot \vec{u} = \vec{F}^{ext} \quad (17)$$

em que  $\vec{u}$  é o vetor de deslocamentos nodais.

Considerando que  $\bar{\mathbf{S}}$  é o tensor de tensões na situação de equilíbrio crítico, tem-se que  $\bar{\mathbf{S}} = \lambda \mathbf{S}$ , sendo  $\mathbf{S}$  o tensor de tensões obtido a partir do vetor de deslocamentos  $\vec{u}$  fornecido pela Eq. (17) e  $\lambda$  o fator de carga que leva ao equilíbrio crítico. O fator  $\lambda$  é então determinado a partir da Eq. (14) como:

$$\det(\mathbf{H}^E + \lambda \mathbf{H}^G) = 0 \quad (18)$$

que remete ao seguinte problema generalizado de autovalor:

$$(\mathbf{H}^E + \lambda \mathbf{H}^G) \cdot \vec{v} = \vec{0} \quad (19)$$

sendo  $\lambda$  agora interpretado como sendo os autovalores e  $\vec{v}$  os autovetores (modos de instabilidade).

Para a resolução numérica deste problema de autovalor, foram utilizadas rotinas da biblioteca ARPACK [23], dada a sua eficiência para operação com matrizes esparsas. As rotinas são baseadas numa versão melhorada do algoritmo de Lanczos [24], denominada *Implicit Restarted Lanczos Method* (IRLM), que possui eficiência conhecida para diversos tipos de problemas, incluindo o de estabilidade estrutural.

## 4 Programa computacional

Nesta seção é apresentado o programa desenvolvido, destacando-se suas principais funcionalidades. Para a implementação da interface gráfica, foi utilizada a linguagem Object Pascal em ambiente de desenvolvimento Delphi.

Inicialmente apresenta-se a etapa de pré-processamento, que compreende a inserção das informações de entrada e geração de malha. Em seguida comenta-se sobre a etapa de processamento, que compreende a implementação computacional de todo o processo de cálculo descrito nas seções anteriores. Por fim, apresenta-se a etapa de pós-processamento, que resulta na exibição dos resultados obtidos. Para facilitar o entendimento, essas etapas são apresentadas com a utilização de um exemplo modelo.

A janela principal do programa desenvolvido está apresentada na Fig. 3. Na figura, observa-se uma área de representação gráfica de geometria, discretização e condições de contorno aplicadas e uma barra de ferramentas, com a qual é possível a execução de todas as funcionalidades disponíveis no programa.

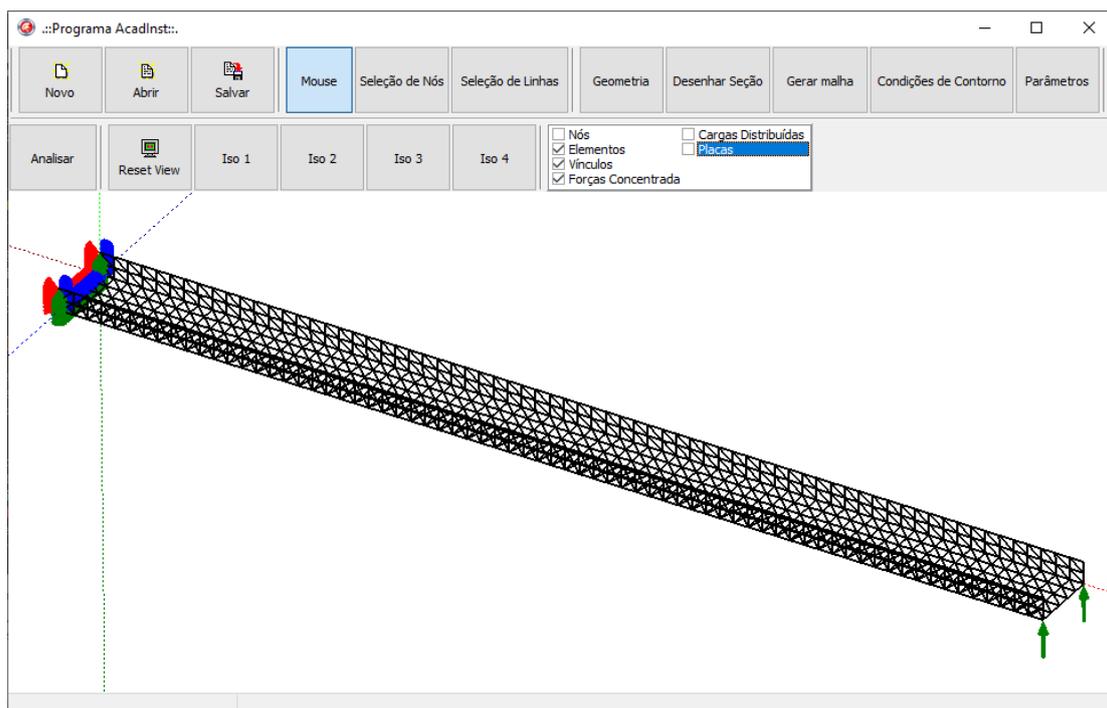


Figura 3. Janela principal do programa

### 4.1 Inserção de geometria, material e discretização

Ao clicar no botão “Geometria”, abre-se a janela apresentada na Fig. 4. Nela é possível inserir as informações sobre a geometria da seção transversal, sobre a discretização e sobre o material a ser utilizado em cada parte componente do perfil.

As seguintes propriedades do material, aqui assumido com comportamento elástico-linear isótropo, devem ser inseridas: módulo de elasticidade ( $E$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). Com relação à geometria da seção transversal, devem ser inseridos os chamados nós naturais, que são os pontos utilizados para definir a forma da seção. Esses pontos são referenciados no plano  $YZ$ , sendo  $X$  o eixo longitudinal da

peça analisada. A conectividade entre os nós naturais geram as denominadas placas ou paredes, que são as partes componentes do perfil. A essas placas atribui-se material, espessura e número de divisões em elementos finitos ao longo da seção transversal.

Para ilustrar as entidades que compõem a seção transversal, apresenta-se na Fig. 5 a seção utilizada no exemplo modelo. Na figura, os nós naturais representam os vértices e os nós intermediários delimitam os elementos finitos, definindo a discretização de cada placa/parede.

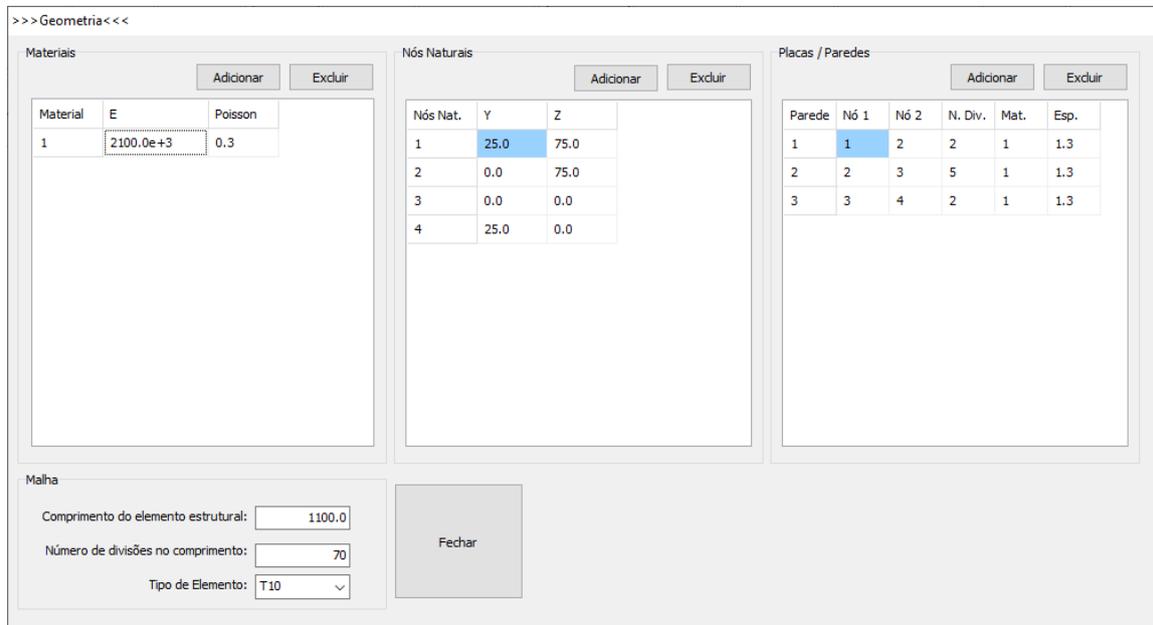


Figura 4. Janela para inserção dos dados referentes à geometria e ao material

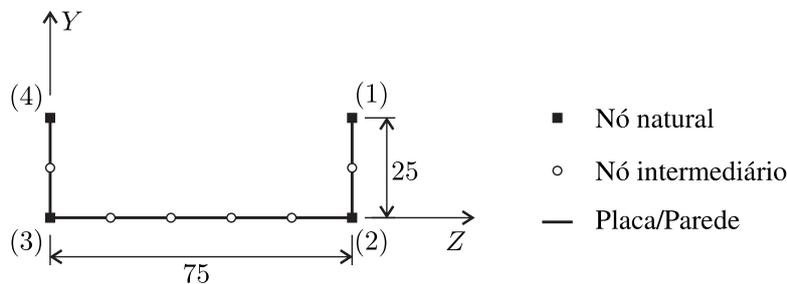


Figura 5. Partes componentes da seção transversal do exemplo modelo

Por fim, atribui-se o comprimento da peça estrutural, o número de elementos ao longo desse comprimento e o tipo de elemento finito utilizado na discretização. Foram estabelecidos alguns tipos elementos finitos para a discretização. São eles: T3, T6, T10, Q4, Q9 e Q16. A letra inicial representa o tipo de elemento, se triangular (T) ou quadrilateral (Q), e o número em seguida indica a quantidade de nós que o elemento possui. Contudo, recomenda-se a utilização de elementos de alta ordem, como o T10 e o Q16, para evitar problemas de travamento em decorrência da adoção de lei constitutiva completa.

#### 4.2 Inserção das condições de contorno

A aplicação das condições de contorno pode ser realizada para nós individuais ou para uma linha de nós, sendo a seleção dessas regiões realizada a partir dos botões “Seleção de Nós” e “Seleção de Linhas” presentes na interface principal apresentada na Fig. 3.

As condições de contorno possíveis de serem inseridas no programa são restrições nodais em deslocamentos, forças concentradas e forças distribuídas ao longo de uma linha. A aplicação é realizada após clicar no botão “Condições de Contorno”, que abre a janela apresentada na Fig. 6.

A representação gráfica das condições de contorno aplicadas seguem a seguinte convenção de cores segundo a direção de aplicação: vermelho para eixo  $X$ , verde para eixo  $Y$  e azul para eixo  $Z$ . A exceção é para as forças distribuídas, que são representadas por meio de um cilindro na cor ciano, sendo o valor e a direção de aplicação possíveis de serem verificadas na barra de status a partir do posicionamento do cursor sobre a condição aplicada.

Figura 6. Janela para inserção das condições de contorno

### 4.3 Determinação e visualização dos resultados

Os últimos parâmetros a serem fornecidos ao programa são o valor da tolerância para a rotina da biblioteca ARPACK e o número de modos de instabilidade a serem determinados. Esses valores são inseridos na janela da Fig. 7, que é aberta ao clicar no botão “Parâmetros”.

Figura 7. Janela para inserção dos parâmetros para a resolução do problema

Após a inserção de todas as informações necessárias para a execução do programa, procede-se a etapa de processamento, iniciada pelo botão “Analisar”. A implementação desta etapa foi realizada em linguagem FORTRAN 90, contemplando toda a formulação descrita nas seções 2 e 3. Finalizada a análise, uma aba na lateral direita é aberta, permitindo a visualização dos resultados, conforme Fig. 8.

Ao clicar no botão “Autovalores”, presente na aba de resultados, abre-se a janela indicada na Fig. 9. Nela, pode-se visualizar tanto os autovalores solicitados quanto o erro residual obtido pela seguinte fórmula:

$$res = \frac{\|(\mathbf{H}^E + \lambda \mathbf{H}^G) \cdot \vec{u}\|}{|\lambda|} \quad (20)$$

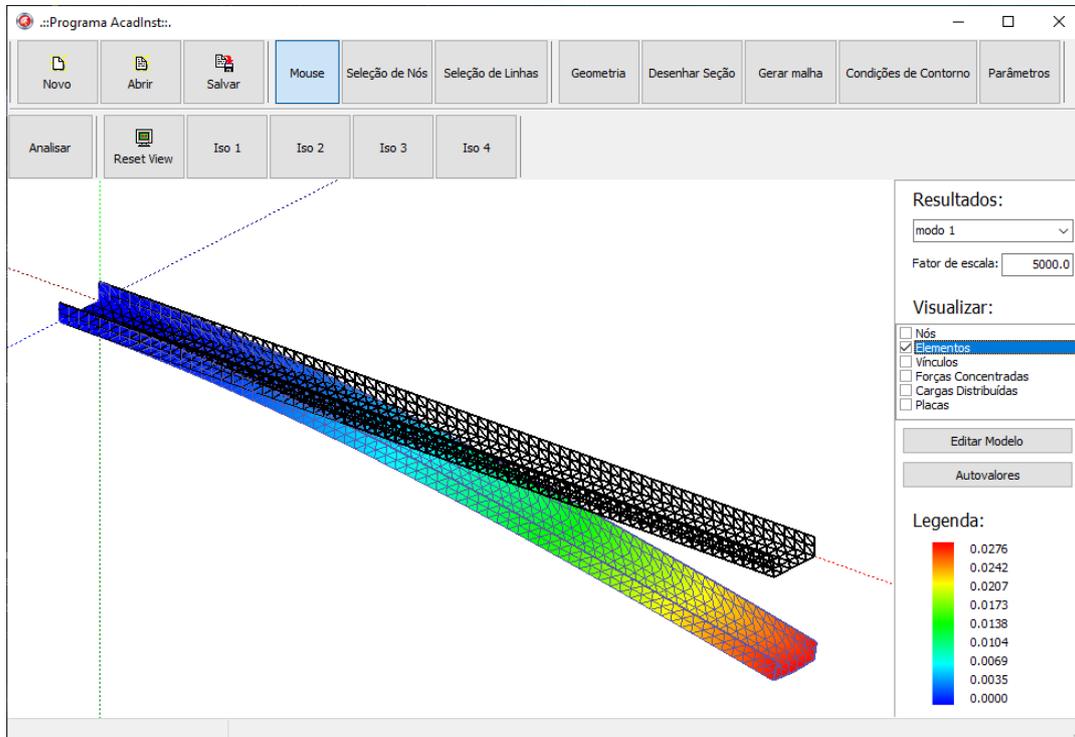


Figura 8. Janela de exibição dos resultados

>>> Resultados <<<

Resultados:

No.	Autovalores	Erro solução
1	327.485331	1.028903E-05
2	1180.114578	2.322835E-06
3	1219.358492	4.884087E-07
4	1267.052124	2.068283E-07
5	1314.696613	1.156721E-06
6	1326.690960	3.915099E-08
7	1380.886400	2.237367E-07
8	1389.020544	5.848653E-07
9	1443.758633	1.021273E-06
10	1449.583327	1.411420E-06

Fechar

Figura 9. Janela de exibição dos autovalores determinados

Acréscimo de funcionalidades e melhorias das já existentes podem ser realizadas em trabalhos futuros. Contudo, o programa atual já proporciona uma ferramenta de grande utilidade no âmbito acadêmico.

## 5 Exemplos numéricos

Nesta seção são apresentados exemplos para validação do programa desenvolvido. Foi utilizado para validação dos resultados o *software* comercial ANSYS® [25], no qual adotou-se o elemento SHELL281, elemento quadrilateral de 8 nós, sendo este o elemento de maior ordem disponível para seleção. No programa desenvolvido utilizou-se o elemento Q16, pois, devido à utilização de lei constitutiva completa, um elemento de alta ordem foi necessário para se evitar o fenômeno de travamento volumétrico. A utilização de um elemento quadrilateral foi escolhida devido à facilidade de geração de malhas simétricas.

Os dados comuns aos exemplos apresentados a seguir são:  $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ , espessura  $t = 0.6 \text{ cm}$  e carga compressiva  $q = 1.0 \text{ kN/cm}$ .

### 5.1 Perfil U

O esquema estático adotado neste exemplo é o apresentado na Fig. 10, na qual o perfil possui uma extremidade fixa e outra simplesmente apoiada (deslocamento axial e giros são permitidos). A discretização adotada consiste de 60 elementos ao longo do comprimento e 9 ao longo da seção transversal, totalizando 540 elementos finitos e 5068 nós. Adotou-se o mesmo número de elementos para a discretização no ANSYS® [25].

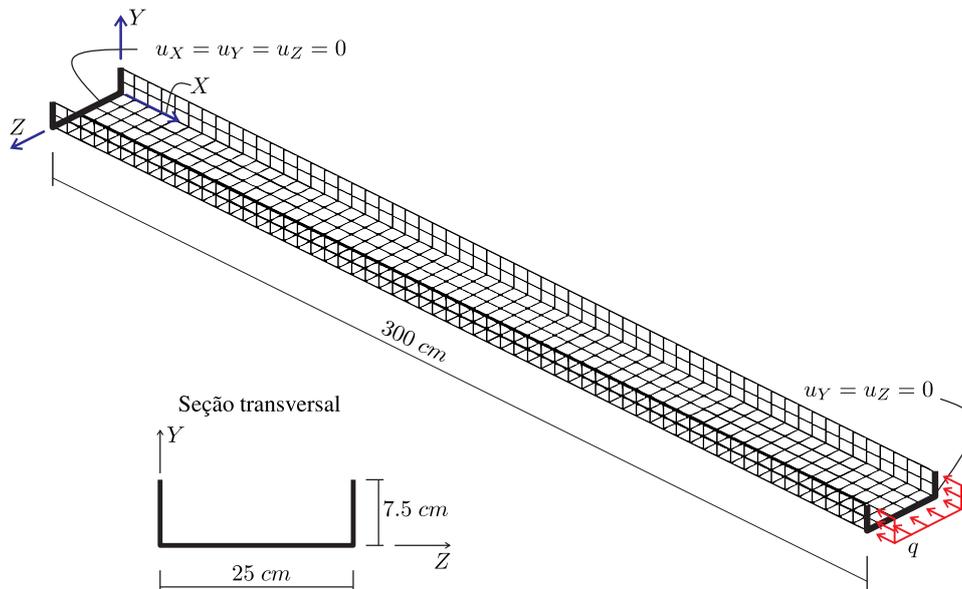


Figura 10. Esquema estático adotado para o perfil U e dimensões de interesse

Os quatro primeiros autovalores obtidos por meio do programa desenvolvido e do *software* ANSYS® [25] estão apresentados na Tabela 1, juntamente com o percentual de diferença relativa. A partir destes resultados, observa-se uma boa aderência dos valores obtidos com os valores de referência, com diferença relativa máxima de 0.55%.

Tabela 1. Autovalores  $\lambda$  para perfil U comprimido

Modo	ANSYS® [25]	Presente Trabalho	Dif.(%)
1	13.984	13.957	0.19
2	19.432	19.514	0.42
3	27.589	27.740	0.55
4	27.683	27.829	0.53

Os modos de instabilidade obtidos no programa desenvolvido e no ANSYS® [25] estão apresentados nas Figuras 11 e 12, respectivamente. Os resultados foram idênticos para os dois programas, indicando que, mesmo as formulações sendo diferentes, os resultados devem ser próximos.

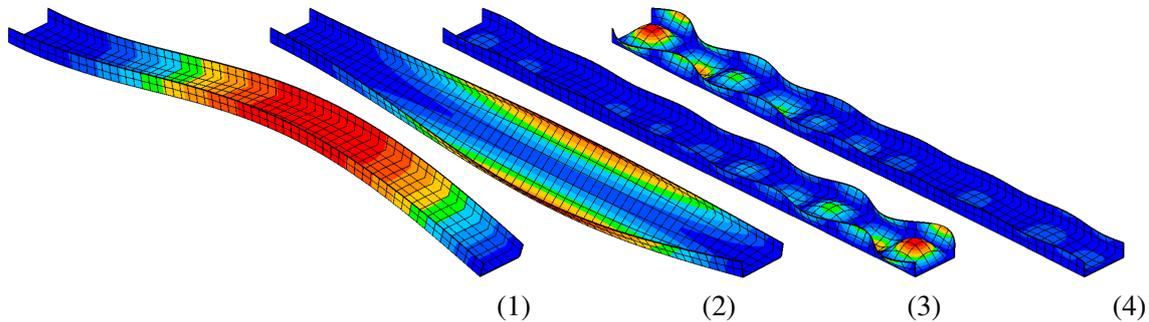


Figura 11. Modos de instabilidade de perfil U comprimido

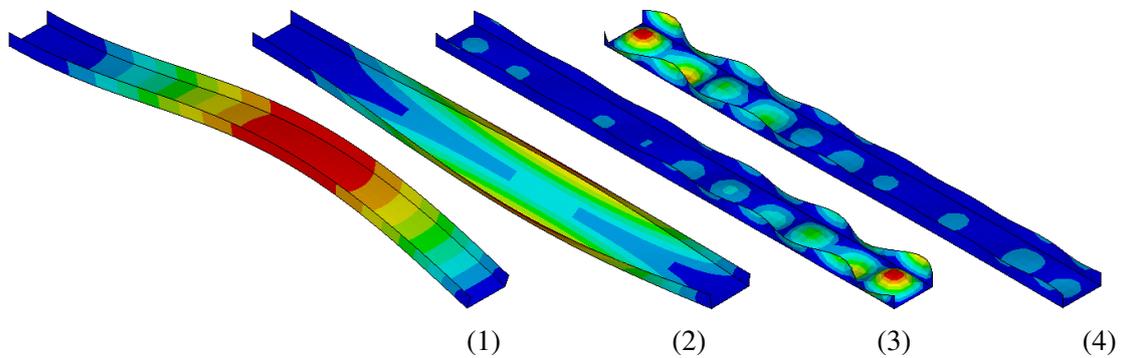


Figura 12. Modos de instabilidade de perfil U comprimido obtidos com o software ANSYS® [25]

## 5.2 Perfil I

Neste exemplo adotou-se o mesmo esquema estático do exemplo anterior, conforme observado na Fig. 13. A discretização adotada consiste de 70 elementos ao longo do comprimento e 13 ao longo da seção transversal, totalizando 910 elementos finitos e 8440 nós. Adotou-se o mesmo número de elementos para a discretização no ANSYS® [25].

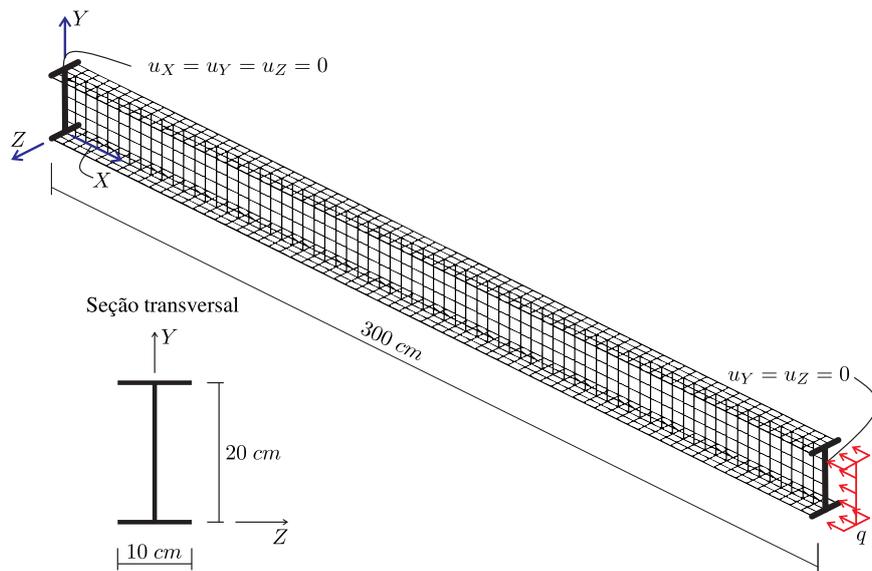


Figura 13. Esquema estático adotado para o perfil I e dimensões de interesse

Os quatro primeiros autovalores obtidos por meio do programa desenvolvido e do *software* ANSYS® [25] estão apresentados na Tabela 2, juntamente com o percentual de diferença relativa. Assim como no exemplo anterior, observa-se uma boa aderência dos valores obtidos com os valores de referência, com diferenças relativas menores que 1%.

Tabela 2. Autovalores  $\lambda$  para perfil I comprimido

Modo	ANSYS® [25]	Presente Trabalho	Dif.(%)
1	11.722	11.702	0.17
2	24.576	24.796	0.90
3	33.463	33.325	0.41
4	47.388	47.463	0.16

Os modos de instabilidade obtidos no programa desenvolvido e no ANSYS® [25] estão apresentados nas Figuras 14 e 15, respectivamente. Da mesma forma que no exemplo anterior, os resultados foram idênticos para os dois programas, indicando uma equivalência entre as formulações comparadas.

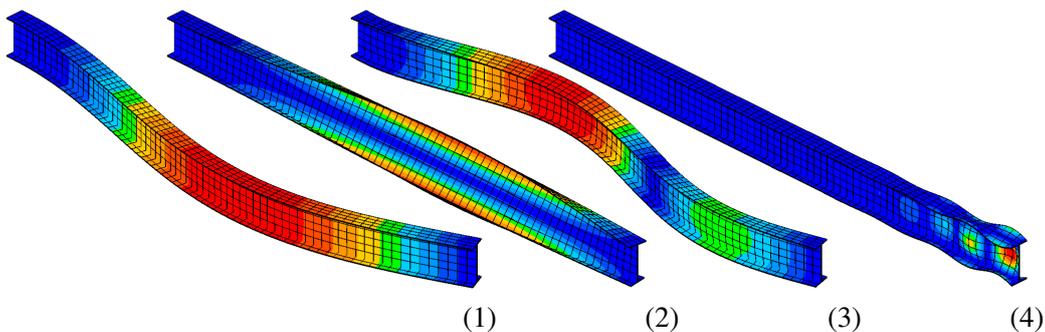
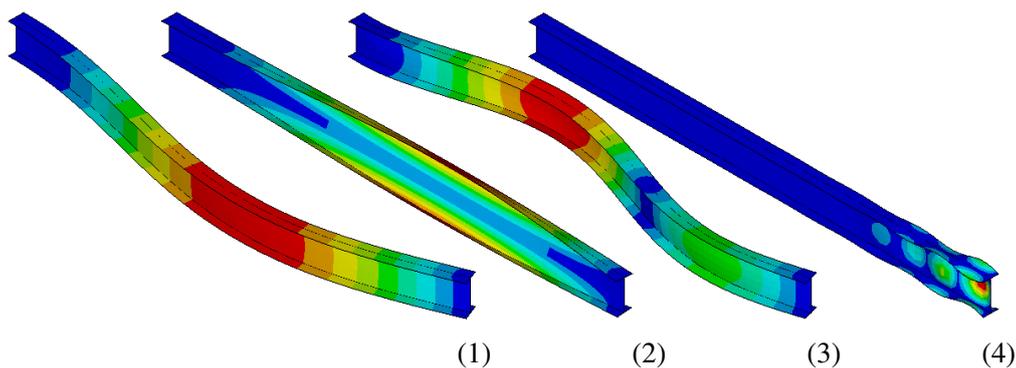


Figura 14. Modos de instabilidade de perfil I comprimido

Figura 15. Modos de instabilidade de perfil I comprimido obtidos com o *software* ANSYS® [25]

### 5.3 Perfil com paredes inclinadas

O esquema estático adotado neste exemplo é o apresentado na Fig. 16, em que ambas as extremidades estão simplesmente apoiadas. Um vínculo restringindo o deslocamento segundo a direção  $X$  foi inserido no meio do vão para eliminar o deslocamento de corpo rígido. A discretização adotada consiste de 40 elementos ao longo do comprimento e 17 ao longo da seção transversal, totalizando 680 elementos finitos e 6292 nós. Adotou-se o mesmo número de elementos para a discretização no ANSYS® [25].

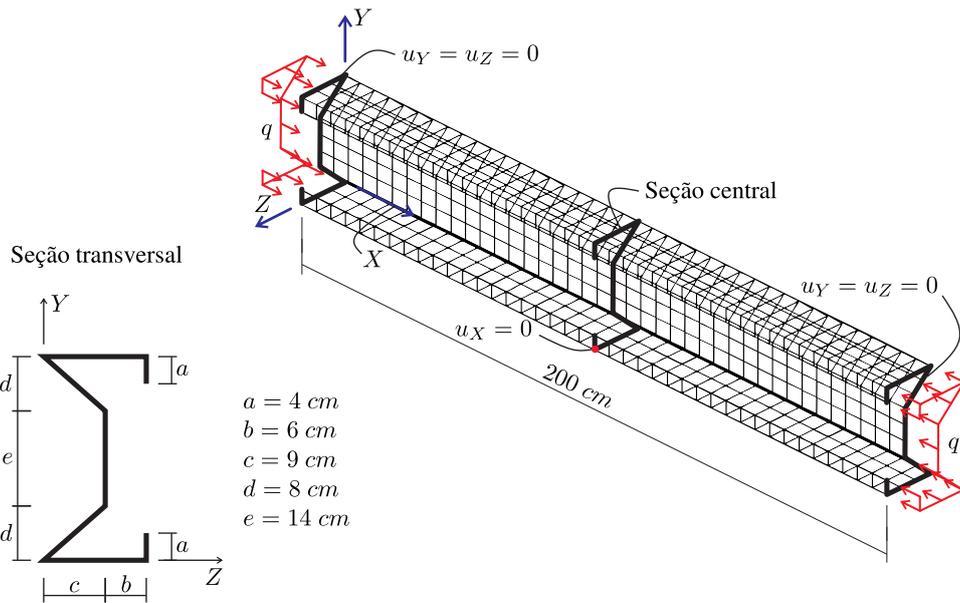


Figura 16. Esquema estático adotado para o perfil e dimensões de interesse

Os quatro primeiros autovalores obtidos por meio do programa desenvolvido e do *software* ANSYS® [25] estão apresentados na Tabela 3, juntamente com o percentual de diferença relativa. Neste exemplo observa-se diferenças mais significativas nos resultados. Os valores aqui obtidos foram significativamente menores que os valores de referência, indicando a manifestação da flexibilização introduzida à cinemática do problema. Essa diferença pode ter ocorrido devido à geometria mais complexa adotada, aliado à presença de mais regiões de conexão entre as paredes do perfil.

Tabela 3. Autovalores  $\lambda$  para perfil comprimido

Modo	ANSYS® [25]	Presente Trabalho	Dif.(%)
1	44.329	41.285	6.87
2	46.972	45.765	2.57
3	50.766	46.136	9.12
4	55.304	52.902	4.34

Os modos de instabilidade obtidos no programa desenvolvido e no ANSYS® [25] estão apresentados nas Figuras 17 e 18, respectivamente. Os resultados foram idênticos para os dois programas, indicando que apesar dos autovalores estarem com diferença relativa maior quando comparado com os exemplos anteriores, eles representam o mesmo modo crítico.

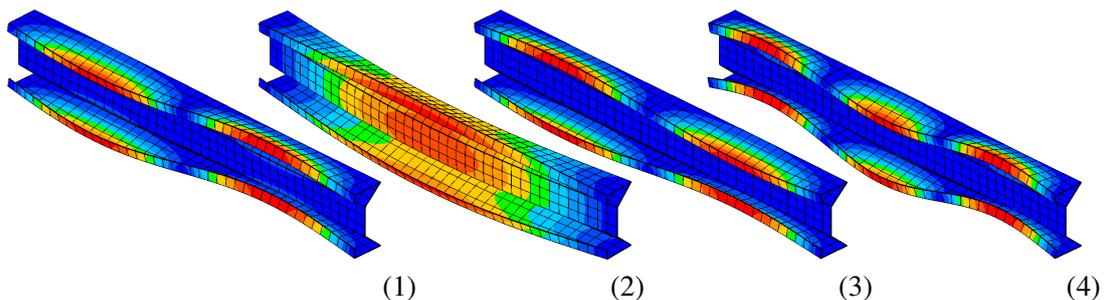


Figura 17. Modos de instabilidade do perfil comprimido

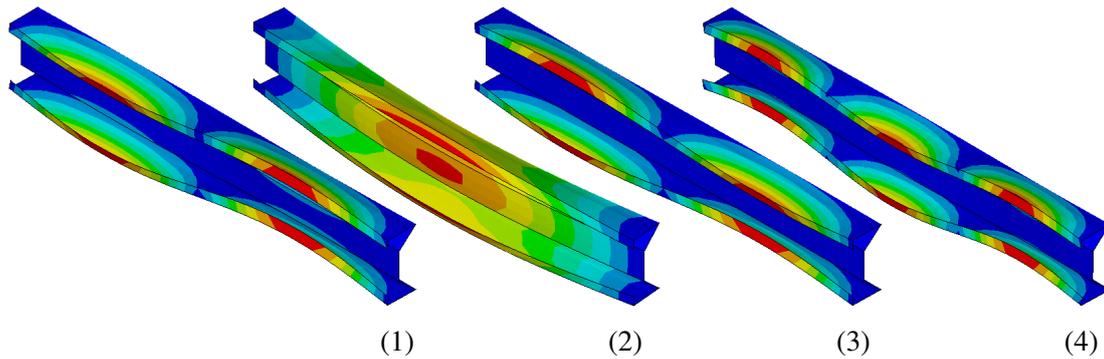


Figura 18. Modos de instabilidade do perfil comprimido obtidos com o *software* ANSYS® [25]

Para verificar se a diferença entre os autovalores obtidos é devido somente à discretização adotada, a análise foi repetida adotando-se malhas mais refinadas no *software* ANSYS® [25]. Os resultados estão apresentados na Tabela 4.

Tabela 4. Autovalores para diferentes discretizações realizadas no ANSYS® [25]

Modo	680 elem.	2720 elem.	6120 elem.
1	44.329	44.219	44.195
2	46.972	46.952	46.948
3	50.766	50.647	50.620
4	55.304	55.177	55.155

Dos resultados apresentados na Tabela 4, observa-se que os valores variam pouco com o aumento da discretização. Entre as duas discretizações mais refinadas, a maior diferença relativa entre os valores é de apenas 0.05%, indicando convergência dos resultados. Pode-se concluir então que a diferença observada nos valores iniciais não se dá devido à discretização, mas sim em decorrência da cinemática adotada.

## 6 Conclusões

Este trabalho teve como objetivo a elaboração de uma ferramenta computacional para a realização de análise linear de estabilidade em perfis de parede fina. Análise esta que consiste na determinação de cargas críticas e seus respectivos modos de instabilidade. Foi então utilizada uma formulação posicional do MEF para elementos de casca, que leva em consideração a não-linearidade geométrica com descrição lagrangiana total, tornando possível a realização de análises de estabilidade.

Conforme os exemplos apresentados, conclui-se que a formulação utilizada é adequada para esse tipo de análise, com resultados bem próximos aos de um programa comercial e gerando respostas mais flexíveis em problemas com geometria complexa. Há ainda uma vantagem em razão do elemento finito de casca utilizado que, por possuir vetores generalizados ao invés de giros como graus de liberdade, torna o desenvolvimento numérico mais simples, justamente por não necessitar de estratégias para resolver o problema da não comutatividade de giros finitos.

Com relação à análise linear de estabilidade, deve-se ressaltar aqui que, na metodologia tradicional, a mesma é descrita a partir de uma formulação geometricamente linear, sendo a não-linearidade introduzida por meio do acréscimo da parcela de rigidez dependente da tensão, a qual é obtida de forma simplificada a partir da consideração de pequenos deslocamentos. Além disso, a parcela de rigidez adicionada é função linear dos deslocamentos, implicando também numa relação linear entre o carregamento aplicado e os autovalores obtidos.

Em contrapartida, neste trabalho optou-se por partir de uma formulação não-linear geometricamente exata e simplificá-la para permitir a realização de análises lineares de estabilidade. Entretanto,

foram mantidas as medidas de deformação e de tensão originais, sendo ambas as grandezas funções não-lineares dos deslocamentos. Por conseguinte, os autovalores se relacionam de forma não-linear com o carregamento aplicado, indicando um diferencial da formulação aqui desenvolvida.

Por fim, cita-se o desenvolvimento da interface gráfica, incluindo as rotinas para geração da malha de elementos finitos e para pós-processamento dos resultados. Com a implementação dessas rotinas, todas as funções do programa podem ser executadas de forma autônoma, sem trazer dependências com outros programas.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2018/19288-8, pelo suporte financeiro que permitiu a realização deste trabalho.

## Referências

- [1] Euler, L., 1744. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Laussanae et Genevae, Apud Marcum-Michaellem, Bousquet et Socios.
- [2] Bryan, G. H., 1888. On the stability of elastic systems. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Mathematical and physical sciences*, vol. 6.
- [3] Lyapunov, A. M., 1982. *The General Problem of the Stability of Motion*. Kharkov Mathematical Society, Harkov.
- [4] Southwell, R. V., 1914. On the general theory of elastic stability. *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, vol. 213, pp. 187–244.
- [5] Koiter, W., 1967. *On the stability of elastic equilibrium*. National Aeronautics and Space Administration.
- [6] Schardt, R., 1966. Eine erweiterung der technischen biegetheorie zur berechnung prismatischer faltwerke. *Stahlbau*, vol. 35, pp. 161–171.
- [7] Schafer, B., 1997. *Cold-Formed Steel Behavior and Design: Analytical and Numerical Modeling of Elements and Members with Longitudinal Stiffeners*. PhD thesis, Cornell University, Ithaca.
- [8] Dinis, P., Camotim, D., & Silvestre, N., 2006. GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrarily ‘branched’ open cross-sections”. *Thin-Walled Structures*, vol. 44, n. 1, pp. 20–38.
- [9] Bebiano, R., Silvestre, N., & Camotim, D., 2007. GBT formulation to analyze the buckling behavior of thin-walled members subjected to non-uniform bending. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 07, n. 01, pp. 23–54.
- [10] Gonçalves, R., Dinis, P., & Camotim, D., 2009. GBT formulation to analyse the first-order and buckling behaviour of thin-walled members with arbitrary cross-sections. *Thin-Walled Structures*, vol. 47, n. 5, pp. 583–600.
- [11] Basaglia, C., Camotim, D., & Coda, H., 2014. Behaviour, failure and DSM design of cold-formed steel beams: Influence of the load point of application. *Thin-Walled Structures*, vol. 81, pp. 78–88.
- [12] Basaglia, C., Camotim, D., & Silvestre, N., 2019. GBT-based buckling analysis of steel cylindrical shells under combinations of compression and external pressure. *Thin-Walled Structures*, vol. 144, pp. 106274.

- [13] Ádány, S. & Schafer, B., 2008. A full modal decomposition of thin-walled, single-branched open cross-section members via the constrained finite strip method. *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 64, n. 1, pp. 12–29.
- [14] Ádány, S. & Schafer, B., 2014. Generalized constrained finite strip method for thin-walled members with arbitrary cross-section: Secondary modes, orthogonality, examples. *Thin-Walled Structures*, vol. 84, pp. 123–133.
- [15] Naderian, H. & Ronagh, H., 2015. Buckling analysis of thin-walled cold-formed steel structural members using complex finite strip method. *Thin-Walled Structures*, vol. 90, pp. 74–83.
- [16] Rendall, M. A., Hancock, G. J., & Rasmussen, K. J., 2017. The generalised constrained finite strip method for thin-walled members in shear. *Thin-Walled Structures*, vol. 117, pp. 294–302.
- [17] Shojaee, T., Mohammadi, B., Madoliat, R., & Salimi-Majd, D., 2019. Development of a finite strip method for efficient prediction of buckling and post-buckling in composite laminates containing a cutout with/without stiffener. *Composite Structures*, vol. 210, pp. 538–552.
- [18] Coda, H. B. & Paccola, R. R., 2007. An Alternative Positional FEM Formulation for Geometrically Non-linear Analysis of Shells: Curved Triangular Isoparametric Elements. *Computational Mechanics*, vol. 40, n. 1, pp. 185–200.
- [19] Coda, H. B. & Paccola, R. R., 2008. A positional FEM Formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 5, pp. 205–223.
- [20] Soares, H. B., Paccola, R. R., & Coda, H. B., 2019. Unconstrained Vector Positional Shell FEM formulation applied to thin-walled members instability analysis. *Thin-Walled Structures*, vol. 136, pp. 246–257.
- [21] Soares, H. B., 2019. Formulação e implementação numérica para análise de estabilidade de perfis de parede fina via MEF posicional. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- [22] Bažant, Z. P. & Cedolin, L., 2010. *Stability of Structures*. World Scientific, Singapore.
- [23] Lehoucq, R., Sorensen, D., & Yang, C., 1998. *ARPACK Users' Guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [24] Lanczos, C., 1950. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *J. Res. Natl. Bur. Stand. B*, vol. 45, pp. 255–282.
- [25] ANSYS®, 2019. *Academic Research Mechanical*. Release 19.2. ANSYS, Inc.