

## COMPUTATIONAL ANALYSIS OF CRACK GROWTH IN DUCTILE MATERIALS

**Machado, G. A.**

**Bittencourt, E.**

*giancarlo.machado@ufrgs.br*

*eduardo.bittencourt@ufrgs.br*

*Universidade Federal do Rio Grande do Sul*

*Av. Osvaldo Aranha, 99 – 3º Floor. 90035-190, Porto Alegre-RS, Brazil.*

**Abstract.** Rupture in metals can occur by cleavage, where all process is controlled by stresses, or by a combination of critical stresses and strains in a process known as ductile fracture. The Linear Elastic Fracture Mechanics, widely used in engineering practice, is in general based on the assumption that the first process prevails, which occurs only under certain conditions. Consideration of the second fracture process is not so well disseminated. In this work, two methodologies are considered to take into account the transition cleavage/ductile. One is based on the Tvergaard-Hutchinson's trapezoidal cohesive model and the other is based on the Gurson's ductile damage model. The two models are considerably different and in this work, initially, the relationships between the two models are established. Then, the conditions for a transition from cleavage to ductile fracture are determined and discussed. Results are presented based on crack growth resistance curves obtained for different material parameters. A simple numerical model in mode I rupture is considered.

**Keywords:** Fracture, Ductile Materials, Cohesive Zone Model

## 1 Introdução

Na Mecânica da Fratura, o estudo de ruptura de materiais dúcteis pode ser feito considerando-se uma trinca discreta, com tamanho e posição conhecidos. Em uma segunda abordagem, a ruptura de materiais dúcteis pode ser introduzida por meio do conceito de dano no material, que acontece sem o surgimento de uma trinca inicial, por meio de um processo de fratura dúctil.

Modelos de zona coesiva (CZM – Cohesive zone model) são bastante explorados no estudo da fratura por clivagem. O conceito deste modelo se baseia nos princípios idealizados por Dugdale [1] e Barenblatt [2], que consideravam tensões com módulos contrários às tensões aplicadas no corpo presentes nas extremidades da trinca. O processo de fratura no CZM é intrínseco à linha da trinca, relacionando as tensões ( $T$ ) aos deslocamentos ( $\Delta$ ) presentes ao longo da interface criada.

Entre os CZM existentes, destacam-se as leis constitutivas formuladas por Xu e Needleman [3], Tvergaard e Hutchinson [4], Zhang e Paulino [5], Roth [6], entre outros. O modelo trapezoidal de Tvergaard-Hutchinson será base para este trabalho. Neste modelo, as forças aplicadas sobre o corpo fazem com que a abertura na zona coesiva aumente, com a tensão chegando a um valor máximo  $\sigma_{\max}$  que permanecerá constante por um período, e por fim diminuindo. Tvergaard e Hutchinson [5] constatam que não há crescimento de trinca em nenhum caso enquanto o valor de  $\sigma_{\max}$  não for alcançado. Com as tensões chegando a zero, toda a tenacidade do material é consumida, completando o processo de ruptura.

O processo de ruptura por mecânica de dano contínuo (CDM – Continuum damage mechanics) procura estabelecer o enfraquecimento de uma região mediante a degradação de suas propriedades mecânicas [7]. Diferentemente da ruptura por clivagem, a fratura dúctil então considera as deformações plásticas, e não somente as tensões geradas no processo. Entre as diversas formulações exploradas de dano em materiais, este trabalho tem como foco as formulações elaboradas por Gurson [8], que leva em consideração a fração de vazios como variável de degradação.

O surgimento de vazios se daria por um fenômeno de nucleação, que cresceriam juntamente com vazios iniciais até posterior aglomeração, desencadeando o fenômeno de coalescência. A maioria desses vazios é nucleada devido às deformações plásticas, mesmo havendo uma grande fração inicial de porosidade e impurezas, onde a coalescência seria o estágio mais crítico. Tvergaard [9] afirma que os vazios mais significativos nucleiam nos primeiros estágios da deformação. Ao longo dos anos muitas modificações foram feitas ao modelo inicial de Gurson, como as de Tvergaard [9][10], Zhang e Niemi [11] e Nahshon e Hutchinson [12].

O objetivo deste estudo é investigar as transições entre os dois processos de ruptura citados, por meio de simulações em rotinas computacionais em uma peça metálica modelada em elementos finitos. Um deslocamento é aplicado na peça gerando uma tensão que desenvolverá o dano em regiões plásticas por nucleação de vazios, crescimento e coalescência, até a falha do material, ao mesmo tempo em que o processo de clivagem acontece. Foram feitas diversas análises para diferentes valores de parâmetros de dano, em estado plano de deformações, relacionando a influência de cada fator no processo de clivagem e na transição dos processos apresentados.

Curvas de resistência da fratura (Curva R) foram obtidas para análise da propagação da trinca nos casos elasto-plásticos. O uso deste tipo de abordagem em termos de  $K_{IC}$  ou  $J_{IC}$  é disseminado globalmente e segundo Beremin [13] é bastante apropriado para casos em modo I de ruptura e isotérmicos.

## 2 Definições dos processos e modelos de ruptura

### 2.1 Modelo de Zona Coesiva

Como citado anteriormente, a lei coesiva adotada neste estudo é baseada na proposta trapezoidal de Tvergaard-Hutchinson. Logo, o comportamento da tensão  $\sigma(\lambda)$  na zona coesiva proposta,

normalizado pela tensão máxima  $\sigma_{\max}$  pode ser observado na Fig. 1.

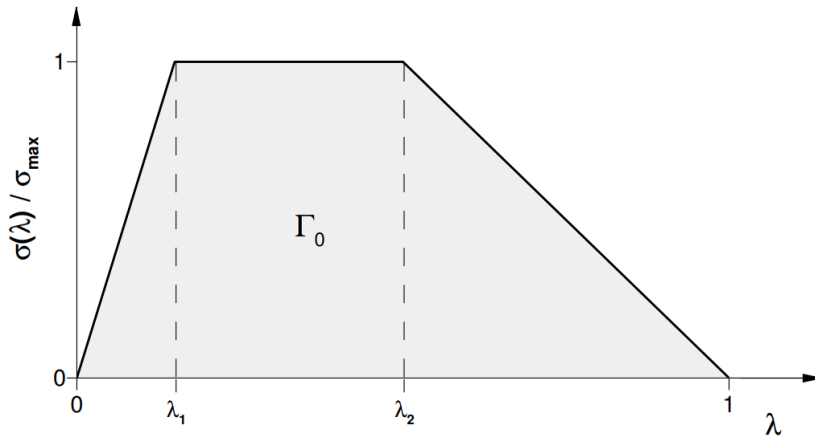


Figura 1. Lei trapezoidal de separação na zona coesiva (Tvergaard-Hutchinson)

Onde  $\lambda$  é um parâmetro adimensional obtido em função das aberturas na zona coesiva e seus respectivos valores críticos, e  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  aparecem como fatores de forma da lei de separação:

$$\lambda = \left[ \left( \frac{\Delta_n}{\delta_n} \right)^2 + \left( \frac{\Delta_t}{\delta_t} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1)$$

Em (1),  $\Delta_n$  e  $\Delta_t$  são respectivamente as aberturas normais e tangenciais da trinca na zona coesiva, e  $\delta_n$  e  $\delta_t$  seus respectivos valores críticos. Deste modo, como observado na Fig. 1,  $\lambda$  crescerá com o aumento da abertura, caracterizando a ruptura quando  $\lambda = 1$ . Diferente do modelo disseminado por Needleman [14], este fator fará com que os deslocamentos tangenciais também sejam contabilizados na determinação da tensão na zona coesiva. Assim, segundo Tvergaard [4] enquanto  $\lambda$  aumentar monotonicamente, as tensões são expressas por:

$$T_n = \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_n} = \frac{\sigma(\lambda)}{\lambda} \frac{\Delta_n}{\delta_n}, \quad T_t = \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta_t} = \frac{\sigma(\lambda)}{\lambda} \frac{\Delta_t}{\delta_t} \quad (2)$$

O potencial  $\Phi$  da energia de fratura consumida (ou distribuição da energia de fratura) vale:

$$\Phi(\Delta_n, \Delta_t) = \delta_n \int_0^\lambda \sigma(\lambda') d\lambda' \quad (3)$$

$\Gamma_0$  é a energia consumida por unidade de área no processo de fratura por clivagem e pode ser relacionada a energia  $2\gamma$  da teoria de Griffith [15]. Seu valor pode obtido pela área abaixo da curva de  $\sigma(\lambda)$  conforme a Fig. 1:

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} \sigma_{\max} \delta_n (1 - \lambda_1 + \lambda_2) = 2\gamma \quad (4)$$

A energia de fratura aplicada ao corpo pode ser calculada pela integral J, definida por Rice [16] como:

$$J = \int_{\Gamma} \left( W_{n1} - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) dl, \quad W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (5)$$

Onde  $\Gamma$  é um contorno arbitrário entre as faces da trinca, e W a densidade da energia de deformação. Na mesma formulação,  $T_i$  são os vetores tensão aplicados no contorno,  $\sigma_{ij}$  o tensor de

tensões de Cauchy,  $\varepsilon_{ij}$  o tensor de pequenas deformações e  $u_i$  os deslocamentos no contorno, onde  $u_1$  representa a direção do plano da trinca.

## 2.2 Modelo de Dano Contínuo

O desenvolvimento da fratura dúctil é modelado utilizando-se a formulação de Gurson[8] para superfície de escoamento ( $\Psi = 0$ ) considerando microvazios esféricos, modificada por Tvergaard [9][10], que adiciona os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  para amplificar o efeito da pressão hidrostática em todos os níveis de deformações. A superfície é função da variável  $f$ , que representa a fração volumétrica de vazios que varia de 0 a 1:

$$\Psi = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} - \left[ 1 - 2\alpha_1 f \cosh\left(\frac{\alpha_2 (3p)}{2 \sigma_y}\right) + \alpha_1^2 f^2 \right]^{1/2} = 0 \quad (6)$$

Onde  $p$  é a pressão hidrostática,  $s_{ij}$  a tensão desviadora e  $\delta_{ij}$  o delta Kronecker:

$$p = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij} \quad (7)$$

A taxa de crescimento de vazios ( $\dot{f}$ ) terá duas relações que dependerão do valor de uma fração volumétrica de vazios crítica  $f_c$ , que ditará o início da coalescência dos vazios:

$$\dot{f} = \begin{cases} \dot{f}_n + \dot{f}_g & f \leq f_c \\ \dot{f}_c & f > f_c \end{cases} \quad (8)$$

Onde  $\dot{f}_n$  é a taxa de vazios nucleados,  $\dot{f}_g$  a taxa de crescimento e  $\dot{f}_c$  de coalescência de vazios, e seus valores são expressos por:

$$\dot{f}_n = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon^p - \varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right] \dot{\varepsilon}^p \quad (9)$$

$$\dot{f}_g = (1-f) \dot{\varepsilon}_i^p \quad (10)$$

$$\dot{f}_c = \frac{f_U - f_C}{\Delta\varepsilon} \dot{\varepsilon}^p \quad (11)$$

Na expressão (9),  $f_N$ ,  $s_N$  e  $\varepsilon_N$  são os parâmetros de nucleação, onde  $f_N$  é a fração volumétrica de vazios nucleados, e  $\varepsilon_N$  é um valor de deformação equivalente média em torno da qual os vazios se formam. Deste modo a nucleação é calculada como uma distribuição de desvio padrão  $s_N$ , se comportando como a Fig. 2.

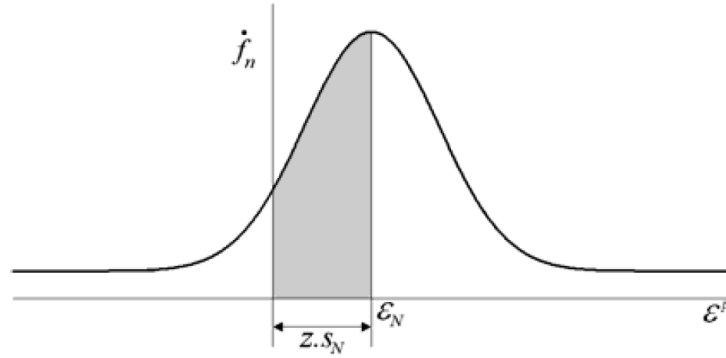


Figura 2. Área sob a distribuição da nucleação. [7]

Sabendo que a distribuição descrita na lei de nucleação é semelhante à distribuição normal de Gauss, onde a taxa de vazios  $\dot{f}_n$  é proporcional à deformação plástica  $\varepsilon_{pl}$  (Fig. 2), pode-se averiguar se para uma dada combinação de  $\varepsilon_N$  e  $s_N$  o valor de  $f_N$  estipulado será ou não alcançado. Para isso, a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\varepsilon_N - z \cdot s_N \geq 0 \quad (12)$$

Onde  $z$  é obtido por meio de tabelas de estatística [17], que calculam a área sob a curva de Gauss na porção negativa, até o nível de formação desejado. Deste modo, para uma formação mínima de 99% de  $f_N$ , o valor retornado de  $z$  será de 2,327.

Needleman e Tvergaard [18] têm usando os parâmetros de  $s_N = 0,1$  e  $\varepsilon_N = 0,3$  em seus estudos, para diversos tipos de materiais. Observa-se que estes valores oferecem uma boa margem para análise, pois a nucleação não ocorre de maneira brusca e o valor do desvio padrão é respeitado para a condição (12).

Em (11),  $f_c$  e  $\Delta\varepsilon$  são os parâmetros que governam a coalescência de vazios, e  $f_U$  a fração volumétrica de vazios correspondente à ruptura na ausência de pressão hidrostática, e aproximado por:

$$f_U = \frac{1}{\alpha_1} \quad (13)$$

Sabendo-se que a coalescência ocorre em uma fração volumétrica de vazios entre 0,1 e 0,2 [19], e que em estudos anteriores Tvergaard e Needleman [9][10][18] utilizam  $f_c = 0,15$  a 0,2 para análises de modelos numéricos, pode se ter uma referência base para determinação deste fator no presente análise. Porém, maiores valores de  $f_c$  não se tornam muito viáveis neste estudo, tendo em vista a peça começará a romper por clivagem antes que o índice de vazios seja suficiente para haver coalescência.

### 3 Formulação do problema

O sólido elasto-plástico seguirá as seguintes relações unidimensionais:

$$\sigma = \begin{cases} E\Delta\varepsilon^e & \sigma \leq \sigma_y \\ \sigma_y + h\Delta\varepsilon^p & \sigma \geq \sigma_y \end{cases} \quad (14)$$

Em (14),  $E$  é o módulo de Young,  $\sigma_y$  a tensão de escoamento do material,  $h$  o módulo de endurecimento e  $\Delta\varepsilon^e$  e  $\Delta\varepsilon^p$  as variações de deformações elástica e plástica.

O modelo utilizado se trata de uma peça de alumínio com  $E = 70.000$  Mpa,  $\nu = 0,33$ . Diferentes valores de  $h$  e  $\sigma_y$  foram considerados. As análises foram feitas em Estado Plano de Deformação (EPD), para casos com e sem endurecimento, em simulações com 10.000 incrementos de tempo. Na Fig. 3 é possível se observar a malha utilizada juntamente a parte refinada ao longo da linha de fratura. O tamanho típico dos elementos finitos próximos da trinca é de  $2 \cdot 10^{-6}$  mm.

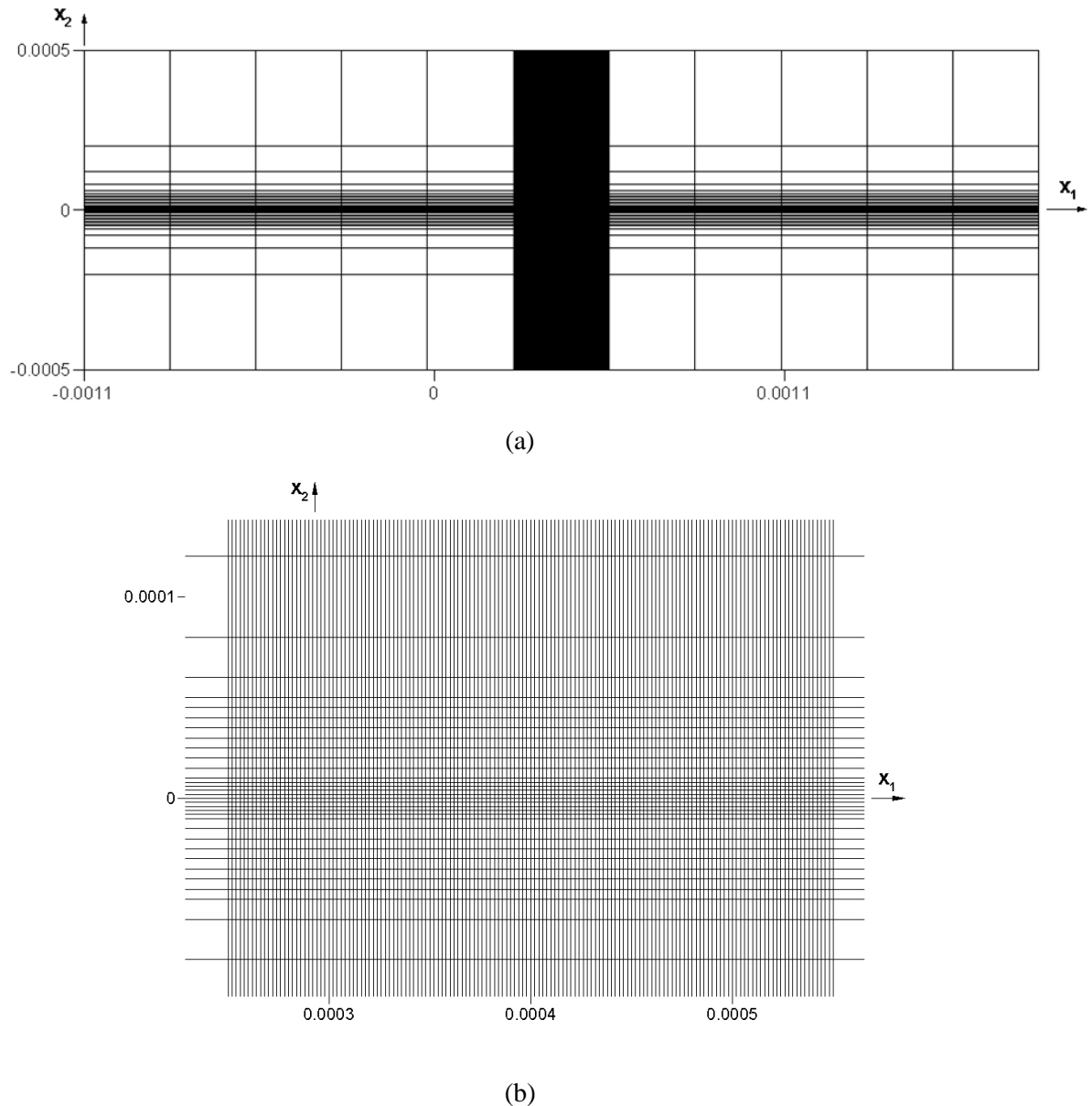


Figura 3. Malha de elementos finitos. (a) Malha completa. (b) Parte refinada ao longo da linha da fratura.

A trinca inicial foi posicionada ao longo do eixo  $x_1$  ( $x_2 = 0$ ), onde o modelo de zona coesiva foi aplicado. O trabalho de fratura  $\Gamma_0$  do CZM foi fixado em 0,001 N/mm, com tensão máxima  $\sigma_{\max}$  em 1750 MPa. Esta tensão caracteriza aproximadamente a tensão atômica máxima na ponta da trinca. ( $\sigma_{\max} = E / 40$ ).

Os valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  utilizados seguem orientação dos autores que sugerem valores de  $\lambda_1 = 0,15$  e  $\lambda_2 = 0,5$ . Desta maneira, por meio de (4) é possível se encontrar uma abertura característica  $\delta_n$  de  $8,4656 \cdot 10^{-7}$  mm.

Apesar da peça se encontrar em modo I de rompimento, não foram desprezados os efeitos tangenciais, levando-se em conta os valores de  $\Delta_t$  por parcela de coeficiente Poisson, e principalmente pelo fato do modelo de Tvergaard-Hutchinson também usar este fator como contribuição em  $\lambda$ .

As simulações foram operadas com uma precisão de  $10^{-3}$  para o resíduo relativo do equilíbrio em forças, em todos casos. Também foram feitos testes onde esse valor foi alterado até  $10^{-7}$ , não havendo diferença significativa nos resultados encontrados até a 6ª casa decimal.

## 4 Análises e Discussão de Resultados

Primeiramente foram calculados alguns casos com clivagem pura, somente com o CZM como responsável no processo de ruptura da peça. Assim, nas Fig. 4 e Fig. 5 podem ser observadas as Curvas R para diversos valores de  $\sigma_y$  em casos com e sem endurecimento:  $h = E/100$ ,  $h = E/300$  e  $h = 0$  (EPP).

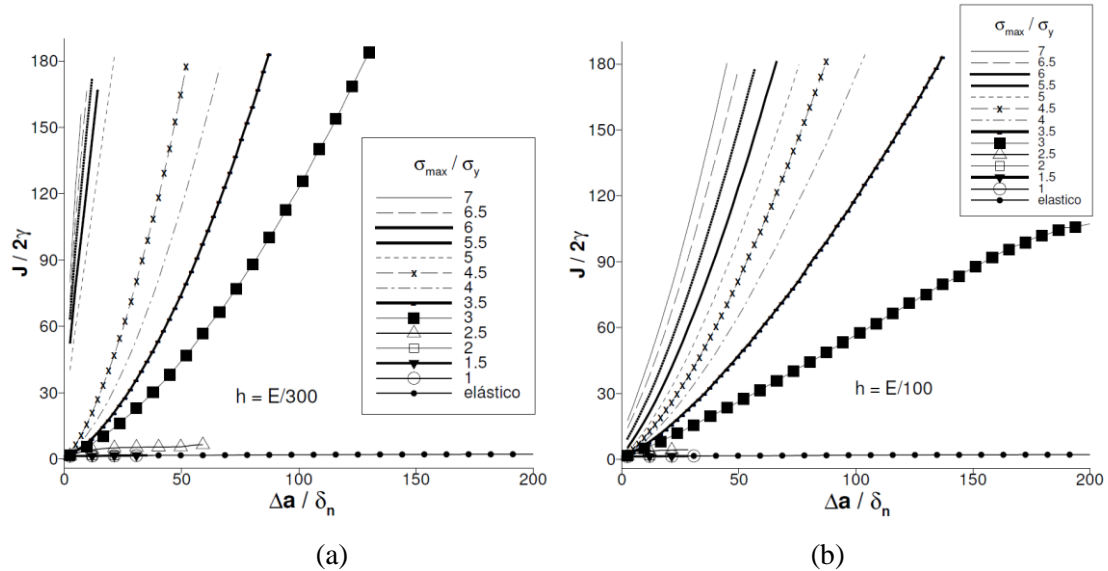


Figura 4. Curva R para casos com endurecimento. (a)  $h = E/300$ . (b)  $h = E/100$ . -  $\sigma_{max}/\sigma_y$  de 0 a 7

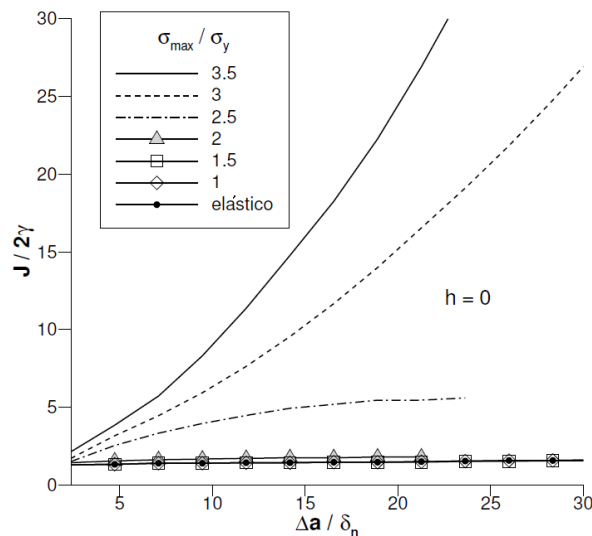


Figura 5. Curva R para casos sem endurecimento -  $\sigma_{max}/\sigma_y$  de 0 a 3,5

Onde nas Fig. 4 e Fig. 5,  $\Delta a$  é a variação do comprimento da trinca e  $\delta_n$  o comprimento característico. Em linhas gerais, quanto maior a relação  $\sigma_{max}/\sigma_y$ , maior a tenacidade do material, ou seja, para que ocorra a propagação, maior será a energia de fratura (J) que deve ser fornecida ao corpo. Esse fenômeno ocorre devido à maior dissipação plástica com o aumento da relação.

Nota-se então que praticamente não há ganho de tenacidade para relações de  $\sigma_{max}/\sigma_y$  abaixo de 2,5, assim como constatado por Tvergaard [4]. A tensão de pico necessária no processo de fratura fica em torno de  $2,5\sigma_y$ , e valores menores que este farão com que a trinca propague sem que haja um total desenvolvimento da zona plástica.

Outro fator importante a se observar é que o processo de ruptura neste caso se torna mais lento com a diminuição do módulo de endurecimento, onde em contrapartida, as análises computacionais se mostraram mais estáveis com o aumento módulo de endurecimento linear  $h$ .

A seguir na Fig. 6 pode se observar o campo de tensões na peça no antes do rompimento do primeiro elemento de interface, para  $\sigma_{\max}/\sigma_y = 3,5$  e  $h = E/100$ .

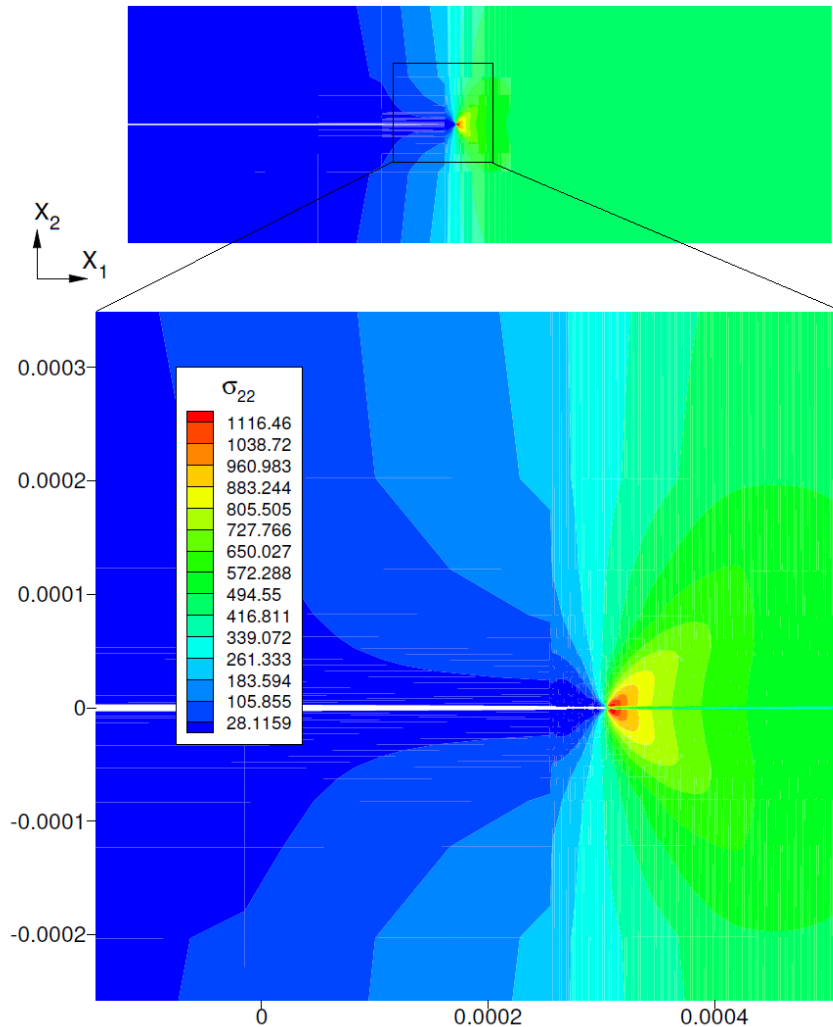


Figura 6. Tensão Longitudinal na região da ponta da trinca.

Com isso a próxima etapa se baseia no emprego do dano dúctil, onde em uma abordagem inicial foram analisados os efeitos da nucleação de vazios seguidos de crescimento no modelo na evolução das trincas, sendo possível se observar o quanto fenômeno afeta a transição do processo de ruptura.

Fixando-se uma fração volumétrica de vazios nucleados  $f_N$  em 0,05, puderam-se determinar os valores do desvio padrão de nucleação  $s_N$  em função do valor da deformação média de nucleação  $\epsilon_N$  para que haja uma formação mínima de 99% de  $f_N$ .

Utilizando-se valores de  $\epsilon_N$  entre 0,1 a 0,4, e respeitando-se a condição exposta em (13), observa-se na Fig. 6 as respectivas curvas de resistência de fratura para casos onde há nucleação e crescimento, com e sem endurecimento linear, onde:  $\sigma_y = 500 \text{ MPa}$ .



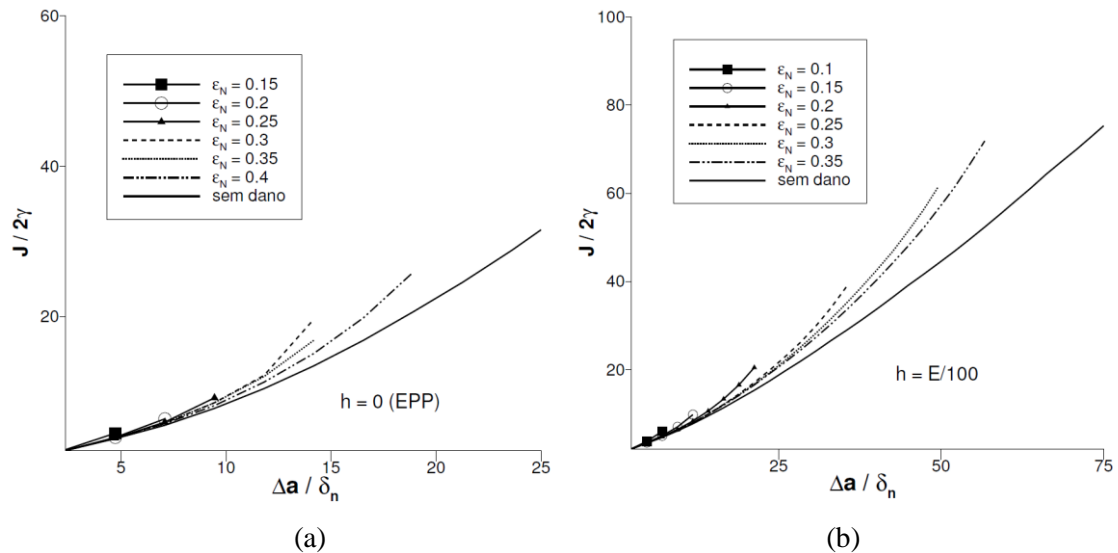


Figura 6. Curva-R para casos com dano considerando-se nucleação e crescimento de vazios. (a) Material elasto-plástico perfeito. (b) Com endurecimento Linear.

Nos casos analisados, notou-se então um maior retardo na propagação das trincas com o início na nucleação. Isso se deve ao fato de que, com o aumento do índice de vazios, as tensões na peça diminuiram, sendo a energia de fratura aplicada ( $J$ ) consumida na forma de deformações. Consta-se na Fig. 6 que o crescimento de vazios com a nucleação faz com que a Curva R se distancie cada vez mais da exemplificação onde não há dano.

A inserção do dano dúctil ocorreu mais lentamente com o aumento da deformação média de nucleação  $\varepsilon_N$ . Tal ocorrência acontece porque  $\varepsilon_N$  causa um deslocamento nas curvas da lei nucleação, onde quanto maior seu valor, mais lento será o fenômeno.

A seguir, considera-se o crescimento e a coalescência nos modelos vistos.

Definidos os parâmetros de nucleação  $f_N = 0,05$ ,  $\varepsilon_N = 0,3$  e  $s_N = 0,1$ , com as seguintes propriedades:  $h = E/100$ ,  $\sigma_0 = 350MPa$ . Os valores de  $f_C = 0,1$  e  $f_C = 0,15$  foram adotados para os exemplos que seguem. Três valores de impurezas/porosidade inicial foram empregados:  $f_0 = 0,01$ ;  $0,005$ ;  $0,001$ .

É possível se obter as curvas que ilustram a tensão e fração volumétrica de vazios na ponta da trinca durante o crescimento e após coalescência (Fig. 7 e Fig. 8). As figuras mostram a evolução da tensão  $\sigma_{22} / \sigma_y$  em função da deformação efetiva de Von Mises  $\varepsilon_{pl}$ . A nucleação assumida ocorreu antes mesmo do início da deformação plástica. Foram utilizados diversos valores de parâmetro de coalescência  $\Delta\varepsilon$ , para os modelos coesivos de Needleman e Tvergaard, embasando-se em valores utilizados por Tvergaard [9] com  $\Delta\varepsilon$  entre 0,25 e 0,6.

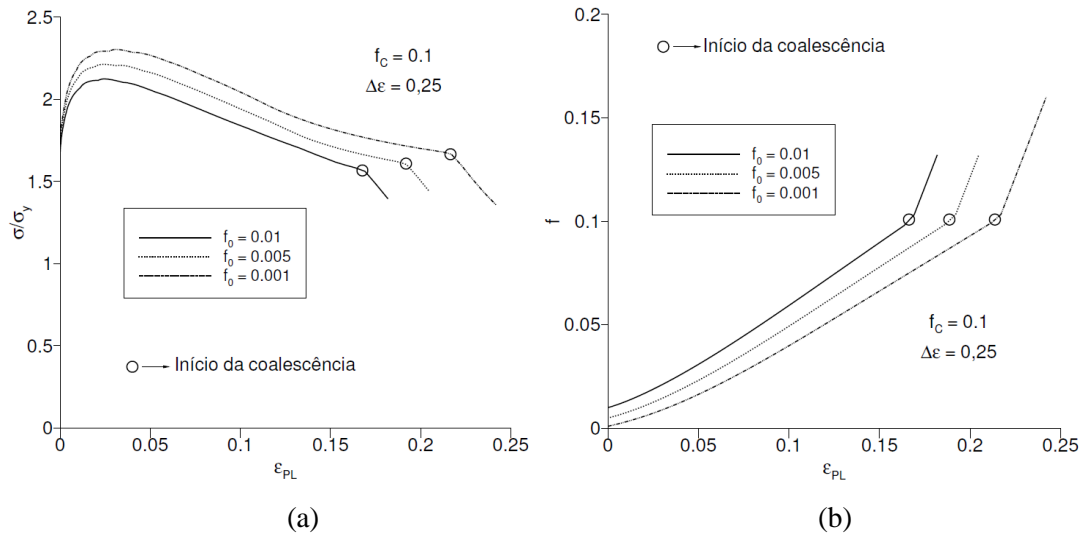


Figura 7. Tensão longitudinal normalizada (a) e fração volumétrica de vazios (b) versus deformação plástica equivalente:  $f_c = 0,1 \Delta\epsilon = 0,25$

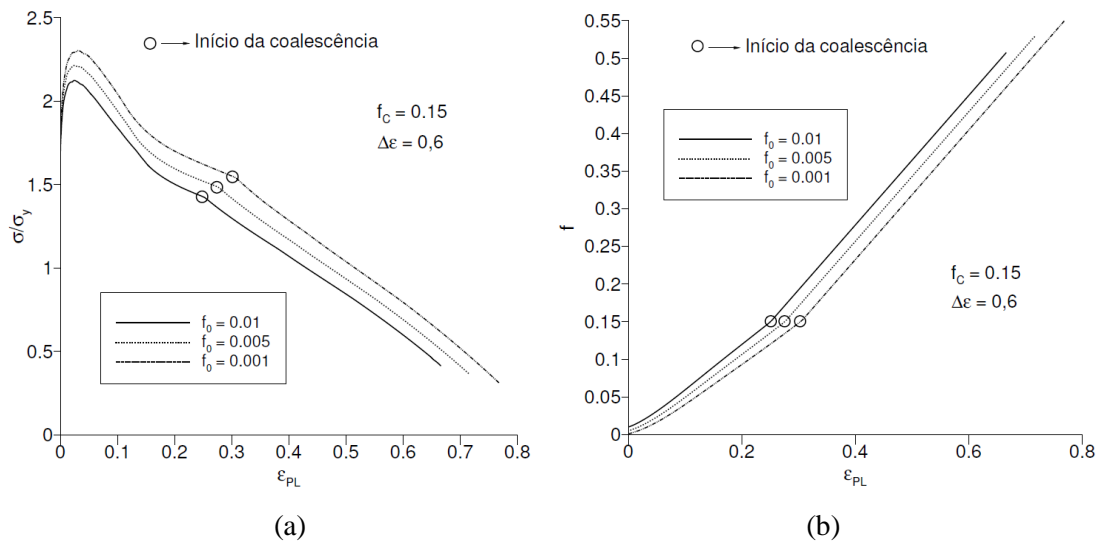


Figura 8. Tensão longitudinal normalizada (a) e fração volumétrica de vazios (b) versus deformação plástica equivalente:  $f_c = 0,15 \Delta\epsilon = 0,6$

Constatou-se uma maior deformação  $\epsilon_{pl}$  equivalente com a diminuição do nível de impureza/porosidade inicial do material, de modo que, apesar da fratura por clivagem ser controlada somente por tensões, ela é afetada indiretamente por estes aspectos. Em estudos anteriores, Tvergaard e Hutchinson [20] relatam que é preciso haver uma diminuição na tensão máxima  $\sigma_{max}$  da zona coesiva quando a deformação plástica efetiva  $\epsilon_e^p$  ultrapassa um valor crítico. Isto porque o modelo de zona coesiva não contabiliza a redução da resistência do material devido à deformação plástica.

Isso agrega grande importância principalmente pelo fato de que  $\sigma_{max}$  juntamente com  $\Gamma_0$  são os fatores de relevância mais significativa no processo de clivagem adotado. Mesmo havendo um processo de ruptura por clivagem, o dano no material vai acontecer antes do processo de fratura, portanto o mesmo se altera. Deste modo por mais que a trinca propague somente por clivagem, a contribuição do dano deverá estar inserida em termos de menores tensões atuantes, e maiores deformações para uma possível correção no valor de  $\sigma_{max}$ .

Na Fig. 9 é possível se observar a contribuição do dano ( $f$ ) na ponta da trinca durante o processo de clivagem.

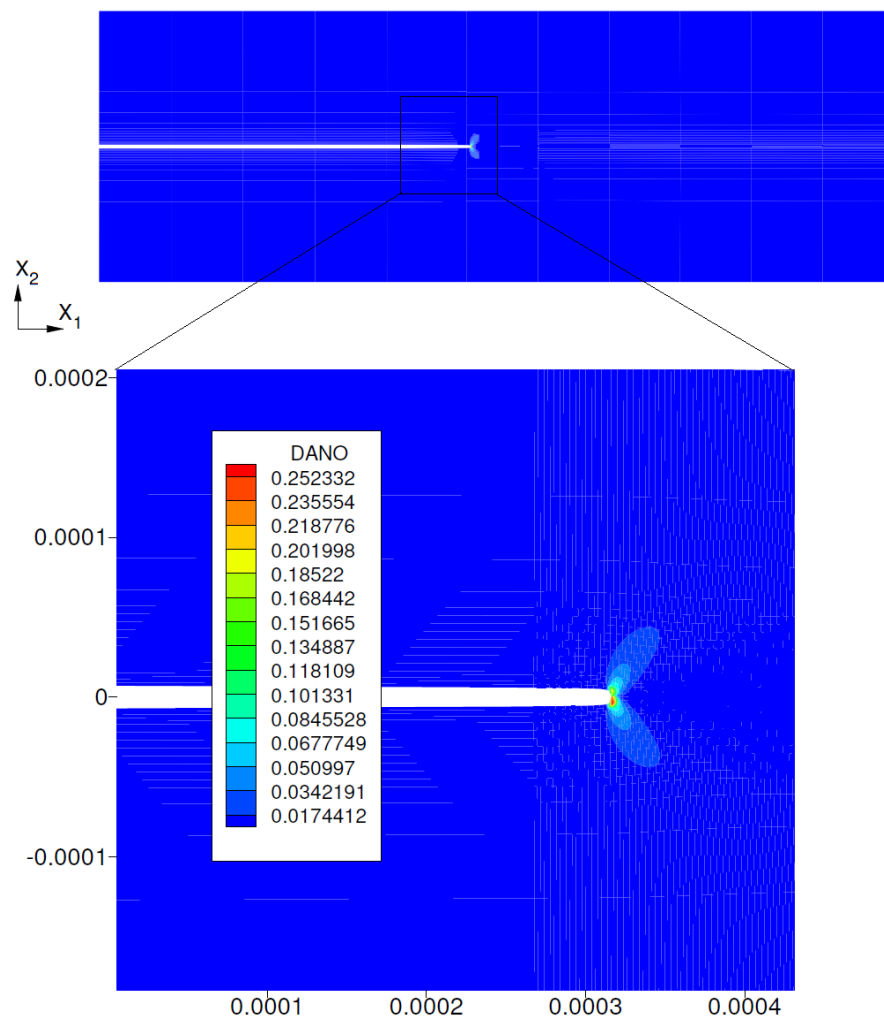


Figura 9. Dano dúctil na ponta da trinca.

Por meio da Fig. 9 pode-se comprovar que o dano é induzido em uma zona plástica formada na ponta da trinca.

## 5 Conclusões

As Curvas R mostram que a tenacidade é proporcional às deformações plásticas equivalentes na ponta da trinca. Isto implica em uma maior energia de fratura  $J$  requerida no processo de fratura em função da maior dissipação de energia no volume do material. Parâmetros de porosidade inicial  $f_0$  e de deformação média equivalente de nucleação  $\varepsilon_N$  se revelaram bastantes significativos no comportamento da Curva R e no tempo de transição entre os dois tipos de ruptura analisados.

O comportamento da fratura não foi investigado para diferentes modos de carregamento no CZM ou com inclusão de temperatura, e poderiam ser analisados em estudos futuros. Outras características também podem afetar a transição entre os tipos de fratura estudados. Xia e Shih [21] discutiram sobre a possibilidade de a relação entre o comprimento inicial da trinca e a largura do espécime ( $a/W$ ) afetar a transição entre processos de fratura. Em outros casos, Howard e Sheikh [22] estudaram as transições de fratura dúctil para clivagem de Beremim [13] em diferentes modos de carregamento, e

Siegmund e Brocks [23] consideraram dependência de triaxialidade das tensões nos modelos de dano e CZM. Tais efeitos também poderão ser estudados futuramente.

## Referências

- [1] Dugdale, Donald S., 1960. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 8, n. 2, pp. 100-104.
- [2] Barenblatt, G. I., 1962. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. In: *Advances in applied mechanics*. Elsevier, pp. 55-129.
- [3] Xu, X.-P., 1994. Needleman, Alan. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 42, n. 9, pp. 1397-1434.
- [4] Tvergaard, V., Hutchinson, J. W., 1992. The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 40, n. 6, pp. 1377-1397.
- [5] Zhang, Z. J., Paulino, G. H., 2005. Cohesive zone modeling of dynamic failure in homogeneous and functionally graded materials. *International journal of plasticity*, vol. 21, n. 6, pp. 1195-1254.
- [6] Roth, S., Hütter, G., Kuna, M., 2014. Simulation of fatigue crack growth with a cyclic cohesive zone model. *International Journal of Fracture*, vol. 188, n. 1, pp. 23-45.
- [7] Cunda, L. A. B., 2006. O modelo de Gurson para Dano dútil: Estratégia Computacional e Aplicações. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de pós-graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.
- [8] Gurson, A. L., 1977. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: part- yield criteria and flow rules for porous ductile media. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 99, pp. 2-15.
- [9] Tvergaard, V., 1982. Influence of void nucleation on ductile shear fracture at a free surface. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 30, n. 6, pp. 399-425.
- [10] Tvergaard, V., 1981. Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. *International Journal of Fracture*, vol. 17, pp. 389-407.
- [11] Zhang, Z. L.; Niemi, E., 1994. A new failure criterion for the Gurson-Tvergaard dilatational constitutive model. *International Journal of Fracture*, vol. 70, n. 4, pp. 321-334.
- [12] Nahshon, K., Hutchinson, J. W., 2008. Modification of the Gurson model for shear failure. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 27, n. 1, pp. 1-17.
- [13] Beremin, F. M. et al., 1983. A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel. *Metallurgical transactions A*, vol. 14, n. 11, pp. 2277-2287.
- [14] Needleman, A., 1987. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *J. Appl. Mech.* Trans. ASME 54 (3), pp. 525–531.
- [15] Griffith, A. A., 1921. VI. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, vol. 221, n. 582-593, pp. 163-198.
- [16] Rice, James R., 1968. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of applied mechanics*, vol. 35, n. 2, pp. 379-386.
- [17] Stevenson, W. J., 1981. Estatística Aplicada à Administração, São Paulo: Harper & Row do Brasil. 495p.
- [18] Tvergaard, V., Needleman, A., 1984. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta metallurgica*, vol. 32, n. 1, p. 157-169.
- [19] Brown, L. M; Embury, J. D., 1973. The initiation and growth of voids at second phase particles. In: *3rd. Int. Conf. On Strength of Metals and Alloys*, Proc. Londres: Institute of Metals. pp. 164-169.
- [20] Tvergaard, V., Hutchinson, J. W., 1996. Effect of strain-dependent cohesive zone model on predictions of crack growth resistance. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, n. 20-22, pp. 3297-3308.
- [21] Xia, L., Shih, C. F., 1996. Ductile crack growth—III. Transition to cleavage fracture incorporating statistics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 44, n. 4, pp. 603-639.

- [22] Howard, I. C., Li, Z. H., Sheikh, M. A., 2000. Modeling the Ductile to Cleavage Transition in Steels and Structures. *Fatigue and Fracture Mechanics: 30th Volume, ASTM STP 1360*, P. C. Paris and K. L. Jerina, Eds., American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, PA, pp. 152-168.
- [23] Siegmund, T., Brocks, W., 2000. The Role of Cohesive Strength and Separation Energy for Modeling of Ductile Fracture. *Fatigue and Fracture Mechanics: 30th Volume, ASTM STP 1360*, P. C. Paris and K. L. Jerina, Eds., American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, PA, pp. 139-151.