

ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS CONSIDERANDO O EFEITO DE MEMBRANA SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS EXPLOSIVOS

Ana Waldila de Queiroz Ramiro Reis

Rodrigo Bird Burgos

Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira

anawaldila@hotmail.com

rburgos@eng.uerj.br

mariafer@eng.uerj.br

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Rua São Francisco Xavier 524, Maracanã, CEP 20550-900, Rio de Janeiro, Brasil

Abstract. The behavior of civil engineering structures under blast loads has been studied quite frequently in the last years and much effort has been made to create idealized blast wave curves and predict the corresponding response of structural and protective elements. The blast phenomenon results in an abrupt overpressure wave followed by an underpressure wave, the last being usually disregarded in most structural analyses. However, recent studies show that this suction phase is of paramount importance since it may lead to substantially higher stresses. In the case of high-intensity pressure waves, structural elements may experience large displacements, thus requiring second-order effects to be included in the analysis. This work investigates the nonlinear dynamic behavior of thin rectangular plates subjected to explosive charges. The problem was modeled as a nonlinear single degree of freedom system by applying von Karman's theory for large deflections to simply supported and clamped plate configurations. A uniform pressure load simulates the overpressure and underpressure waves by employing the Friedlander equation and a cubic approximation, respectively. Runge-Kutta method was used to solve the equation of motion for displacement amplitude. Numerical solutions for displacements and stresses were derived for several plate geometry configurations and blast loads, making it possible to measure the influence of the suction pressure and the membrane effect on the plate response.

Keywords: Plates, Dynamic Analysis, Nonlinear Analysis, von Karman, Blast loads

1 Introdução

O estudo do comportamento de estruturas expostas a carregamentos explosivos vem se intensificando ao longo dos anos. A idealização e a caracterização do carregamento explosivo quando atuantes sobre estruturas de engenharia civil, bem como a resposta dinâmica das mesmas tem recebido especial atenção na literatura.

Os primeiros estudos relacionados ao carregamento gerado a partir de um fenômeno explosivo foram realizados por Friedlander [1], que propôs uma equação de carga de sobrepressão, referente à fase positiva da explosão. Posteriormente, Granstrom [2], a partir de dados experimentais, apresentou valores de pressão, duração e impulso para as fases positiva e negativa segundo o tipo de explosão. Em seu trabalho, propôs uma aproximação da curva de pressão devido à explosão empregando a equação de Friedlander para a fase positiva e uma equação cúbica para a fase negativa, sugerindo que esta não deve ser desconsiderada no carregamento. Posteriormente, Rigby [3] estudou várias propostas de equações para a fase negativa do carregamento, comparando com resultados experimentais, concluindo que a equação cúbica é a mais adequada para representar o fenômeno.

Muitos outros estudos foram desenvolvidos sobre o carregamento de explosão com base em teorias e experimentos, destacando-se Kinney & Graham [4] e Needham [5]. Os ábacos que relacionam os parâmetros das fases positiva e negativa do carregamento explosivo com a distância escalar publicados pelo US Department of Defense [6] se tornaram referência nesta área.

As equações governantes de placas para o caso de grandes deslocamentos foram propostas inicialmente por von Karman [7]. Com base no método de Galerkin e nas funções de Airy, Yamaki [8, 9] apresentou a formulação para placas retangulares, considerando o efeito de membrana, para diferentes condições de contorno. Gupta [10] estudou analiticamente a resposta de placas retangulares submetidas ao carregamento de sobrepressão da fase positiva de uma explosão, com uma formulação que considera apenas a rigidez à flexão. Posteriormente, Feldgun [11] abordou o mesmo problema, porém com uma formulação que considera também o efeito de membrana, baseando-se na solução de Yamaki [9].

Este trabalho investiga o comportamento de placas retangulares submetidas a um carregamento explosivo, considerando as fases positiva e negativa da solicitação, para diversos tipos de condição de contorno. Para isso, empregou-se uma abordagem analítica para expressar os deslocamentos transversais da placa considerando o efeito de membrana, tendo por base a solução desenvolvida por Yamaki [9] para chegar a uma equação diferencial não linear em termos da amplitude do deslocamento no centro da placa, utilizando o método de Runge-Kutta para a sua solução numérica.

2 Carga Explosiva

O fenômeno da explosão consiste na manifestação das reações químicas provenientes de uma fonte com liberação repentina de energia no ambiente a uma velocidade supersônica e pode ser classificada como esférica ou hemisférica. Na explosão esférica, a detonação ocorre suspensa no ar, gerando uma esfera de energia que é rapidamente dissipada no ambiente. Já a explosão hemisférica é caracterizada pela detonação da fonte sobre uma superfície. É importante salientar que as ondas de choque provenientes das explosões esféricas podem entrar em contato com um anteparo, desde que no instante da detonação o elemento esteja suspenso no ar (Kinney & Graham [4]; Needham [5]; Rigby [12]).

No instante da detonação, os gases gerados expandem-se rapidamente atingindo uma pressão de pico p_{max} , caracterizada por ser uma pressão acima da ambiente. Ocorre então um decaimento rápido da sobrepressão máxima gerada até retornar à pressão ambiente, em um intervalo de tempo designado como tempo da fase positiva t_d . Seguidamente a este processo, ocorre a geração de uma rarefação no centro da explosão, ocasionando um vácuo. Este estágio é descrito como a fase negativa da onda explosiva, com duração de tempo t_d^- , com uma pressão mínima p_{min} . A energia liberada pela explosão pode ser avaliada pelo impulso da onda de choque, que é dado pela área da curva em relação ao tempo, denominado i_d e i_d^- para as fases positiva e negativa, respectivamente. A Figura 1 ilustra uma curva típica de carga de pressão e seus respectivos parâmetros.

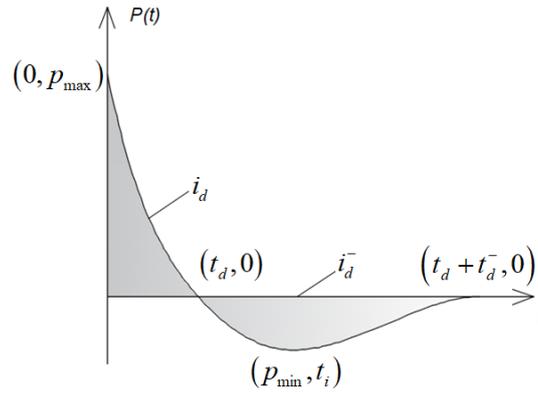


Figura 1. Carga de pressão de uma onda de choque

Conforme exposto, os parâmetros necessários para a determinação das características de uma onda de explosão são as pressões máximas e mínimas (p_{max} e p_{min}), os tempos de duração de cada fase (t_d e t_d^-) e os impulsos relacionados (i_d e i_d^-). Estes valores são diretamente dependentes do tipo de explosão, da massa de explosivo equivalente de TNT utilizado (W_{TNT}), da distância do explosivo ao anteparo (R) e da distância em escala (Z), podendo ser formuladas conforme a Eq. (1):

$$Z = \frac{R}{W_{TNT}^{1/3}} \tag{1}$$

Neste trabalho, foram adotados os dados experimentais apresentados inicialmente por US Department of Defense [6], com unidades convertidas para o Sistema Internacional por Rigby [12]. As Figuras 2 e 3 apresentam os ábacos referentes às explosões hemisféricas e esféricas, respectivamente, que relacionam os parâmetros da carga de pressão com a distância em escala Z .

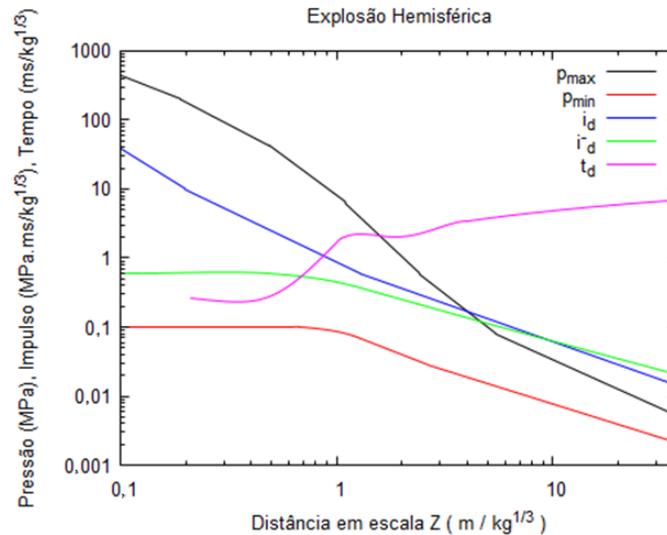


Figura 2. Parâmetros para explosão hemisférica (adaptado de Rigby [12])

Para viabilizar o emprego dos ábacos apresentados pelas Figuras 2 e 3, cada curva foi digitalizada por amostragem de pontos, sendo posteriormente propostas equações utilizando-se a ferramenta de ajuste de curvas do *software* Excel. Tais expressões foram desenvolvidas pelos autores e estão contempladas em Reis [13].

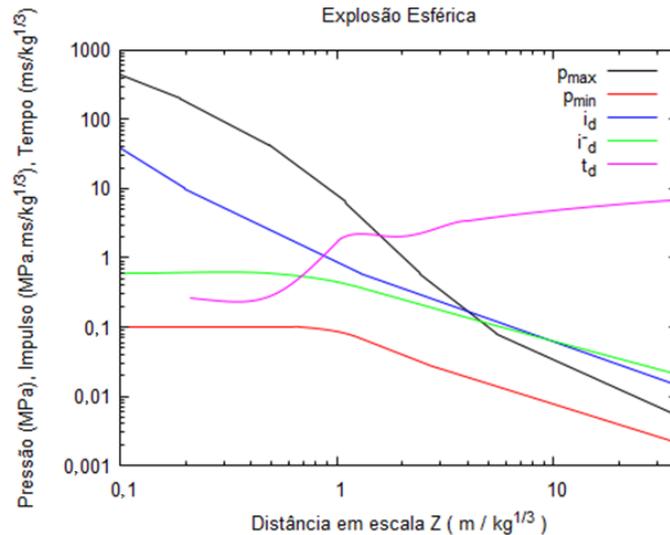


Figura 3. Parâmetros para explosão esférica (adaptado de Rigby [12])

A Figura 4 apresenta a relação entre o impulso da fase negativa e o impulso total do carregamento obtidos a partir das curvas das Figuras 2 e 3. Como a medida de impulso está relacionada com a energia liberada pela explosão em cada fase do carregamento, pode ser utilizada para avaliar a relevância de cada fase do carregamento para valores diferentes de Z . Assim, verifica-se que a influência do impulso da fase negativa torna-se bastante relevante à medida que a distância escalar Z aumenta, sugerindo que a fase negativa não deve ser desconsiderada na análise de estruturas submetidas a cargas explosivas.

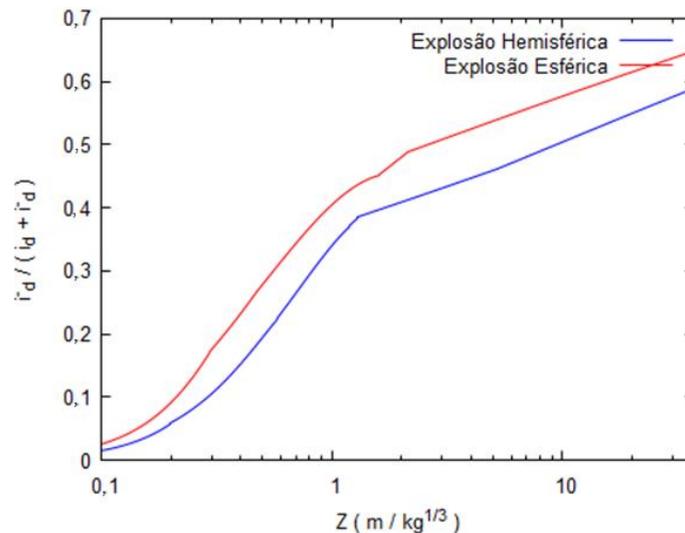


Figura 4. Relação impulso da fase negativa e impulso total pela distância em escala Z

Vários estudos foram realizados acerca do melhor equacionamento das fases positiva e negativa da explosão, com base em métodos empíricos e semi empíricos. Neste trabalho, em consenso com a literatura, adota-se como expressão da fase positiva a equação de Friedlander. Já para a fase negativa, adota-se a equação cúbica, que melhor se adéqua aos ensaios experimentais segundo Rigby [3]. Com isso, tem-se a expressão da carga de explosão apresentada pela Eq. (2).

A equação de Friedlander tem por característica apresentar um coeficiente que representa a taxa de decaimento exponencial (a'), que pode ser obtido igualando-se o valor do impulso positivo com a área abaixo da curva da fase positiva de $P(t)$, conforme apresenta a Eq. (3).

$$P(t) = \begin{cases} p_{\max} \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) e^{-\frac{a't}{t_d}} & ; t \leq t_d \\ -p_{\min} \left(\frac{6.75(t-t_d)}{t_d^-}\right) \left(1 - \frac{(t-t_d)}{t_d^-}\right)^2 & ; t_d \leq t \leq t_d + t_d^- \\ 0 & ; t \geq t_d + t_d^- \end{cases} \quad (2)$$

$$i_d = \int_0^{t_d} p_{\max} \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) e^{-\frac{a't}{t_d}} dt = \frac{p_{\max} t_d}{(a')^2} (a' - 1 + e^{-a'}). \quad (3)$$

Esta expressão corresponde a uma equação não linear e pode ser resolvida pelo método de Newton-Raphson. Já com relação à equação cúbica, esta foi estudada e desenvolvida por Granstrom [2] e foi construída impondo-se as condições presentes pela Eq. (4):

$$\begin{aligned} P(t_d) &= 0 \\ P\left(t_d + \frac{t_d^-}{3}\right) &= -p_{r,\min} \\ P(t_d + t_d^-) &= 0 \\ \frac{d}{dt} P\left(t_d + \frac{t_d^-}{3}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

De acordo com Granstrom [2], a equação cúbica foi concebida para que o pico de pressão negativa ocorresse no primeiro terço da fase negativa, correspondendo a relação contemplada pela Eq.(5), contendo os parâmetros i_d^- , p_{\min} e t_d^- , que é verificada para distâncias escalares $Z > 5 \text{ m/kg}^{1/3}$:

$$t_d^- = \frac{16i_d^-}{9p_{\min}}. \quad (5)$$

3 Análise Dinâmica de Placas

3.1 Equação de von Karman

A formulação apresentada a seguir aplica-se a placas finas ou delgadas, que são estruturas caracterizadas por um plano médio de uma superfície com espessura h , sendo a dimensão da espessura muito menor que as outras duas dimensões, conforme a Figura 5.

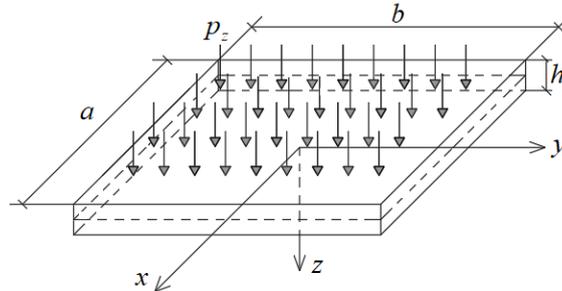


Figura 5. Plano médio e dimensões da placa (adaptado de Nishawala [14])

Considerando que o carregamento aplicado corresponde ao apresentado pela Eq. (2), os deslocamentos resultantes são relativamente grandes, deformando significativamente o plano médio da

placa. Desta forma, torna-se necessário incorporar ao estudo o comportamento não linear referente à teoria de placas de von Karman (Nishawala [14]), com relações deslocamentos–deformações que incorporam os termos referentes ao esforço de flexão e ao esforço de membrana, contemplados pelas Eq. (6) à Eq. (12):

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^b + \varepsilon_{ij}^m \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xx}^b = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$\varepsilon_{yy}^b = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \quad (8)$$

$$\varepsilon_{xy}^b = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{xx}^m = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 \quad (10)$$

$$\varepsilon_{yy}^m = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \quad (11)$$

$$\varepsilon_{xy}^m = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (12)$$

em que ε_{ij}^b corresponde à parcela das deformações devido à flexão da placa, coincidentes com a formulação linear; ε_{ij}^m corresponde à parcela das deformações devido ao efeito de membrana da placa, incluindo o acoplamento dos deslocamentos transversais e axiais. Para uma placa fina de material homogêneo, isotrópico e linear elástico, são dadas as relações tensão-deformação, considerados pelas Eq. (13) à Eq. (16):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^b + \sigma_{ij}^m \quad (13)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \quad (14)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \quad (15)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xy} \quad (16)$$

sendo E o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson. Da mesma forma, σ_{ij}^b corresponde à parcela das tensões devido à flexão da placa, coincidentes com a formulação linear; σ_{ij}^m corresponde à parcela das tensões devido ao efeito de membrana da placa.

Considera-se o carregamento, as forças cortantes e os momentos fletores atuantes numa placa infinitesimal, conforme a Figura 6.

O equilíbrio de forças e momentos, conforme Figura 6, concebe a equação diferencial Eq. (17):

$$D \nabla^4 u_z + \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = p_z(x, y, t) + p^m(x, y, t), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (17)$$

onde p^m corresponde à resultante das forças referentes aos esforços de membrana da placa. Este parâmetro é determinado a partir das projeções das forças no plano z (Nishawala [14]), conforme apresentado na Figura 7.

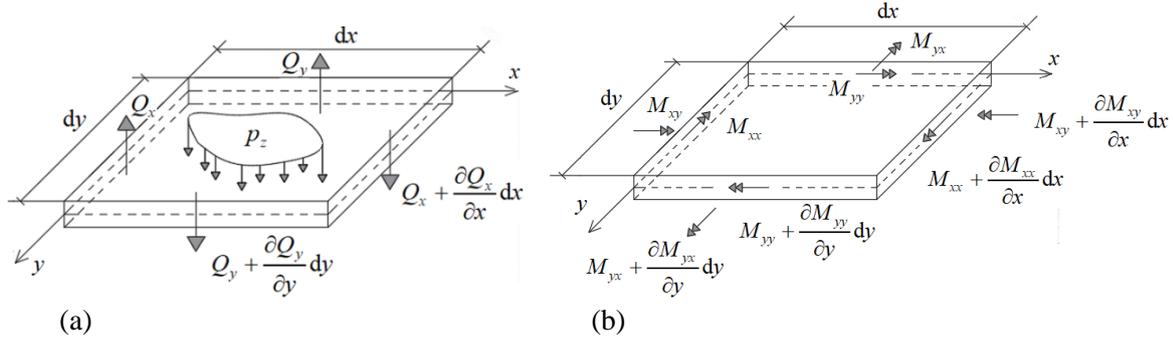


Figura 6. Forças (a) e momentos (b) atuantes em um elemento de placa infinitesimal (adaptado de Nishawala [14])

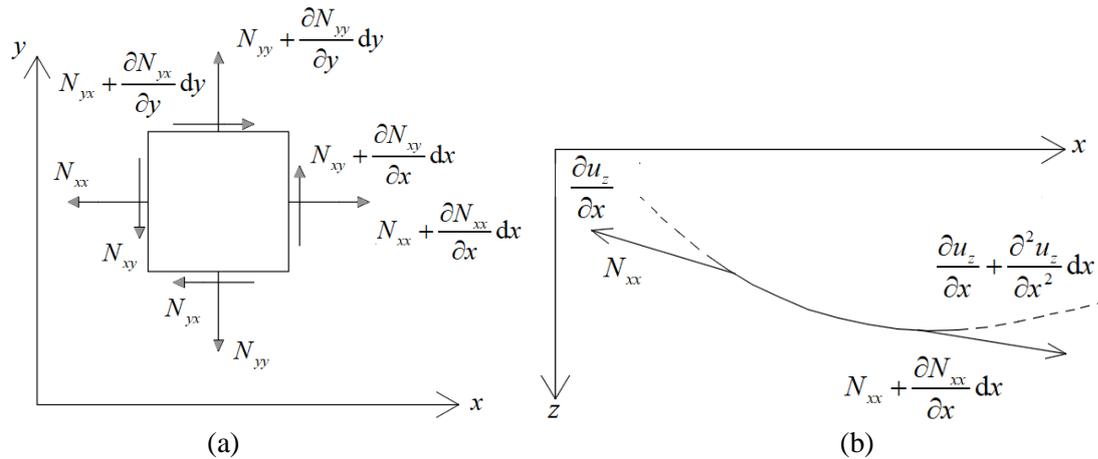


Figura 7. (a) Projeções dos esforços no eixo z; (b) Efeito de membrana na estrutura (adaptado de Nishawala [14])

Assim, realizando o equilíbrio das forças atuantes na direção z (Nishawala [14]), proveniente da Figura 7 (b), chega-se à Eq. (18):

$$p^m(x, y, t) dx dy = 2N_{xy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} dx dy + \left(N_{xx} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) dx dy. \quad (18)$$

Considerando que as tensões se relacionam com a função de Airy (ϕ), dadas pela Eq. (19), e aplicando-a, juntamente com a Eq. (18), na Eq. (17), determina-se a primeira equação de von Karman, conforme presente pela Eq. (20):

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}. \quad (19)$$

$$L(u_z, \phi) \equiv DV^4 u_z + \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - h \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right) - p_z(x, y, t) = 0. \quad (20)$$

onde L é um operador diferencial, D é a rigidez à flexão da placa e ρ é a massa específica. Com base na equação de compatibilidade, tem-se a segunda equação de von Karman (Nishawala [14]), Eq. (21):

$$\nabla^4 \phi = E \left[\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right]. \quad (21)$$

3.2 Placas de Kirchhoff: Placas Simplesmente Apoiadas

A equação de deslocamento utilizada para determinar a amplitude da placa considera o primeiro harmônico proveniente da série de Navier, Eq. (22), conforme sugerido por Yamaki [9]:

$$u_z(x, y, t) = hA(t)\psi(x, y), \quad \psi(x, y) = \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right). \quad (22)$$

A equação diferencial dinâmica da placa pode ser obtida pela aplicação das Eq. (20) e Eq. (22) no método de Galerkin, conforme Eq. (23). Após organizar a equação resultante, chega-se a expressão geral da equação dinâmica de placas com efeito de membrana, conforme apresentado pela Eq. (24):

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} L(w, \phi)\psi(x, y) dx dy = 0 \quad (23)$$

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} + K_1 A(t) + K_3 [A(t)]^3 = F(t) \quad (24)$$

onde:

$$K_1 = \frac{\pi^4 Dh(1 + \beta^2)^2}{a^4 \rho h^2}$$

$$K_3 = \frac{1}{\rho h^2} \left[\frac{\pi^2 h^2}{a^2} (p'_x + \beta^2 p'_y) - \frac{2\pi^4 Eh^4}{a^2 b^2} (\Phi_{0,1} + \Phi_{1,0}) \right] \quad (25)$$

$$F(t) = \frac{16}{\pi^2 \rho h^2} P(t).$$

Nessas expressões, $A(t)$ é a amplitude dinâmica da placa, K_1 é o coeficiente relacionado ao esforço de flexão, K_3 é o coeficiente relacionado ao esforço da membrana e β é a relação entre a maior e a menor dimensão do plano da placa. Observa-se que os coeficientes K_1 e K_3 são dependentes das características físicas e geométricas da placa, determinados conforme as condições de contorno da placa e da membrana, respectivamente. Os parâmetros p'_x , p'_y , $\Phi_{0,1}$ e $\Phi_{1,0}$ são determinados de acordo com as condições de contorno da membrana.

Neste trabalho, investiga-se placas simplesmente apoiadas para três casos de condições de contorno: livre de tensões, indeslocável e deslocável, as quais devem satisfazer as relações dadas na Tabela 1 (Yamaki [9]) em termos da função de Airy (ϕ) e dos deslocamentos apresentados pelas Eq. (26) e Eq. (27):

$$u_x = \int_0^x \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (26)$$

$$u_y = \int_0^y \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y^2} \right)^2 dy. \quad (27)$$

Tabela 1. Especificações das condições de contorno (adaptado de Yamaki [9])

Caso	$x = \pm a/2$	$y = \pm b/2$
Livre de tensões	$\phi_{,yy} = \phi_{,xy} = 0$	$\phi_{,xx} = \phi_{,xy} = 0$
Indeslocável	$u_x = \phi_{,xy} = 0$	$u_y = \phi_{,xy} = 0$
Deslocável	$P_x = \phi_{,xy} = 0$	$P_y = \phi_{,xy} = 0$

Considere-se a função de Airy dada pela Eq. (28), proposta por Yamaki [9]:

$$\phi = [A(t)]^2 \left(\frac{1}{2} p'_x y^2 + \frac{1}{2} p'_y x^2 + Eh^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \Phi_{pq} X_{2p} Y_{2q} \right). \quad (28)$$

Substituindo a Eq. (28) na equação de placa de von Karman, Eq. (21), resolvendo para a variável Φ e aplicando as relações apresentadas na Tabela 1, chega-se as soluções para uma placa simplesmente apoiada para cada caso de condição de contorno, como mostra a Tabela 2.

Tabela 2. Parâmetros referentes à função de Airy – Placas simplesmente apoiadas

Casos	p'_x	p'_y	$\Phi_{p,q}$
Livre de tensões	0	0	$\Phi_{p,q} = \varphi_{p,q} + \varphi'_{p,q}$
Indeslocável	$\frac{\pi^2 Eh^2 (\beta^2 \nu + 1)}{8a^2 (1 - \nu^2)}$	$\frac{\pi^2 Eh^2 (\beta^2 + \nu)}{8a^2 (1 - \nu^2)}$	$\Phi_{p,q} = \varphi_{p,q}$
Deslocável	0	0	$\Phi_{p,q} = \varphi_{p,q}$

Nessa tabela, as parcelas $\varphi'_{p,q}$ e $\varphi_{p,q}$ referem-se as soluções particular e homogênea da equação de von Karman, Eq. (21), dadas pelas Eq. (29) e Eq. (30), respectivamente:

$$\varphi_{p,q} = \left\{ p \wedge q \in \square / \varphi_{0,1} = -\frac{1}{32\beta^2}, \varphi_{1,0} = -\frac{\beta^2}{32} \right\} \quad (29)$$

$$\varphi'_{p,q} = \frac{4\beta}{\pi(p^2 + (q\beta)^2)^2} \left[\frac{p(-1)^q \varepsilon_q \sinh^2\left(\frac{p}{\beta}\pi\right) A_p}{\sinh\left(\frac{p}{\beta}\pi\right) \cosh\left(\frac{p}{\beta}\pi\right) + \frac{p}{\beta}\pi} + \frac{q(-1)^p \varepsilon_p \sinh^2(q\beta\pi) B_q}{\sinh(q\beta\pi) \cosh(q\beta\pi) + q\beta\pi} \right] \quad (30)$$

$$p, q = \left\{ p \wedge q \in \square / (p \vee q = 0 \Rightarrow \varepsilon_p \vee \varepsilon_q = 1/2) \wedge (p \vee q \neq 0 \Rightarrow \varepsilon_p \vee \varepsilon_q = 1) \right\}.$$

Os parâmetros A_p e B_q presentes na Eq. (30) são obtidos pela resolução do sistema de equações da Eq. (31):

$$\begin{cases} B_n + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m A_m \eta\left(\frac{m}{\beta}, n\right) = -\beta^2 n^2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \varphi_{p,n} \\ A_n + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m B_m \eta(m\beta, n) = -n^2 \sum_{q=0}^1 (-1)^q \varphi_{n,q} \end{cases} \quad (31)$$

$$\eta(\gamma, \xi) = \frac{4(-1)^m \gamma \xi^2}{\pi(\gamma^2 + \xi^2)^2} \frac{\sinh^2(\gamma\pi)}{\sinh(\gamma\pi) \cosh(\gamma\pi) + \gamma\pi}.$$

A Figura 8 apresenta a comparação entre os parâmetros K_1 e K_3 em forma adimensional. Observa-se que a parcela K_3 para o caso indeslocável é relevante em comparação aos outros casos equivalentes. Em particular, para o caso livre de tensões verifica-se que uma maior relação β ocasiona um valor tendendo a zero. Ademais, a parcela K_1 é consideravelmente maior que K_3 para os casos deslocável e livre de tensões.

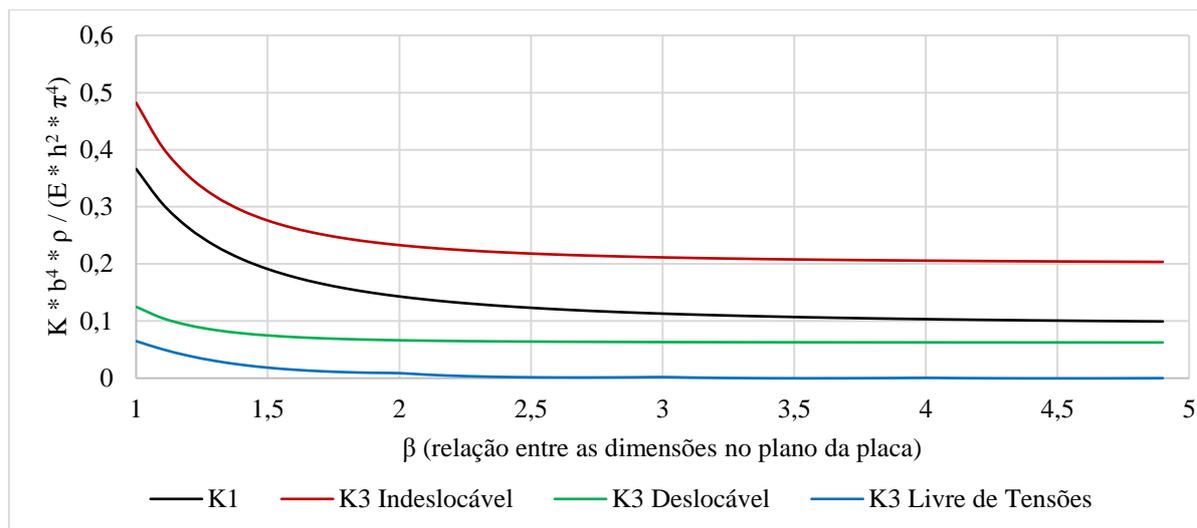


Figura 8. Comparação entre K_1 e K_3 - Caso simplesmente apoiado

Para avaliar a contribuição do efeito de membrana na tensão atuante na placa, utiliza-se as razões contempladas pelas Eq. (32) e Eq. (33):

$$r_x = \frac{\sigma_{xx}^m(0,0,t)}{\sigma_{xx}^b(0,0,t) + \sigma_{xx}^m(0,0,t)} \quad (32)$$

$$r_y = \frac{\sigma_{yy}^m(0,0,t)}{\sigma_{yy}^b(0,0,t) + \sigma_{yy}^m(0,0,t)} \quad (33)$$

em que r_i corresponde à razão entre as parcelas de tensões σ_{ii}^m provenientes do esforço da membrana com relação às tensões totais σ_{ii} no centro da placa, já apresentadas pelas Eq. (13) à Eq. (16). A Figura 9 apresenta as referidas razões para uma placa quadrada simplesmente apoiada.

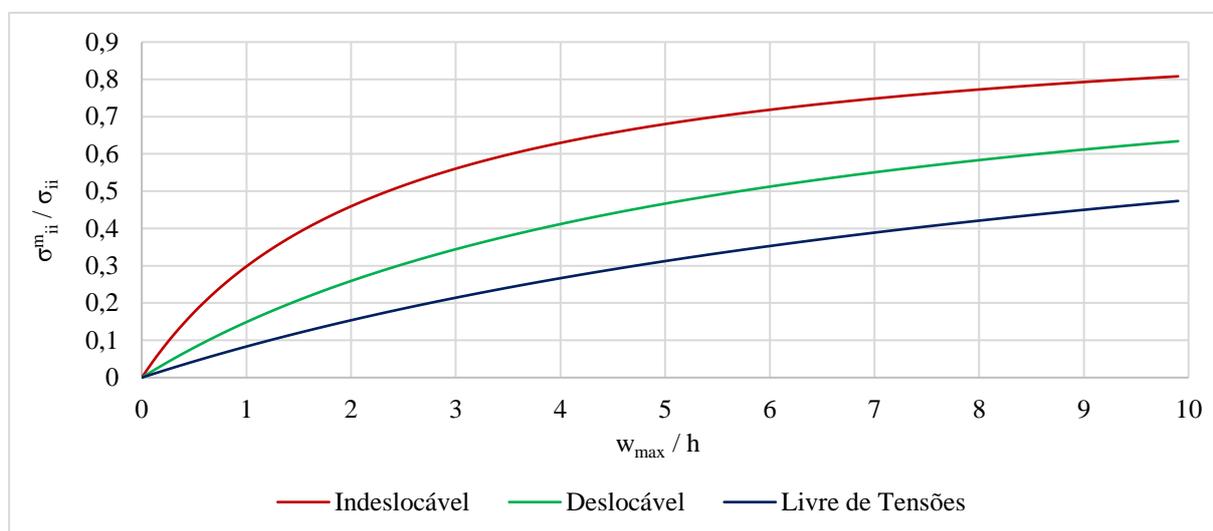


Figura 9. Relação entre tensão membrana e tensão total com a razão da amplitude e espessura da placa para $\beta = 1$

Observa-se que o efeito das tensões provenientes do esforço da membrana é mais significativo em estruturas com maiores restrições, ou seja, no caso indeslocável. Da mesma forma, verifica-se que para o caso livre de tensões a influência do efeito da membrana é menor, já que corresponde a uma estrutura com menor restrição lateral.

3.3 Solução do Problema Dinâmico de Placas

A equação dinâmica da placa dada pela Eq. (24) é conhecida como Equação de Duffing [15], que tem solução analítica apenas para carregamentos nulos ou harmônicos. Portanto, para a carga explosiva do presente estudo, adotou-se uma abordagem numérica para a resolução desta equação pelo método de Runge-Kutta, decompondo a equação diferencial não linear no seguinte sistema de equações diferenciais, dados pelas Eq. (34) e Eq. (35):

$$\frac{dA(t)}{dt} = H(t) \quad (34)$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = P(t) - K_1 A(t) - K_3 [A(t)]^3. \quad (35)$$

Nos resultados apresentados neste trabalho, o sistema foi resolvido para a variável $A(t)$, considerando um passo de tempo de 0.1 milissegundos, coerente com a ordem de grandeza do tempo de duração das fases positiva e negativa do carregamento.

Com base no deslocamento máximo dinâmico obtido (w_{max}) e no deslocamento máximo estático (w_{est}) pode-se determinar o Fator de Amplificação Dinâmica (FAD) dado pela Eq. (36):

$$FAD = \frac{w_{max}}{w_{est}}. \quad (36)$$

A não linearidade da equação diferencial, Eq. (24), introduz também uma não linearidade no período natural da placa, ou seja, este passa a ser dependente da amplitude do movimento e não mais uma característica dependente somente da geometria e do material. Para o caso do período não linear (T_{NL}), Yamaki [9] e Soudack [16] propuseram como amplitude da vibração livre a expressão dada pela Eq. (37):

$$A(t) = A_0 Cn(\lambda t, k), \quad k = \sqrt{\frac{K_3 A_0^2}{2(K_1 + K_3 A_0^2)}}, \quad \lambda = \sqrt{K_1 + K_3 A_0^2}. \quad (37)$$

Desta forma, com base nas funções apresentadas pela Eq. **Erro! Fonte de referência não encontrada.** é possível determinar o período não linear da estrutura, Eq. (38), e seu respectivo período linear, Eq. (39), fazendo $K_3 = 0$ na expressão do período não linear.

$$T_{NL} = \frac{4K(k)}{\lambda}, \quad K(k) = \int_0^1 \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)}}. \quad (38)$$

$$T_L = \frac{2\pi}{\sqrt{K_1}}. \quad (39)$$

4 Resultados Numéricos

O estudo do comportamento dinâmico de placa apresentado a seguir foi realizado para uma placa de aço de 5 mm de espessura, com dimensões 1,0 m x 1,0 m, simplesmente apoiada, para os três tipos de condições de membrana: livre de tensões, indeslocável e deslocável. A placa está submetida a um carregamento uniformemente distribuído, proveniente de uma explosão esférica de 10 kg de TNT a uma distância escalar de 5 m/ kg^{1/3}. A Tabela 3 resume os parâmetros de referência do exemplo analisado.

Tabela 3. Características físicas e geométricas da estrutura e da carga

Parâmetros	Valor
Módulo de Young (E)	200 GPa
Espessura de placa (h)	0,005 m
Dimensão na direção x	1 m
Relação a/b (β)	1
ν	0,3
ρ	7700 kg/m ³
W_{TNT}	10 kg
Z	5 m/kg ^{1/3}
Tipo de explosão	Esférica

4.1 Análise do comportamento dinâmico do exemplo de referência

A Figura 10 apresenta a amplitude do deslocamento do centro da placa para as condições de contorno estudadas. Observa-se que os sistemas com maior liberdade lateral (caso livre de tensões) apresentam as maiores amplitudes, já que a rigidez da membrana é menos presente, conforme apresentado na Figura 8. Por outro lado, estruturas com maiores restrições, como é o caso da indeslocável, apresentam as menores amplitudes, visto que o efeito da rigidez da membrana é mais presente. Já o caso deslocável apresenta respostas de amplitudes intermediárias.

A influência da fase negativa pode ser avaliada na Figura 11, que apresenta a amplitude no centro de uma placa com condições de contorno livre de tensões para dois tipos de carregamento: com fase positiva apenas e com fase positiva e negativa. É possível observar que a consideração da fase negativa modifica a amplitude em todo o histórico de tempo, aumentando-a e alterando também a frequência de vibração da resposta.

Para a placa com condição de contorno livre de tensões, a Figura 12 mostra os intervalos de tempo em que cada fase (positiva, negativa e vibração livre) ocorrem na resposta da estrutura. Verifica-se que a fase negativa possui maior duração que a fase positiva e que, em todo o histórico de tempo da resposta da estrutura, o maior deslocamento dinâmico encontra-se durante a fase negativa.

O comportamento da razão entre períodos não linear e linear, T_{NL}/T_L , conforme apresentado pelas Eq. (38) e Eq. (39), respectivamente, está apresentado na Figura 13. Observa-se que a frequência do sistema é diretamente relacionada com o grau de não linearidade da estrutura. Com isso, para estruturas com maior liberdade de movimentação lateral, o período não linear não possui grande variação quando comparadas às estruturas de maiores restrições.

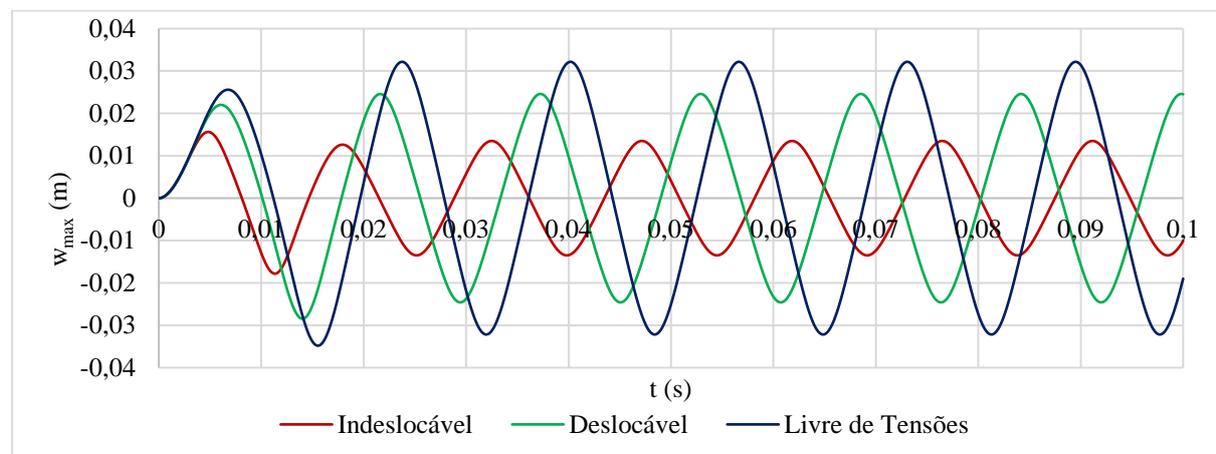


Figura 10. Comportamento oscilatório para as condições de contorno de membrana

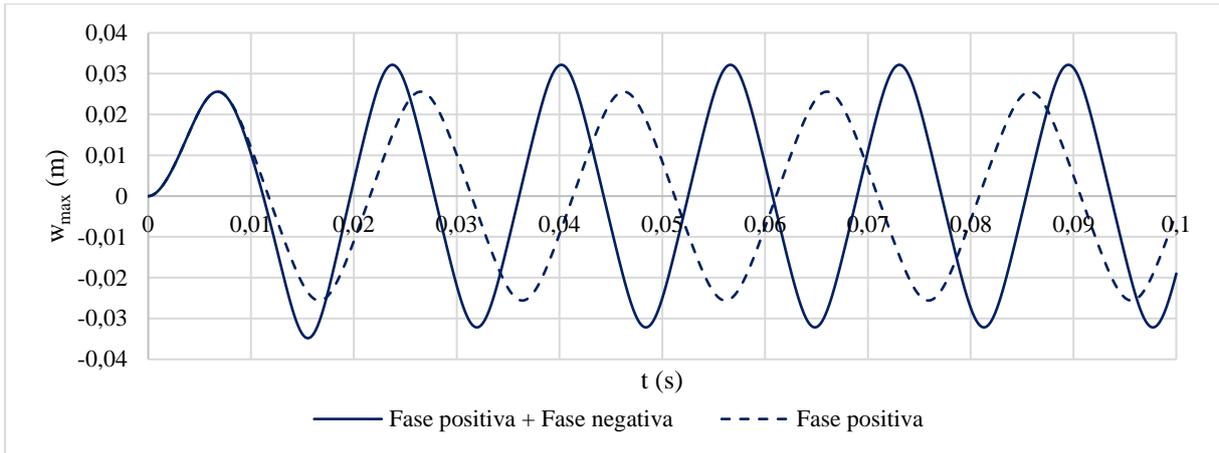


Figura 11. Avaliação do uso da equação cúbica na formulação

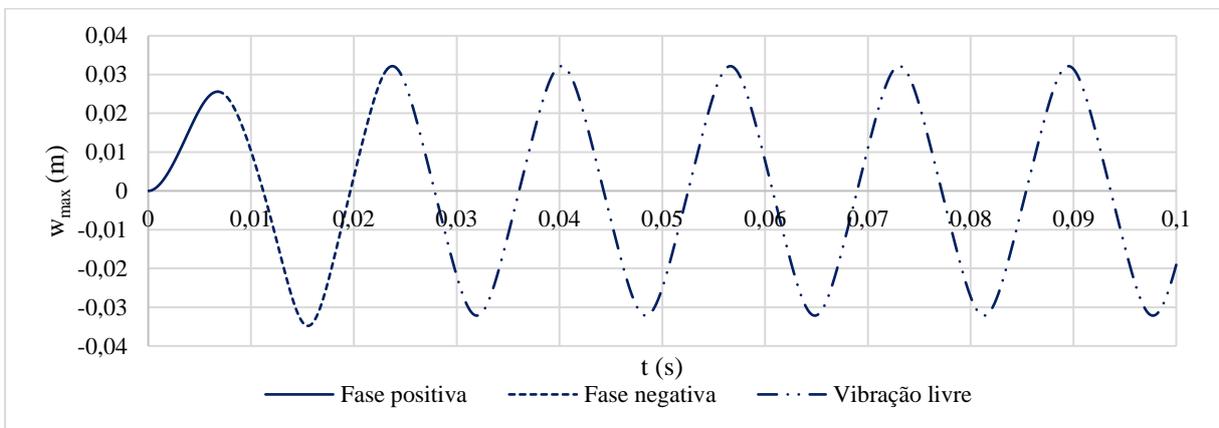


Figura 12. Fases de carregamento discretizadas na resposta da estrutura

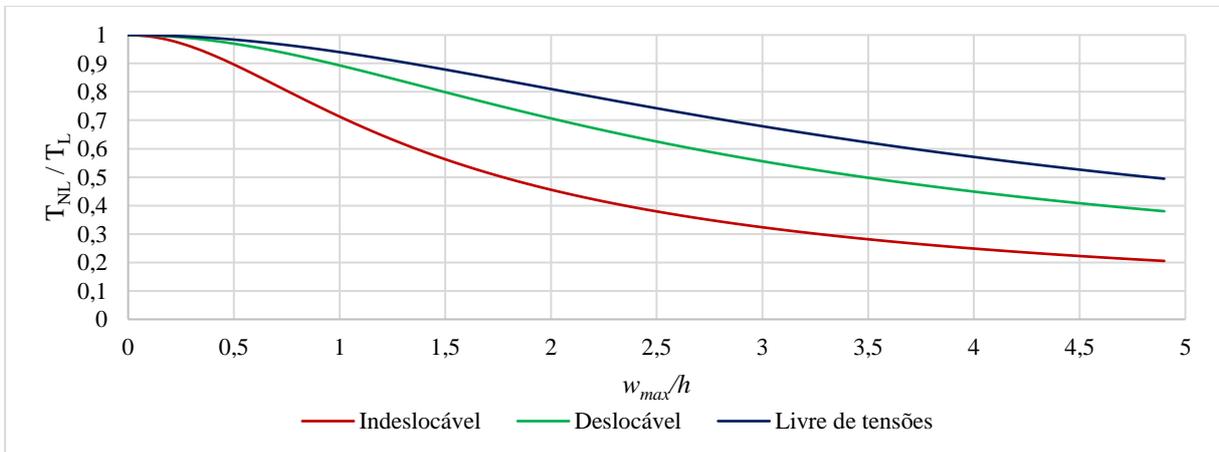


Figura 13. Relação entre período não linear e linear

4.2 Estudo paramétrico do carregamento explosivo

Os resultados apresentados a seguir avaliam os resultados da placa analisada no exemplo de referência, variando a massa aplicada (W_{TNT}) e a distância escalar (Z). As Figura 14 a Figura 16 apresentam a relação entre o deslocamento considerando apenas a flexão com o deslocamentos total, ou seja, $w_{max,b}/w_{max}$, para as condições de contorno livre de tensões, indeslocável e deslocável, respectivamente. É possível observar que, no geral, para massas de até 80 kg de TNT, a consideração da fase negativa na análise de placas de comportamento dinâmico torna-se relevante. Foi traçado um

“limite” em todos os casos, onde demarca-se a posição a partir da qual é possível desprezar a fase negativa. É observado ainda que para os casos de maiores liberdades laterais (livre de tensões) a razão $w_{max,b}/w_{max}$ torna-se mais baixa em comparação com os outros casos. Em contrapartida, o caso indeslocável apresenta as maiores razões.

A Figura 17 apresenta a variação da razão da amplitude pela espessura da placa, w_{max}/h , com relação à distância escalar Z e massa de TNT. Para $Z > 10 \text{ m/kg}^{1/3}$, a variação da massa não ocasiona mudança significativa na amplitude, conforme apresentado para cada condição de contorno. Apenas para $Z < 10 \text{ m/kg}^{1/3}$ observa-se uma maior diferença de amplitudes para diferentes massas de TNT, visto que é o intervalo de distância escalar em que ocorrem as maiores sobrepressões.

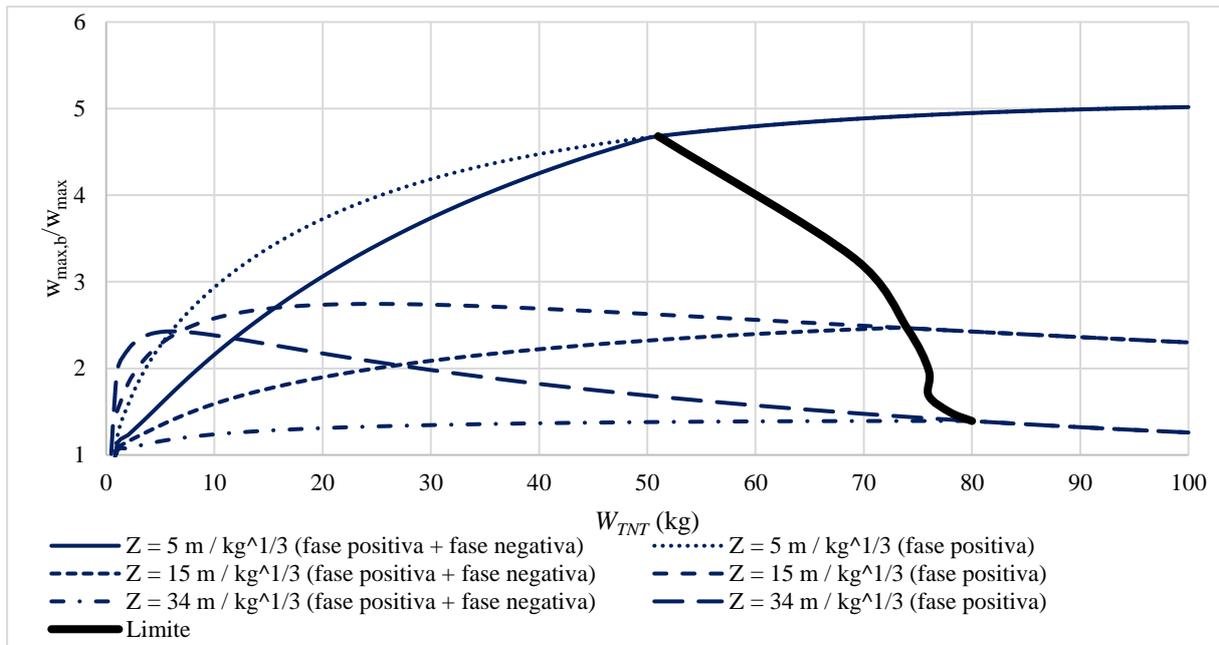


Figura 14. Variação $w_{max,b}/w_{max}$ por massa de TNT para variadas distâncias escalares com condição de contorno livre de tensões

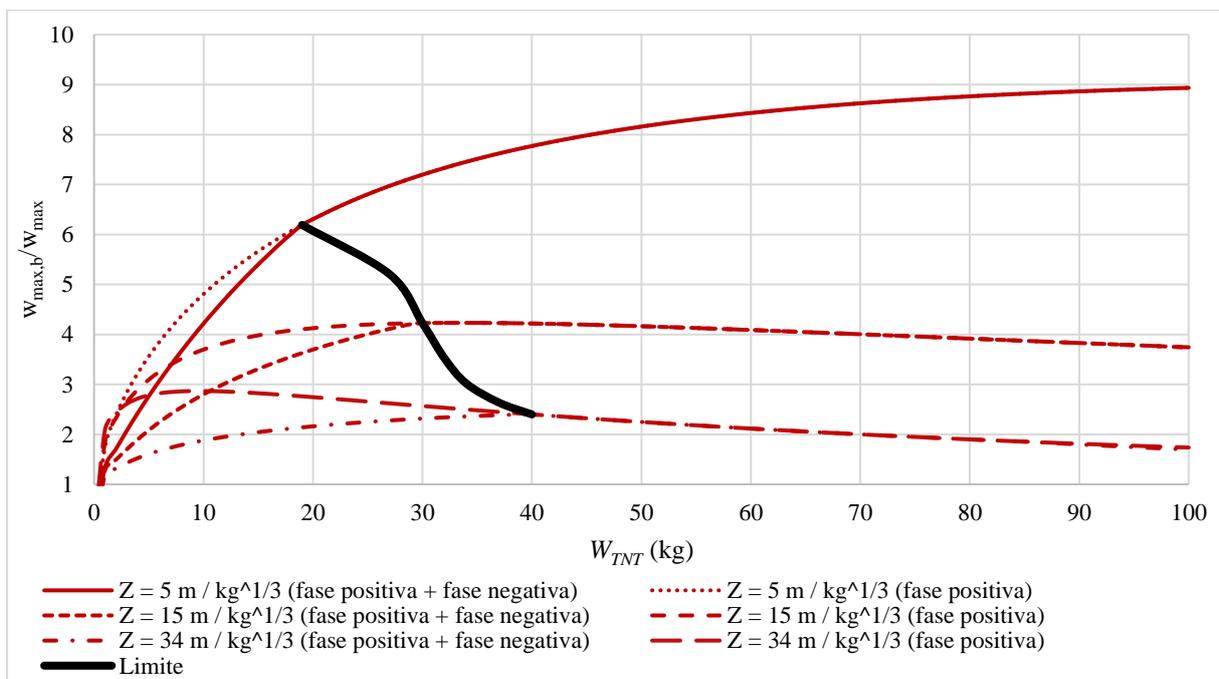


Figura 15. Variação $w_{max,b}/w_{max}$ por massa de TNT para variadas distâncias escalares com condição de contorno indeslocável

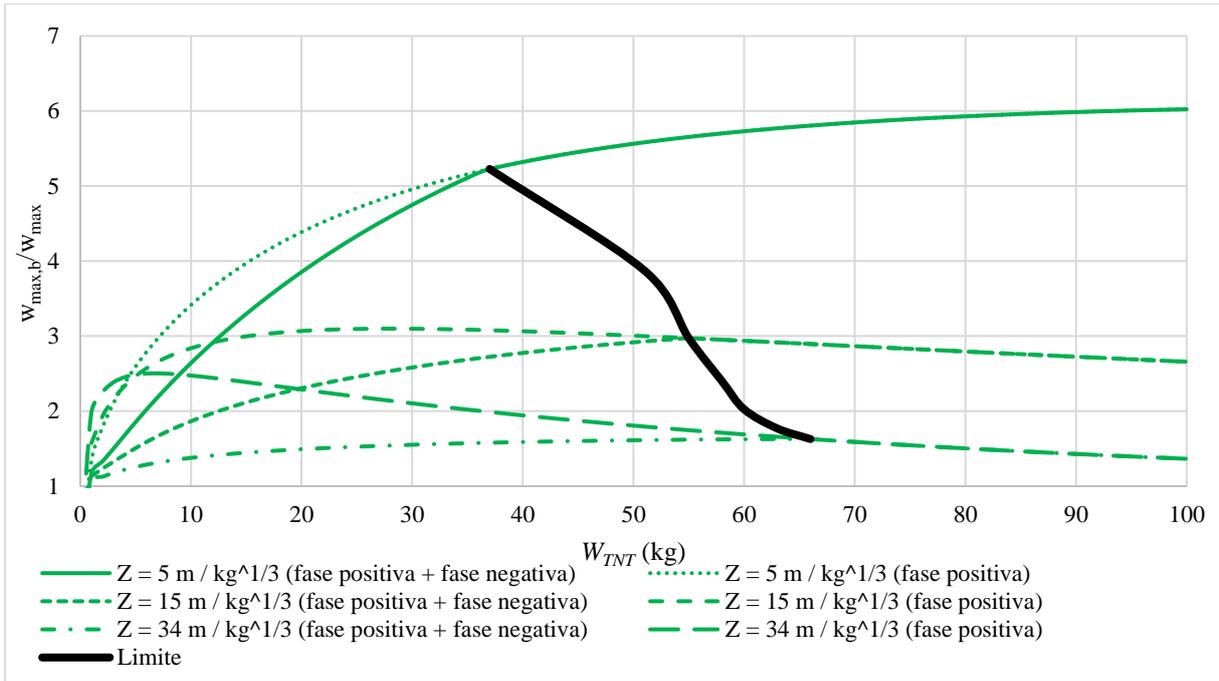


Figura 16. Variação $w_{max,b}/w_{max}$ por massa de TNT para variadas distâncias escalares com condição de contorno deslocável

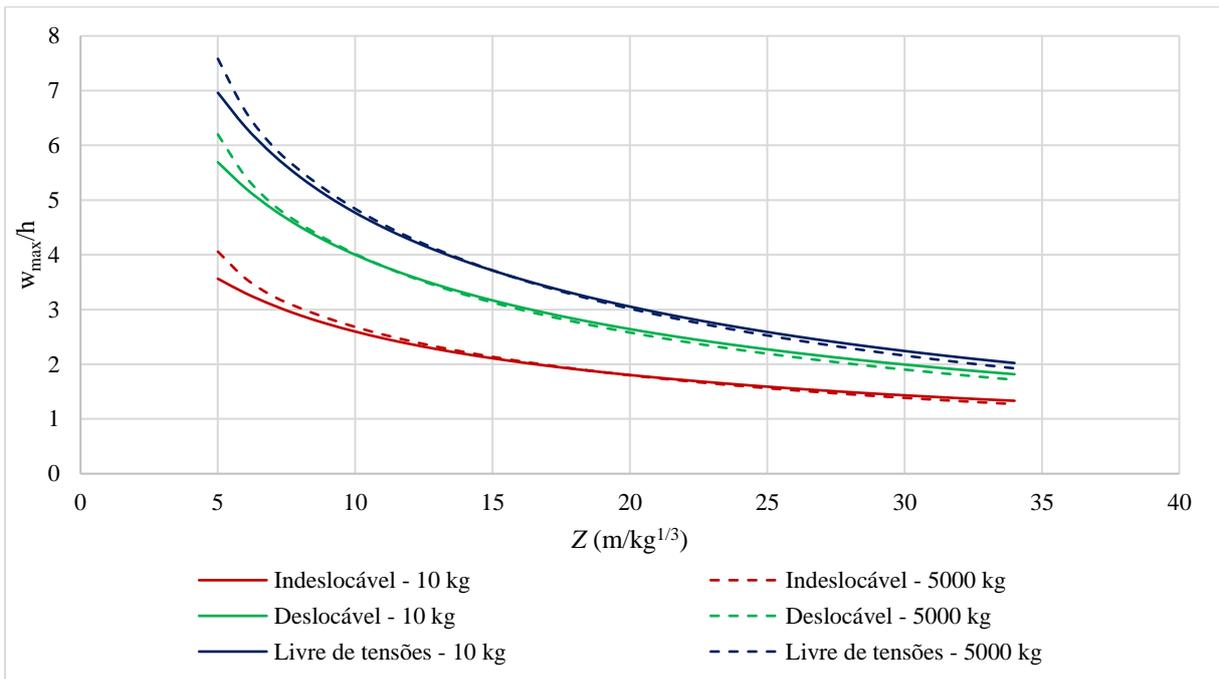


Figura 17. Variação de w_{max}/h pela distância escalar Z para 10 kg e 5000 kg de TNT

O Fator de Amplificação Dinâmica (FAD) que permite avaliar o comportamento da estrutura com relação à razão do tempo de duração da fase positiva e o período linear da placa (t_d/T_L), está apresentado na Figura 18. A frequência linear da estrutura, considerando a placa estudada, é de 24.23 Hz. Como cada condição de contorno lateral afeta a frequência natural de vibração da placa, espera-se que o pico no FAD ocorra para diferentes razões t_d/T_L , o que é verificado.

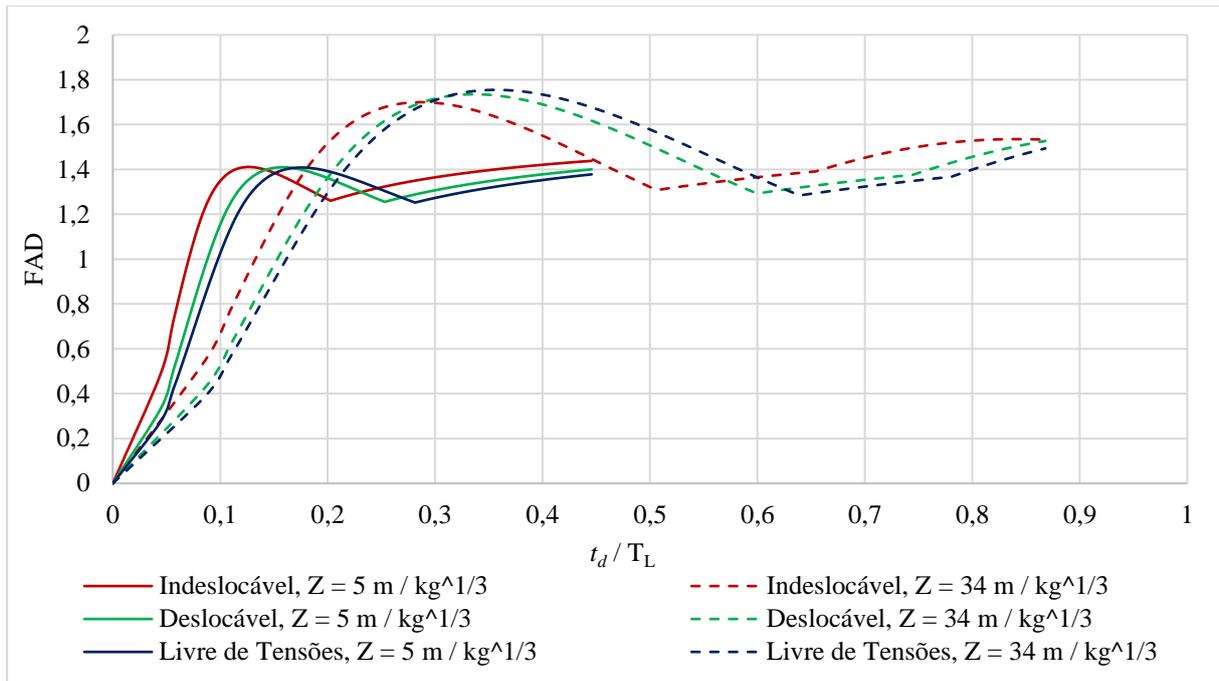


Figura 18. Fator de Amplificação Dinâmica

Finalmente, é avaliado o comportamento das amplitudes quanto à variação da espessura, conforme apresenta a Figura 19. Observa-se que para $Z = 5 \text{ m} / \text{kg}^{1/3}$ tem-se as maiores relações de $w_{max,b}/w_{max}$, visto que para menores distâncias escalares são causadas as maiores sobrepressões na estrutura. Esta relação é intensificada em casos em que o efeito da membrana é relevante (indeslocável) e diminui conforme aumenta a liberdade de movimentação lateral da estrutura (livre de tensões). Além disso, verifica-se que o aumento da espessura acarreta menores relações $w_{max,b}/w_{max}$.

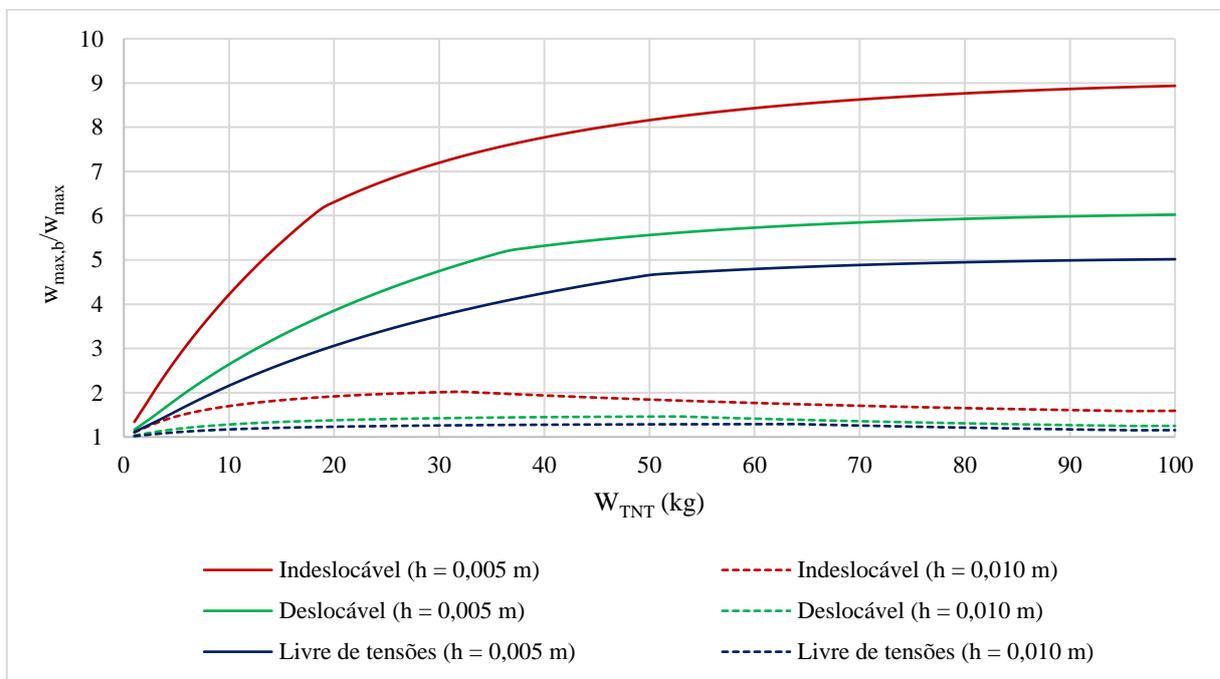


Figura 19. Relação $w_{max,b}/w_{max}$ para diferentes valores de W_{TNT} com $Z = 5 \text{ m} / \text{kg}^{1/3}$

5 Conclusões

Este trabalho teve por objetivo apresentar o comportamento dinâmico de placas considerando efeito de membrana submetidas a carregamentos explosivos, de acordo com a teoria de grandes deslocamentos de von Karman e com solução numérica da equação diferencial não linear realizada pelo método de Runge-Kutta.

Com base na análise das características da carga, avaliou-se que é importante a consideração da fase negativa na análise dinâmica de placas, visto que o impulso desta mesma fase com relação ao impulso total aplicado na estrutura aumenta conforme a distância escalar. Além disso, conforme a massa utilizada, as maiores amplitudes podem ser registradas durante a fase negativa, o que corrobora a necessidade da sua consideração.

Empregou-se a formulação do efeito de membrana, para as condições de contorno livre de tensões, indeslocável e deslocável. A partir da análise de resultados, verificou-se que o efeito da rigidez da membrana é relevante para as condições que possuem maiores restrições (indeslocáveis). Já em estruturas com maiores liberdades laterais (livre de tensões), este efeito é pequeno e quase nulo quando as razões das dimensões do plano da placa são maiores que 2. Já o caso deslocável caracteriza-se por possuir resultados intermediários.

Paralelamente, pelo fato de o caso livre de tensões possuir os menores efeitos da rigidez da membrana, o resultado em amplitude da placa é o maior, ao contrário do caso indeslocável, que apresenta os menores deslocamentos. Este processo é intensificado conforme a espessura da placa e de acordo com a carga aplicada. Para maiores espessuras e menor carga imposta, torna-se irrelevante a escolha de uma condição de contorno para a membrana.

O estudo do FAD com base no carregamento explosivo revelou a existência de picos e vales no comportamento. A diferença da ocorrência destes segundo a condição de contorno lateral é provavelmente caracterizada pela não linearidade imposta pela consideração do efeito de membrana na estrutura, o que altera seu período natural, mas ainda são necessários estudos aprofundados para chegar a uma conclusão mais precisa.

Agradecimentos

Os autores agradecem à UERJ e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil pelo apoio quanto ao laboratório de computação, à CAPES e à FAPERJ pelo apoio financeiro.

Referências

- [1] F. G. Friedlander. The diffraction of sound pulses I. Diffraction by a semi-infinite plane. Communicated by G. I. Taylor, F.R.S., 1940.
- [2] S. A., Granstrom, S. A. Loading characteristics of fair blasts from detonating charges. Technical Report 100, Transactions of the Royal Institute of Technology, Stockholm, 1956.
- [3] S. E., Rigby, T., Andrew, T., Bennet, S. D., Clarke, S. D., Fay. The Negative Phase of the Blast Load. International Journal of Protective Structures. Multi - Science Publishing ISSN 2041-4196, 2013.
- [4] G. F., Kinney, K. J., Graham. Explosive Shocks in Air. Springer Science + Business Media New York. ISBN 978-3-642-86684-5, 1985.
- [5] C. E., Needham, Blast Waves, Shock Wave and High Pressure Phenomena. DOI 10.1007/978-3-642-05288-0_1, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010.
- [6] US Department of Defense, Structures to resist the effects of accidental explosions, US DoD, Washington DC, USA, UFC-3-340-02, 2018.
- [7] T., von Karman. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, IV/4, Teubner (1910) pp. 311-385.

- [8] N. Yamaki. Stress Distribution in a Rectangular Plate under a Pair of Concentrated Forces, The Reports of the Institute of High Speed Mechanics, Tohoku University, 8 (1957), pp. 1 - 12.
- [9] N. Yamaki, Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates. ZAMM 1961; 41 (12): 601 – 10
- [10] A. D., Gupta, F. H., Gregory, R. L., Bitting, S. Bhattacharya. Dynamic Analysis of an Explosively Load Hinged Rectangular Plate. Computers & Structures Vol. 26, N°1/2. Pp. 339-344, 1987.
- [11] V. R., Feldgun, Y. S., Yankelevsky, Y. A., Karinski. A nonlinear SDOF model for blast response simulation of elastic thin rectangular plates. International Journal of Impact Engineering, 2015.
- [12] S. E., Rigby. Blast Wave Clearing Effects on Finite - Sized Targets Subjected to Explosive Loads. Doctor's thesis. The Department of Civil and Civil Structural Engineering at the University of Sheffield, 2014.
- [13] A. W. Q. R., Reis. Análise Dinâmica de Estruturas de Placa Submetidas a Carregamentos Explosivos. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.
- [14] V. V. Nishawala. A Study of Large Deflection of Beams and Plates. The State University of New Jersey. New Jersey, 2011.
- [15] G. Duffing. Erzwungene schwingungen bei veranderlicher eigenfrequenz und ihre technische bedeutung, Series: Sammlung Vieweg, N° 41/42. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1918.
- [16] A. C., Soudack. Nonlinear Differential Equations Satisfied by the Jacobian Elliptic Functions. Mathematics Magazine, Vol. 37, N° 3 (May 1964). pp 138 - 147.