

EXTENSÃO DE PROGRAMA GRÁFICO PARA ANÁLISE DE VIBRAÇÕES DE MODELOS ESTRUTURAIS RETICULADOS

Pedro Cortez Lopes

Rafael Lopez Rangel

Luiz Fernando Martha

cortezpedro@tecgraf.puc-rio.br

rafaelrangel@tecgraf.puc-rio.br

lfm@tecgraf.puc-rio.br

Instituto Tecgraf de Desenvolvimento de Software Técnico-Científico da PUC-Rio

R. Marquês de São Vicente, 225 - Gávea, Rio de Janeiro - 22451-900 - RJ, Brazil

Abstract. This paper aims to present a user-friendly graphical tool for the dynamic analysis of reticulated structural models, such as trusses, frames and grillages, implemented entirely on Matlab®. The code was written as an addition to the LESM (Linear Elements Structure Model) program, an open source structural analysis software developed in Tecgraf/PUC-Rio, based on the object-oriented programming paradigm (OOP), with an interactive graphical interface for modeling and an educational approach. Four numerical solvers for obtaining the dynamic structural response were implemented. The system of differential equations of motion may be analyzed on its coupled form, where free and forced vibration are computed numerically, or on an uncoupled fashion, on the modal domain. On the second case, it is possible to obtain analytical solutions for free vibration. The vibration modes are found with the solution of the eigenvalue problem of an undamped oscillation system, achieved with a Matlab built-in function. Viscous damping is treated as proportional to mass and to stiffness. Consistent mass matrices were formulated for Euler-Bernoulli and Timoshenko beam bending behavior theories, using parameters that unify both approaches. Alternatively, lumped mass matrices were implemented as well. An effort in computer graphics was made to obtain multiple result visualization options. A new interactive dialog of the graphical user interface was created in order to display results on time and frequency domain, for each degree-of-freedom, being also possible to visualize phase portraits of the solution. In addition, animations to depict the dynamic behavior of the model were achieved.

Keywords: Dynamics, Vibration, Reticulated structures, Matlab, OOP, Educational tool.

1 Introdução

A análise dinâmica é um tópico de grande importância para a avaliação de riscos de ruptura e do atendimento de critérios de desempenho estrutural. A prática da Engenharia moderna almeja projetos eficientes, materiais mais resistentes e redução do consumo de recursos, o que, por vezes, leva à concepção de peças estruturais de considerável esbelte, suscetíveis a significativo comportamento dinâmico. Ademais, há de ser considerada a atual perspectiva de inovações e avanços quanto à construção em cenários naturais desafiadores, como a instalação de parques eólicos em alto-mar, onde lida-se com estruturas sujeitas a severas condições de solicitação dinâmica. Desta forma, a área de análise dinâmica, ou de vibrações, é estabelecida como importante parte da prática de análise estrutural.

De acordo com Lima e Santos [1], o objetivo do estudo de vibrações estruturais é o de avaliar os campos de deslocamento, velocidade e aceleração de determinado modelo, submetido a carregamento dinâmico e provido de condições iniciais. No contexto da Engenharia Civil, grande parte das solicitações atuantes em estruturas são de natureza dinâmica. No entanto, é comum a suposição de que a variação das resultantes seja de pequena magnitude e, portanto, as cargas são admitidas como estáticas, significando que forças de inércia e amortecimento são usualmente desprezadas. Esta consideração é válida para diversas aplicações, mas não é sempre representativa do comportamento real da estrutura em estudo, sendo especialmente problemática em casos onde existam variações não desprezíveis do carregamento no tempo. Tratando-se de análise linear, estudos das respostas estática e dinâmica do modelo podem ser realizados separadamente, de forma a caracterizar o comportamento de vibrações como variações em torno da configuração deformada estática obtida.

O objetivo deste artigo é o de apresentar uma ferramenta computacional gráfica-interativa, amigável a usuários, para a avaliação da resposta dinâmica de modelos estruturais compostos por elementos lineares reticulados. Neste, expõe-se a formulação e considerações adotadas para o problema de vibração de estruturas e resultados obtidos através das funcionalidades implementadas no programa. Todo o código foi desenvolvido no ambiente Matlab, como uma extensão do software de análise estrutural LESM (Linear Elements Structure Model), uma ferramenta de código aberto, bem documentada, baseada no paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO), originada e desenvolvida no Instituto Tecgraf/PUC-Rio para fins educacionais (Martha [2]). A modularidade, organização e documentação do código fonte provê base para novas implementações com relativa facilidade, como proposto por Rangel e Martha [3]. O programa conta com uma interface gráfica para a modelagem interativa e avaliação de resultados em 2D e 3D, sendo possível considerar cinco tipos de modelos de análise, treliças planas e espaciais, pórticos planos e espaciais, e grelhas. As duas principais teorias para o comportamento de flexão de elementos unidimensionais são consideradas, é possível adotar elementos de Euler-Bernoulli, também conhecidos como elementos de Navier, bem como elementos de Timoshenko. As formulações das matrizes locais de rigidez e de massa consistente com o campo de deslocamentos são feitas de forma que as mesmas expressões sejam válidas para ambas teorias, utilizando parâmetros multiplicadores adimensionais.

A solução do sistema matricial acoplado de equações diferenciais ordinárias (EDOs) que descreve o problema de vibração estrutural se dá pelo uso de um dos quatro métodos numéricos implementados. Os mais comumente adotados para problemas desta natureza, Newmark (Vaz [4]) e Wilson- θ (Soriano [5]) são disponibilizados, bem como um método explícito da família Runge-Kutta de quarta ordem (Chapra [6]) e outro implícito, Adams-Moulton de três passos (Quarteroni et al. [7]), pelo contexto educacional e para a possibilidade da comparação de resultados.

Vibrações livres e forçadas são computadas separadamente, para que a resposta obtida possa ser caracterizada como uma composição de ambos os comportamentos, e suas respectivas magnitudes possam ser avaliadas. Há ainda a possibilidade de serem obtidas soluções analíticas para oscilações livres, no espaço modal. Neste, os resultados são separados também por modo de vibração, permitindo a visualização da influência de cada frequência natural da estrutura em seu movimento, podendo ser verificado o risco de ressonância por cargas dinâmicas externas. Para que análises deste tipo sejam

realizadas, são necessárias operações preliminares à solução do problema, utilizando autovetores correspondentes aos modos naturais de vibração do modelo para tornar o sistema de EDOs desacoplado. Tais autovetores são obtidos pela solução do clássico problema de autovalor que caracteriza um modelo não-amortecido em vibrações livres (Soriano [5]), resolvido pelo uso de função disponibilizada pelo Matlab, *eig*.

A implementação do novo módulo de análise foi possível por meio da abstração da classe *Analysis Driver*, no contexto da POO, de forma a generalizar o comportamento das soluções lineares estática e dinâmica, cabendo à cada respectiva subclasse a concretização dos métodos para a obtenção da resposta estrutural. Além disso, uma estrutura de dados foi implementada para gerenciar os carregamentos dinâmicos nodais, admitindo que estes são caracterizados por amplitudes associadas a funções temporais.

2 Análise de vibração estrutural

De acordo com Tauchert [8], a análise dinâmica estrutural de modelos cujo comportamento é considerado linear pode ser descrita por um sistema matricial de EDOs do movimento. A avaliação do equilíbrio em cada grau de liberdade (GDL) de uma estrutura discretizada qualquer acarreta:

$$[M]\{\ddot{d}(t)\} + [C]\{\dot{d}(t)\} + [K]\{d(t)\} = \{F(t)\}. \quad (1)$$

Na Eq. (1), $[M]$, $[C]$ e $[K]$ correspondem às matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, enquanto os vetores $\{d(t)\}$ e $\{F(t)\}$ denotam deslocamentos e cargas externas associados a cada GDL. É interessante notar que, caso as solicitações estruturais sejam não-variantes no tempo e não existam condições iniciais que gerem vibrações livres, as resultantes de inércia e amortecimento podem ser desconsideradas, já que o campo de deslocamentos seria constante, levando ao clássico sistema de equações utilizado para análise matricial linear estática de estruturas.

2.1 Frequências e modos naturais de vibração

Admitindo um modelo estrutural não-amortecido em vibração livre, a Eq. (1) pode ser reduzida a

$$([K] - \omega^2 [M])\{d(t)\} = 0 \quad (2)$$

já que, conforme postulado por Tauchert [8], soluções periódicas seriam esperadas para o campo de deslocamentos caracterizado por $\{d(t)\}$. O termo ω corresponde aos valores das frequências angulares associadas aos modos naturais de vibração da estrutura. Uma possível solução para a Eq. (2) corresponde a um campo de deslocamentos nulos, no entanto esta não é de interesse, pois não provê informação alguma sobre o comportamento dinâmico do modelo, levando à conclusão de que, para a análise modal de vibrações, um problema de autovalor deve ser resolvido. O programa LESM lida com tal questão pelo uso da função *eig*, disponibilizada pelo Matlab. Os autovetores resultantes desta análise denotam os modos naturais de vibração da estrutura, sendo análogos a vetores unitários de deslocamento em cada GDL. A partir destes, é possível computar configurações deformadas dinâmicas que descrevem o comportamento de cada modo de vibração.

2.2 Solução transiente numérica

O sistema de EDOs exposto pela Eq. (1) é acoplado, ou seja, por meio deste, não existem soluções independentes para cada GDL, e soluções analíticas são inviáveis na maioria dos casos a serem analisados, portanto é comum o emprego de métodos numéricos de integração para a obtenção da resposta dinâmica. Quatro algoritmos de solução numérica foram disponibilizados, para que seja possível comparar resultados e avaliar a melhor resposta para cada modelo. Foram implementados os métodos usualmente mais adotados para análises numéricas de problemas de vibração, Newmark (Vaz [4]) e Wilson- θ (Soriano [5]), além de dois outros métodos comumente utilizados em contexto

educacional para a solução numérica de equações diferenciais, Adams-Moulton de três passos (Quarteroni et al. [7]) e um da família Runge-Kutta de quarta ordem (Chapra [6]). De acordo com Soriano [5], para análises de vibração, métodos explícitos, onde o próximo passo da solução é computado pela condição de equilíbrio do passo anterior, como os de Runge-Kutta, requerem grande discretização do intervalo de análise para a obtenção de resultados representativos da realidade, desta forma, é preferível que sejam utilizados métodos implícitos, como os outros três implementados neste trabalho.

2.3 Solução semi-analítica no espaço modal

É possível manipular a Eq. (1) para que seja analisado um sistema desacoplado de EDOs, considerando o espaço modal. Ao pré e pós-multiplicar as matrizes globais do problema pela matriz $[\Phi]$, que contém os autovetores relativos à solução da Eq. (2), como demonstrado para a matriz de rigidez na Eq. (4), o sistema matricial torna-se diagonal, caracterizando equações diferenciais independentes entre si, da forma:

$$[M_m] \{ \ddot{d}_m(t) \} + [C_m] \{ \dot{d}_m(t) \} + [K_m] \{ d_m(t) \} = \{ F_m(t) \}. \quad (3)$$

$$[K_m] = [\Phi]^T \cdot [K] \cdot [\Phi]. \quad (4)$$

Há de se observar que o vetor do carregamento também deve ser transformado por operação análoga. Neste caso, o sistema desacoplado com o qual passa-se a trabalhar tem como variáveis não mais o deslocamento de cada GDL, mas a contribuição de cada modo de vibração para o campo de deslocamentos de todo o modelo. Apesar de necessitar de mais operações, o que representa um custo de eficiência computacional, esta metodologia permite que sejam obtidas soluções analíticas para vibrações livres, conforme exposto por Vaz [4]. Em alguns casos, seria também viável a obtenção de soluções analíticas para problemas de vibração forçada, entretanto, pela possibilidade da consideração de múltiplas cargas dinâmicas, de diferentes tipos, atuando em diversos GDLs e não necessariamente no mesmo intervalo de tempo, tais soluções podem ser de elevada complexidade, portanto, o programa LESM busca sempre respostas numéricas para vibração forçada, seja o sistema de EDOs acoplado ou não.

A obtenção de resultados como contribuições separadas de cada modo natural de vibração é de grande interesse à avaliação de riscos de ruptura e de critérios de desempenho estrutural, já que é possível verificar diretamente quais frequências naturais são mais excitadas por determinada solicitação externa, possibilitando averiguar a possibilidade de ocorrência de fenômenos de ressonância. No caso das soluções do sistema acoplado, a verificação de quais modos naturais de vibração mais trabalham em determinado modelo é abordada computando o espectro da resposta dinâmica no domínio das frequências, por meio da Transformada Rápida de Fourier, como estipulado por Quarteroni et al. [7].

2.4 Matrizes locais de massa

A montagem da matriz global de massa de um modelo estrutural reticulado é análoga ao procedimento clássico adotado para a matriz global de rigidez de modelos desta natureza, como explicado por Martha [2]. Desta forma, busca-se definir uma formulação para as matrizes locais de massa, de cada elemento, para que estas componham o problema global.

Uma simplificação comumente utilizada para a descrição da massa de um elemento unidimensional consiste na distribuição desta em massas pontuais em suas extremidades nodais. Sendo esta distribuição caracterizada por uma simples divisão em duas partes, de forma que existam massas nodais apenas associadas aos GDLs de translação, a matriz local resultante é dita concentrada. Há também a possibilidade de adotar uma distribuição nodal consistente com o campo de deslocamentos de determinado elemento, caracterizado por suas funções de forma. Assim, podem existir coeficientes de massa associados a GDLs de translação e de rotação, sendo tal matriz conhecida como consistente.

Esta é obtida por:

$$[M_e] = \int_V \left(\rho [N]^T [N] \right) dv. \quad (5)$$

Na equação anterior, $[M_e]$ corresponde à matriz local de massa consistente, $[N]$ é a matriz de funções de forma, ρ é a densidade do material e v é o volume do elemento e . As funções de forma adotadas no módulo de análise do programa LESM, conforme exposto por Rangel e Martha [3], constam de parâmetros adimensionais, derivados do parâmetro de Timoshenko, exposto pela Eq. (6), que unificam as teorias de flexão de vigas de Timoshenko e de Euler-Bernoulli, sendo utilizadas tanto para a definição das matrizes locais de rigidez, quanto para as matrizes locais de massa consistente.

$$\Omega = \frac{EI}{GA_s} \cdot \frac{1}{L^2}. \quad (6)$$

A Eq. (6) denota a relação entre a resistência à flexão e à distorção por cisalhamento de determinada peça estrutural unidimensional. E e G correspondem, respectivamente, ao módulo de elasticidade e de cisalhamento do material, I é o momento de inércia e A_s é a área efetiva de cisalhamento da seção transversal do elemento, e L é o comprimento deste. Nota-se que a consideração do módulo de cisalhamento com valor tendendo ao infinito, isto é, desprezando a distorção da seção por cisalhamento, leva o parâmetro adimensional Ω a ter valor nulo. Neste caso, as formulações adotadas para rigidez e massa consistente coincidem com a teoria de Euler-Bernoulli.

De acordo com Felippa [9], a massa local de um elemento pode também ser considerada como uma combinação linear das matrizes consistente e concentrada, baseando-se em um parâmetro de proporcionalidade, sendo denominada massa customizada. O mesmo demonstra que, para análises transientes no domínio do tempo, as matrizes consistentes são mais recomendadas para a obtenção de bons resultados, enquanto que, para análises no domínio da frequência, convém o uso de matrizes customizadas com $\mu = 1/2$, conforme exposto em:

$$[M_{customizada}] = (1 - \mu)[M_{concentrada}] + \mu[M_{consistente}]. \quad (7)$$

Na Eq. (7), há de se observar que o parâmetro μ deve ter valor contido entre 0 e 1.

Foram implementadas as três possibilidades de consideração de massa no programa LESM, por motivos educacionais, e para que usuários possam comparar resultados e aferir quais considerações melhor representam o comportamento de determinada estrutura.

2.5 Amortecimento

No programa LESM, o amortecimento viscoso atuante no movimento oscilatório é considerado como uma combinação linear da rigidez e da massa do modelo, fazendo uso dos coeficientes de amortecimento de Rayleigh, como proposto por Lima e Santos [1]. Esta prática faz com que problemas numéricos, relacionados ao termo associado à primeira derivada do campo de deslocamentos, sejam evitados na solução numérica do sistema matricial de EDOs. O coeficiente de amortecimento proporcional à massa α e o coeficiente de proporcionalidade à rigidez β , expostos na Eq. (9), podem ser diretamente informados por usuários, ou computados a partir das taxas de amortecimento crítico do primeiro e segundo modos naturais de vibração, ξ_1 e ξ_2 , respectivamente, como demonstrado em:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2\omega_1 & \omega_1/2 \\ 1/2\omega_2 & \omega_2/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}. \quad (8)$$

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]. \quad (9)$$

Esta é uma consideração usual, adotada por representar satisfatoriamente os problemas de dinâmica estrutural. Alternativamente, a matriz global de amortecimento poderia ser montada de

forma análoga à matriz global de massa, a partir de matrizes locais de amortecimento, porém, por maior simplicidade, e para diminuir a possibilidade de erros numéricos significativos, o programa LESM atém-se à consideração do amortecimento conforme explicitado pela Eq. (9).

3 Carregamento dinâmico

As solicitações externas por carregamento consideradas em modelos estruturais reticulados consistem em forças e momentos concentrados em nós ou distribuídos ao longo do comprimento de elementos. A abordagem clássica da análise linear estática busca descrever o estado de carregamento de uma estrutura por meio de um vetor que contém as resultantes de solicitação atuantes em cada GDL do modelo em questão, porém, tratando-se de análise dinâmica, este não é suficiente. É também necessária uma descrição das cargas que contemple sua variação no tempo, portanto, utiliza-se uma matriz. Cada coluna desta corresponde a um vetor de forças e momentos, em determinado instante no tempo.

O programa LESM trata carregamentos dinâmicos como amplitudes de força e momento concentrados em nós associadas a funções temporais adimensionais, que descrevem a variação da solicitação ao longo do intervalo de análise. Desta forma, a modelagem das cargas é separada em duas etapas, a definição de componentes atuando em cada GDL, de forma análoga ao feito para carregamentos estáticos, e a definição de funções no tempo, que podem ser utilizadas para diversos nós do modelo e combinadas com outras funções.

A matriz de cargas dinâmicas atuando em determinado nó n é dada por:

$$[F_n] = \{A_n\} \{f\}^T \quad (10)$$

Onde $\{A_n\}$ configura o vetor de amplitudes das componentes do carregamento nodal, $\{f\}$ é um vetor que descreve a variação da solicitação no tempo, caracterizado pelos valores da função temporal em cada passo da análise numérica, e $[F_n]$ é a matriz de cargas dinâmicas nodais.

A entrada de dados para a definição de solicitações dinâmicas nodais no programa LESM se dá pelo diálogo da interface gráfica-iterativa exposto pela Fig. 1. É importante salientar que se considera, além das amplitudes caracterizadas pelas componentes nodais de carga, uma amplitude adimensional associada a cada função no tempo.

The screenshot shows the 'Dynamic Loading' dialog box in the LESM software. It is divided into several sections:

- Node:** A dropdown menu set to '1'. There is a checkbox for 'Apply to multiple nodes' and a 'Set' button.
- Load components:** Input fields for forces (Fx, Fy, Fz) and moments (Mx, My, Mz) in kN and kNm. Fz is set to 10 kN.
- Time function input:** A dropdown menu set to 'F*cos(ωt + φ)'. Fields for Amplitude (0), Ti (0), dT (0), ω (0), and φ (0) are present. A 'Create' button is at the bottom right.
- Time function:** A graph showing a cosine wave oscillating between -1 and 1 over a time interval from 0 to 10 seconds.
- Time functions table:** A table with columns: id, Type, Amplitude, ω [rad/s], φ [rad], ti [s], dt [s], and Delete. The first row contains: 1, Periodic, 1, 12, 1.5000, 0, 10, and a delete checkbox.

An 'Apply' button is located at the bottom right of the dialog.

Figura 1. Diálogo para entrada de dados de carregamento dinâmico no programa LESM

Três tipos de funções são considerados na modelagem de cargas transientes no LESM. As variações temporais podem ser descritas por uma composição de funções constantes, lineares ou periódicas, com intervalos de tempo de atuação especificamente atribuídos a cada oscilação no tempo definida por usuários.

4 Visualização de resultados

Diversos resultados podem ser obtidos a partir da análise dinâmica de um modelo estrutural. Os métodos de solução numérica do sistema de EDOs que governa o problema possibilitam a caracterização discretizada do comportamento cinemático dos GDLs do modelo ao longo do intervalo de análise especificado. A partir desta, associando-a às funções de forma adotadas em cada elemento, é possível computar a variação temporal da configuração deformada da estrutura inteira, bem como de seus diagramas de esforços seccionais, exemplificados pela Fig. 2, de forma análoga ao demonstrado por Martha [2], para análise linear estática. Foram implementadas animações para descrever a deformação do modelo ao longo do intervalo de tempo estipulado, bem como o comportamento associado a cada modo natural de vibração, baseando-se nos autovetores obtidos pela Eq. (2).

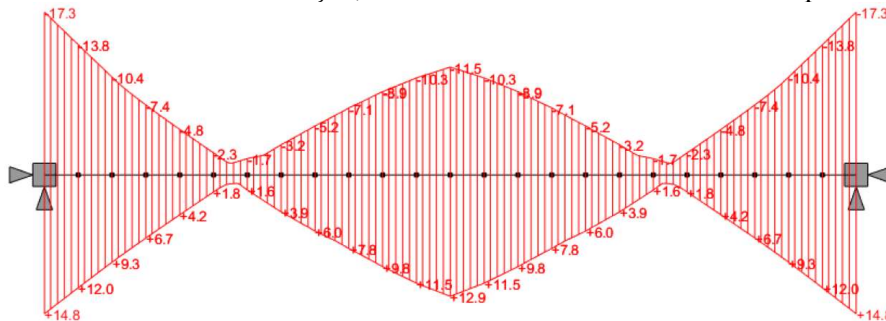


Figura 2. Envoltória de momento fletor [kNm], obtida pelo programa LESM, em uma viga biengastada sujeita a carregamento dinâmico seguido de vibrações livres

Um novo diálogo, retratado pela Fig. 3, foi adicionado à interface gráfica do programa para tratar da exposição de diagramas cinemáticos. Neste, resultados de deslocamento, velocidade e aceleração de cada GDL são exibidos, além do retrato de fase tridimensional da solução obtida. Além disso, como citado anteriormente, é possível obter o espectro da solução no domínio da frequência, por meio da Transformada Rápida de Fourier. É disponibilizado um painel de controle para que aspectos gráficos da exibição das soluções possam ser gerenciados por usuários, além de permitir a exportação de resultados em planilhas e arquivos de imagens dos digramas.

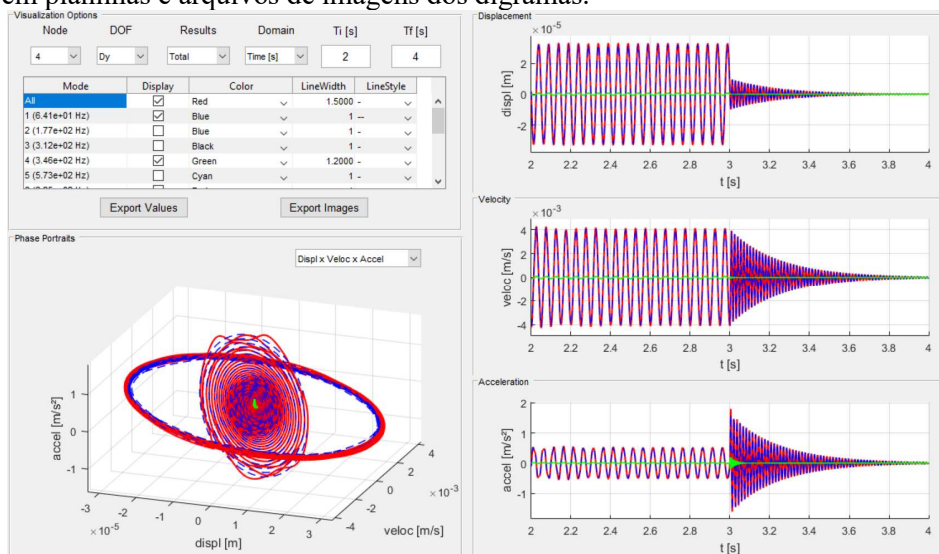


Figura 3. Diálogo para visualização de diagramas de comportamento cinemático no programa LESM

5 Exemplo de análise de vibrações estruturais com o LESM

Nesta seção, é apresentado um modelo estrutural, inteiramente feito com as funcionalidades do programa LESM, e os resultados da análise dinâmica deste. A Fig. 4 expõe a geometria da estrutura em questão, composta de elementos de comportamento idealizado segundo a teoria de flexão de Timoshenko. A Tabela 1 exhibe os parâmetros considerados pela análise.

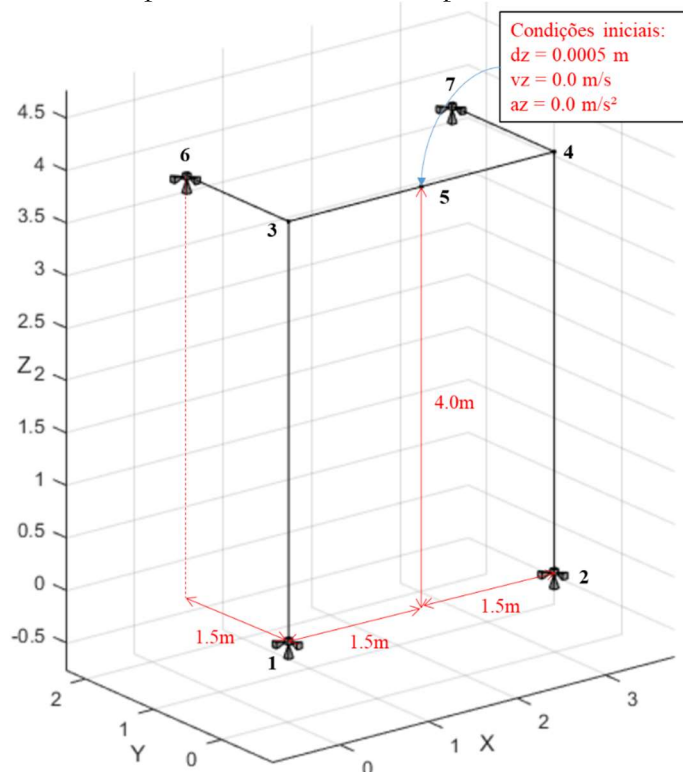


Figura 4. Modelo de pórtico espacial provido de condições iniciais para análise dinâmica com o programa LESM

Tabela 1. Parâmetros para análise dinâmica estrutural

Módulo de Elasticidade [GPa]	200
Coefficiente de Poisson	0.25
Densidade [t/m^3]	8.00
Seção transversal [cm]	30 × 30
Amortecimento crítico (1º e 2º modos)	0.01
Modos de vibração considerados	18
Intervalo de tempo [s]	4.00
Passo no tempo [s]	0.0001

Os dados expostos na Fig. 5 são referentes à análise modal do modelo estudado. Os autovalores e suas respectivas frequências naturais de vibração são computados a partir do postulado pela Eq. (2).

MODAL ANALYSIS					MODAL ANALYSIS				
MODE	EIGENVALUE	w [rad/s]	f [Hz]	T [s]	MODE	EIGENVALUE	w [rad/s]	f [Hz]	T [s]
1	1.14145e+05	3.37854e+02	5.37711e+01	1.85974e-02	10	5.28139e+06	2.29813e+03	3.65758e+02	2.73405e-03
2	2.96218e+05	5.44259e+02	8.66215e+01	1.15445e-02	11	1.14740e+07	3.38732e+03	5.39109e+02	1.85491e-03
3	5.67511e+05	7.53333e+02	1.19897e+02	8.34052e-03	12	1.21210e+07	3.48152e+03	5.54101e+02	1.80472e-03
4	9.01536e+05	9.49492e+02	1.51116e+02	6.61741e-03	13	1.53664e+07	3.92000e+03	6.23887e+02	1.60285e-03
5	1.00722e+06	1.00360e+03	1.59729e+02	6.26062e-03	14	1.64042e+07	4.05021e+03	6.44612e+02	1.55132e-03
6	1.27483e+06	1.12908e+03	1.79699e+02	5.56486e-03	15	1.89901e+07	4.35777e+03	6.93560e+02	1.44184e-03
7	1.61828e+06	1.27212e+03	2.02463e+02	4.93916e-03	16	2.33810e+07	4.83539e+03	7.69576e+02	1.29942e-03
8	2.67777e+06	1.63639e+03	2.60440e+02	3.83966e-03	17	3.67536e+07	6.06248e+03	9.64873e+02	1.03641e-03
9	3.64991e+06	1.91047e+03	3.04061e+02	3.28881e-03	18	7.53515e+07	8.68052e+03	1.38155e+03	7.23826e-04

Figura 5. Output textual da análise modal com o programa LESM

Uma carga dinâmica com amplitude de 100 kN, atuando no sentido do eixo Z global, foi adotada como solicitação externa ao nó 5. A variação temporal desta é dada pela função exposta na Fig. 6.

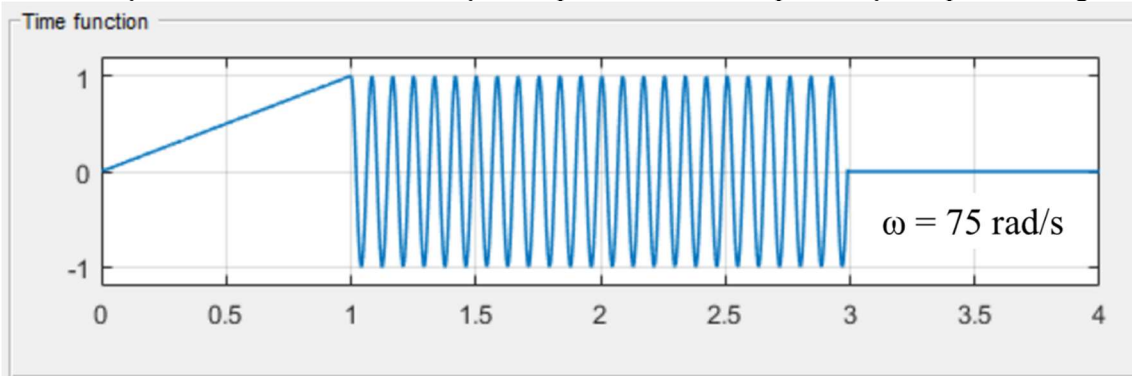


Figura 6. Função temporal associada à componente de carga dinâmica atuando no nó 5

A seguir (Fig. 7, Fig. 8 e Fig. 9) são expostos resultados para vibração forçada, livre e total, para o GDL associado ao deslocamento na direção do eixo Z global, no nó 5 do modelo em questão. Foi adotado o *solver* semi-analítico, considerando a superposição modal, fazendo uso do método numérico Wilson- θ para a vibração forçada.

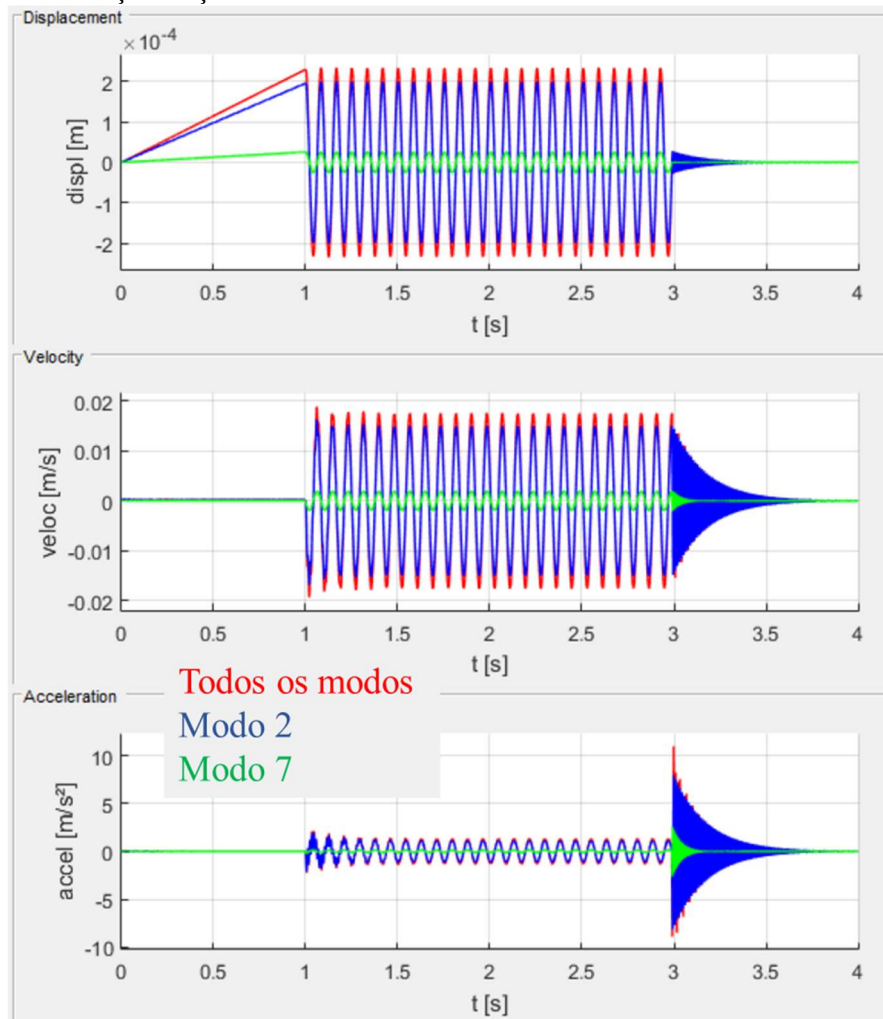


Figura 7. Resposta dinâmica estrutural em vibração forçada, obtida pelo método numérico Wilson- θ

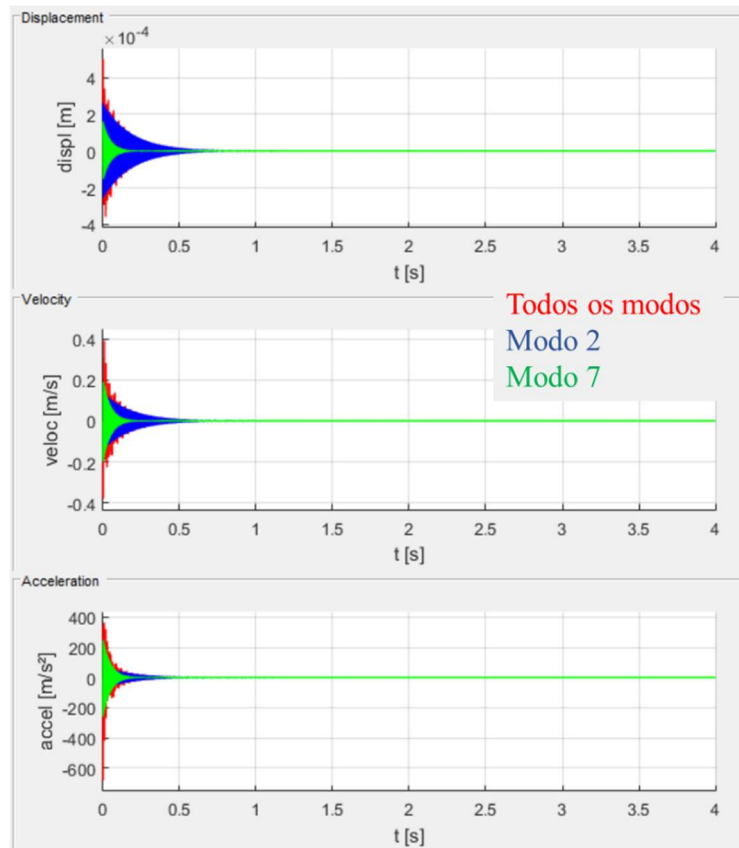


Figura 8. Resposta dinâmica estrutural em vibração livre, obtida por soluções analíticas

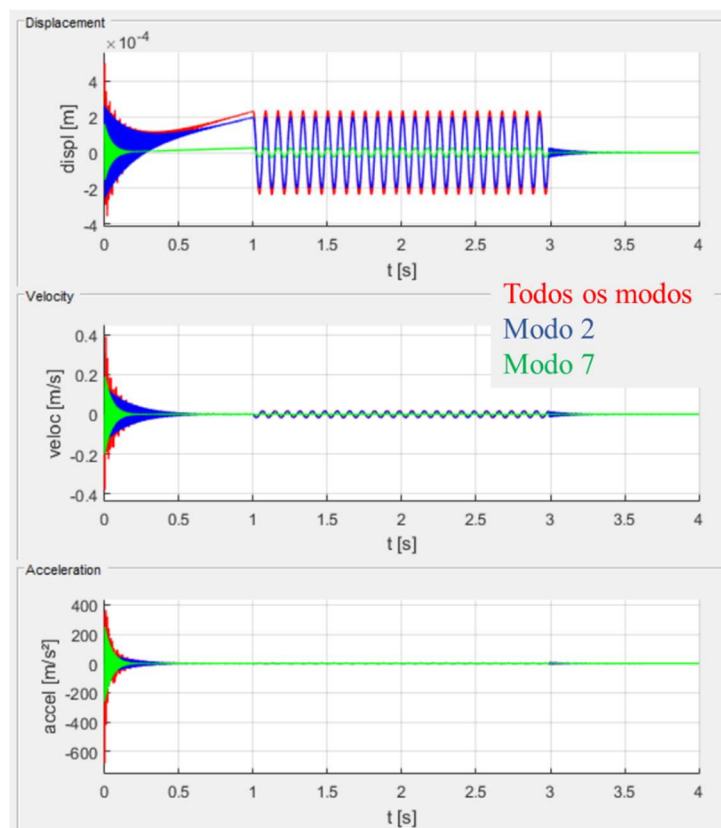


Figura 9. Resposta dinâmica estrutural total, semi-analítica

O retrato de fase exposto pela Fig. 10 é referente à resposta dinâmica total do modelo, isto é, a soma das respostas em vibração livre e forçada, para o GDL relacionado à translação na direção do eixo Z global, no nó 5. Por fim, a Fig. 11 exibe o espectro da solução para este GDL no domínio das frequências, considerando apenas vibrações forçadas.

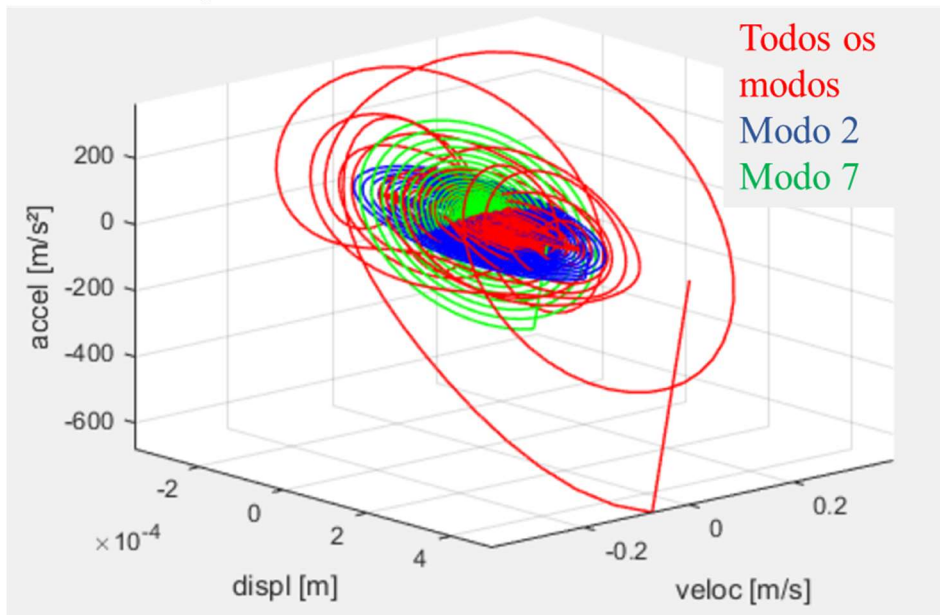


Figura 10. Retrato de fase tridimensional da solução do sistema de EDOs do movimento

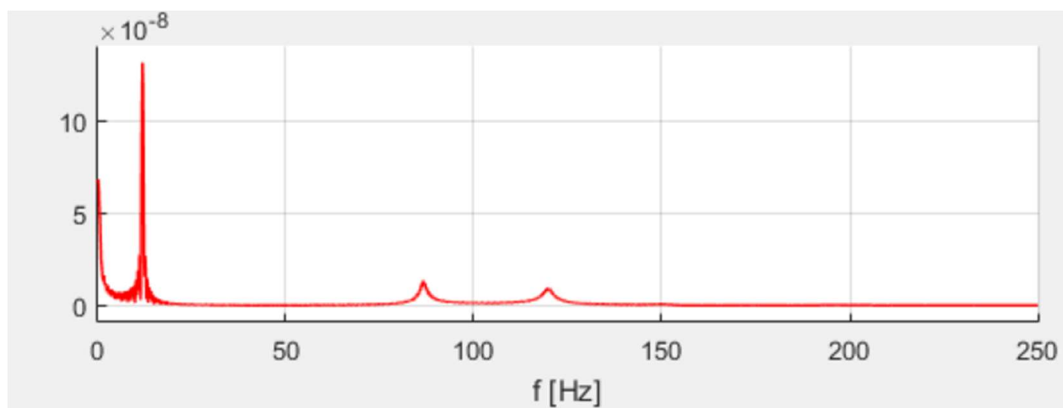


Figura 11. Espectro da resposta de deslocamento no domínio das frequências, para vibrações forçadas

Os picos que podem ser observados no espectro apresentado pela Figura 11 denotam as frequências que compõe a resposta dinâmica referente à translação do nó 5, na direção do eixo Z global. O maior pico ocorre em torno da frequência do carregamento, cerca de 11.9 Hz, representando sua grande influência no movimento forçado do GDL em questão. Os resultados observados para frequências mais baixas que esta, próximas de 0 Hz, dizem respeito ao início do carregamento, o trecho linear que pode ser visto na Figura 6, quando o comportamento da estrutura é próximo ao esperado para um carregamento estático. Os demais picos são associados à resposta dos modos naturais de vibração do modelo. Mais especificamente, no caso, os modos 2 e 3.

6 Conclusão

A análise dinâmica de estruturas faz-se presente no contexto da prática da Engenharia Civil moderna. Desta forma, uma ferramenta computacional de simples uso, provida de interface gráfica-interativa para modelagem e visualização de resultados, com código fonte aberto, é de grande interesse

para estudantes e profissionais da área. Modelar problemas estruturais de vibração em softwares abertos possibilita a usuários um maior entendimento do problema físico estudado, das considerações adotadas para sua abordagem matemática e dos métodos computacionais empregados para sua solução.

As implementações realizadas no programa LESM apresentam grande potencial educacional, não apenas para cursos de dinâmica estrutural, mas também para o ensino do uso de métodos numéricos na computação científica e o desenvolvimento de softwares estruturados pelo POO.

A organização, documentação e estruturação das versões anteriores do código foram fundamentais para a implementação relativamente rápida das novas funcionalidades.

Os arquivos contendo o código fonte de todas as classes e métodos da versão 2.0 do LESM, para análise linear estática de estruturas, são disponibilizados em seu website (www.tecgraf.puc-rio.br/lesm). Ademais, a versão 1.0 do programa é associada ao livro por Martha [2], sendo todo o seu código fonte e documentação UML abertos no website. A versão 3.0, associada a este trabalho, será disponibilizada em um futuro breve.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), e ao Instituto Tecgraf de Desenvolvimento de Software Técnico-Científico da PUC-Rio (Tecgraf/PUC-Rio) pelo apoio financeiro e por prover espaço e recursos utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho.

Referências

- [1] Lima, S.S. e Santos, S.H.C. *Análise Dinâmica de Estruturas*. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 1ª edição, 2008.
- [2] Martha, L.F. *Análise Matricial de Estruturas com Orientação a Objetos*. Elsevier, Rio de Janeiro, 1ª edição, 2018.
- [3] Rangel, R.L. e Martha, L.F. LESM – An Object-Oriented MATLAB Program for Structural Analysis of Linear Element Models. *Computer Applications in Engineering Education*, vol. 27, n. 3, pp. 553-571, 2019.
- [4] Vaz, L.E. *Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas*. Elsevier, Rio de Janeiro, 1ª edição, 2011.
- [5] Soriano, H.L. *Elementos Finitos – Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas*. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 1ª edição, 2009.
- [6] Chapra, S.C. *Applied Numerical Methods with Matlab for Engineers and Scientists*. McGraw-Hill, Nova Iorque, 3ª edição, 2012.
- [7] Quarteroni, A., Sacco, R. and Saleri, F. *Numerical Mathematics*. Springer, Berlin, 2ª edição, 2007.
- [8] Tauchert, T.R. *Energy Principles in Structural Mechanics*. McGraw-Hill, Nova Iorque, 1ª edição, 1974.
- [9] Felippa, C.A. Introduction to Finite Element Methods. Class notes, Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado at Boulder, 2005.