

RELIABILITY-BASED STUDY OF CIRCULAR TUNNELS IN ELASTIC MEDIA BY USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

Luís Philipe Ribeiro Almeida
Eduardo Toledo de Lima Junior
João Carlos Cordeiro Barbirato

luis.almeida@ctec.ufal.br

limajunior@lccv.ufal.br

jccb@lccv.ufal.br

*Laboratório de Computação Científica e Visualização, Universidade Federal de Alagoas
Av. Lourival Melo Mota, s/n, Tabuleiro do Martins, 57072-900, Maceio, Alagoas, Brasil*

Abstract. Problems involving cavities or excavations are widely addressed in geomechanics, in both analytical and numerical approaches. The Boundary Element Method (BEM) is well-known as an interesting choice for the analysis of problems involving semi-infinite domains, providing accurate results at a low computational cost. The study of circular tunnels is traditionally performed through a deterministic approach, not considering the uncertainties inherent to the design variables. Since the properties of geomaterials vary in a considerable range, the use of mean or characteristic values in the deterministic methodology does not comprise the several combinations of critical random values (r.v.) of the variables, for the different failure modes considered. This work deals with the probabilistic analysis of circular tunnels embedded in elastic media, by coupling a BEM formulation to a structural reliability model. Some of the loads applied and material parameters are treated as random variables, whose statistical description is found in the literature. The loadings considered include the vertical overburden stress and the lateral earth pressure. Regarding the reliability evaluation, First Order Reliability Method (FORM) and Monte Carlo simulation technique are employed, being compared in terms of accuracy. Regarding the BEM model, the Multiple Reciprocity Method (MRM) is used in the evaluation of domain integrals, and the sub-region technique is employed for the analysis of the tunnel lining. Some examples are presented, in order to validate the coupled BEM-FORM model and apply it to the estimation of failure probability, evaluating the influence of the r.v. taken into account in the probabilistic response.

Keywords: Structural Reliability, Boundary Element Method, half-plane problem

1 Introdução

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) destaca-se como uma valiosa ferramenta na análise de problemas da engenharia. Seu vasto campo de aplicação contribuiu significativamente para sua maior difusão no meio acadêmico, com destaque para casos onde se tem elevados gradientes de tensão, como em problemas encontrados na mecânica da fratura, além de problemas que tenham seu domínio estendido ao infinito ou semi-infinito (com destaque para problemas geomecânicos). O método se caracteriza pela facilidade de modelagem de meios semi-infinitos, sendo esta, realizada de maneira mais eficiente que por métodos que envolvem alguma integração no domínio. Em túneis e problemas que envolvem escavações, a distribuição de tensões pode ser determinada com a avaliação da integral de domínio originada pela pressão exercida pela camada de solo. A utilização do MEC como teoria base para a construção de túneis e escavações é melhor explanada nos trabalhos de Duenser e Beer [1], Duenser *et al.* [2], Zechner e Beer [3], Prazeres *et al.* [4], Beer e Duenser [5] e Dang e Meschke [6].

Levando-se em consideração os parâmetros envolvidos na análise, problemas envolvendo cavidades e escavações são tradicionalmente analisados de modo determinístico, não considerando incertezas inerentes as variáveis de projeto [7]. Uma vez que as propriedades variam em um considerável intervalo de validação, o uso do valor médio como parâmetro característico na metodologia determinística não compreende as várias combinações dos valores críticos aleatórios das variáveis para diferentes modos de falha considerados. Nesta metodologia, as incertezas presentes nas variáveis envolvidas não podem ser explicitamente incorporadas na análise, o que conduz a uma abordagem menos realista da integridade estrutural do problema em estudo. A confiabilidade estrutural dispõe de meios que permitem incorporar os efeitos dessas incertezas, deste modo, a análise com base na confiabilidade se traduz em uma abordagem mais racional por explicitamente lidar com as incertezas nos parâmetros e suas correlações estatísticas [8].

Sobre tais aspectos, a análise de risco torna-se indispensável, e por meio da confiabilidade estrutural incertezas podem ser adequadamente inseridas, sobretudo, seus efeitos podem ser quantificados mais realisticamente. Desta forma, o risco associado a cada tomada de decisão pode ser avaliado, e se necessário, medidas de prevenção e mitigação de falhas são tomadas para garantir um bom desempenho estrutural. O índice de confiabilidade proposto por Hasofer e Lind [9] para casos com variáveis normais correlacionadas e o método de confiabilidade de primeira ordem, para casos com variáveis não normais correlacionadas é bem explanado nos trabalhos de Ditlevsen [10], Shinozuka [11], Ang e Tang [12], Low e Tang [13] e Li e Low [14].

Nos últimos anos, a análise baseada em confiabilidade aplicada a problemas geomecânicos a partir de soluções analíticas têm atraído grande interesse de pesquisadores, em sua maioria, esses trabalhos lidam com a aleatoriedade de parâmetros físicos e/ou condições de contorno presentes na análise. Pode-se destacar os trabalhos de Lü e Low [15], Mollon *et al.* [16], Mollon *et al.* [17], Wang *et al.* [18], Hamrouni *et al.* [7], Lü *et al.* [8].

Diferentemente de estudos que lidam com problemas geomecânicos por meio de equacionamentos analíticos em conjunto de modelos da confiabilidade. Neste trabalho, um estudo numérico é realizado, por meio do acoplamento da formulação linear do MEC e de algoritmos da Confiabilidade Estrutural para a análise de problemas em domínio estendido ao semi-infinito e em estado plano de deformação. A avaliação das integrais de domínio é realizada por meio do Método da Reciprocidade Múltipla (MRM) e a consideração do revestimento de reforço da cavidade circular é feita por meio da técnica de sub-regiões. No contexto da confiabilidade, o algoritmo HLRF-FORM e a técnica de simulação de Monte Carlo são empregados para a consideração da aleatoriedade presente em cargas aplicadas e parâmetros do material. O exemplo de um túnel circular é avaliado, para fins de validação do acoplamento MEC-FORM e estimativa de alguns parâmetros da confiabilidade, levando-se em conta a influência do modelo na resposta probabilística.

2 Formulação linear do Método dos Elementos de Contorno

O MEC é uma ferramenta numérica que se caracteriza pela não necessidade de definição de malhas sobre o domínio de interesse. Tal estratégia torna-se uma elegante e econômica alternativa às técnicas chamadas de métodos de “domínio”. Algumas áreas de atuação podem ser citadas: Mecânica dos fluidos, elasticidade linear ou não linear, mecânica da fratura, dinâmica das estruturas, eletromagnetismo, acústica, dentre outras. A discretização da geometria do contorno através de elementos unidimensionais é apresentada na Fig. 1.

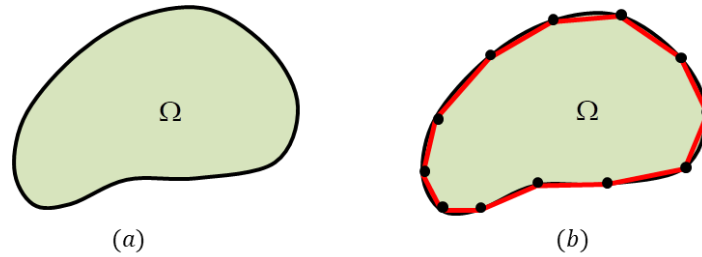


Figura 1. Geometria real (a) Discretização por elementos de contorno lineares (b).

2.1 Equações integrais de contorno

Existem três principais maneiras de obter a formulação do MEC, seja por meio do método dos resíduos ponderados, através do teorema da reciprocidade de Betti ou até mesmo utilizando uma formulação variacional semelhante à utilizada no MEF. Embora o procedimento via resíduos ponderados seja amplamente utilizado no meio acadêmico, adota-se aqui a formulação baseada no teorema da reciprocidade de Betti, proposto por Somigliana [19]. Seja um domínio Ω , limitado por um contorno Γ , submetido a dois estados de carregamento: o primeiro o problema em estudo e o segundo, o problema de Kelvin. A partir do teorema da reciprocidade de Betti:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}(q) \varepsilon_{ijk}^*(s, q) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(s, q) \varepsilon_{jk}(q) d\Omega \quad (1)$$

em que σ_{jk} e ε_{jk} são as componentes de tensão e deformação e σ_{jk}^* e ε_{jk}^* , são as componentes do problema de Kelvin. Após sucessivas manipulações matemáticas, sabendo que $\delta_{ij} u_j = u_i$ e lembrando-se que para $s \notin \Omega \rightarrow u_i(s) = 0$:

$$u_i(s) = - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) P_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega \quad (2)$$

A equação de Somigliana, definida na Eq. (2), representa o campo de deslocamentos em um ponto de colocação s . A partir da Lei de Hooke e da equação Somigliana (2), obtém-se a equação integral de tensões para pontos internos:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(s) = & - \int_{\Gamma} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} P_{lk,l}^* + G(P_{ik,j}^* + P_{jk,i}^*) \right] u_k d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{lk,l}^* + G(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] P_k d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{lk,l}^* + G(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] b_k d\Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

A identidade de Somigliana (2) permite a obtenção dos valores de deslocamentos em qualquer ponto do domínio, a partir de valores de forças e deslocamentos no contorno, das forças que atuam no

domínio (caso existam) e da solução fundamental. Como a identidade Somigliana é válida apenas para pontos no domínio, a representação integral dos deslocamentos no contorno é necessária.

$$c_{ij}(s)u_j(s) = - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s,q)u_j(q)d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s,q)P_j(q)d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q)u_{ij}^*(s,q)d\Omega \quad (4)$$

Para contorno suave $c_{ij}(s)$ assume o valor,

$$c_{ij}(s)u_j(s) = \frac{1}{2} \delta_{ij}u_j(s) \quad (5)$$

Para contorno com angulosidade, $c_{ij}(s)$ assume o valor,

$$c_{ij}(s)u_j(s) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos 2\gamma \operatorname{sen} \alpha}{4\pi(1-v)} & \frac{\operatorname{sen} 2\gamma \operatorname{sen} \alpha}{4\pi(1-v)} \\ \frac{\operatorname{sen} 2\gamma \operatorname{sen} \alpha}{4\pi(1-v)} & \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos 2\gamma \operatorname{sen} \alpha}{4\pi(1-v)} \end{bmatrix} u_j(s) \quad (6)$$

2.2 Método dos Elementos de Contorno

Foi apresentada a formulação baseada nas equações integrais de contorno, as quais foram desenvolvidas a partir do teorema de reciprocidade de Betti proposto por Somigliana [19], permitindo então a análise de sólidos elásticos bidimensionais, isotrópicos e homogêneos. Para sua utilização prática, é necessária a transformação da formulação integral de contorno em equações algébricas, o que consolida sua forma discretizada, obtendo-se um sistema linear que será resolvido após aplicação das condições de contorno do problema.

2.3 Discretização

No presente trabalho, o contorno será discretizado através de elementos com aproximação linear. Parte-se então da forma discretizada da Eq. (4) considerando forças de domínio:

$$[c][\phi]^i \{u\}^i + \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} [p^*] \{u\} d\Gamma_j = \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} [u^*] \{p\} d\Gamma_j + \int_{\Omega} u^* b_k d\Omega \quad (7)$$

Os deslocamentos e forças de superfícies em cada elemento são escritos em função de seus valores nodais, assim,

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

As funções de interpolação ϕ_1 e ϕ_2 são mapeadas no espaço adimensional definido de $[-1,1]$, e expressas como:

$$\begin{aligned}\phi_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ \phi_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi)\end{aligned}\quad (10)$$

As duas funções são empregadas em termos da coordenada homogênea ξ . A avaliação da integral referente às forças de volume será apresentada na seção 2.4, e dá origem ao vetor de cargas independentes nas duas direções globais, F_m . Assim, a Eq. (7) pode então ser reescrita como:

$$[c][\phi]^i \{u\}^i + \sum_{j=1}^{Ne} [H_w]^{ij} \{u\}^j = \sum_{j=1}^{Ne} [G_w]^{ij} \{p\}^j + F_m \quad (11)$$

Esta equação relaciona os valores de u nos pontos nodais ‘ i ’ com os valores de u e p em todos os pontos do contorno, incluindo ‘ i ’, onde:

$$[\bar{H}_w] = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_2 d\Gamma \\ \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_2 d\Gamma \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[\bar{G}_w] = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} u_{11}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{12}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{11}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{12}^* \phi_2 d\Gamma \\ \int_{\Gamma} u_{21}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{22}^* \phi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{21}^* \phi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{22}^* \phi_2 d\Gamma \end{bmatrix} \quad (13)$$

Uma vez escrita a Eq. (12) e (13) para cada ponto ‘ i ’ obtendo $2 \times n$ equações com n nós, pode-se reescrever a Eq. (11) para cada ponto do contorno, obtendo-se um sistema de equações lineares, considerando-se,

$$H_w = [\bar{H}_w]^{ij} \text{ se } i \neq j \quad (14)$$

$$H_w = [\bar{H}_w]^{ij} + [c][\phi]^i \text{ se } i = j$$

A Eq. (11) pode ser reescrita de forma mais compacta:

$$\sum_{j=1}^{Ne} [H_w]^{ij} \{u\}^j = \sum_{j=1}^{Ne} [G_w]^{ij} \{p\}^j + F_m \quad (15)$$

Sabe-se que o número de graus de liberdade por nó é quatro, referente a dois de deslocamentos e 2 de forças de superfície, no entanto, metade destes valores são impostos nas condições de contorno, desta forma, a solução do sistema geral demanda de $2n$ equações. Escrevendo-se as equações para todos os pontos de colocação do modelo, resulta em um sistema com ordem igual a duas vezes o número total de nós da malha:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{F_m\} \quad (16)$$

As integrais podem ser resolvidas numericamente, na maioria das vezes, sem um esforço adicional, contudo, é conhecido que a colocação de um ponto fonte muito próximo ao contorno do problema pode ocasionar respostas instáveis do problema.

Outro caso que influencia a estabilidade da resposta numérica diz respeito ao problema de singularidade que acontece quando o ponto fonte está sobre o mesmo elemento integrado, introduzindo-se um problema na resolução das integrais singulares que se trata do valor principal de Cauchy.

Após as aplicações das condições de contorno do problema, é conveniente rearranjar as matrizes $[H]$ e $[G]$ de modo que os valores prescritos fiquem no primeiro membro da Eq. (16) e os valores desconhecidos no segundo membro da Eq. (16). Após esse procedimento, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (17)$$

Admitindo-se a possibilidade de ocorrência do movimento de corpo rígido, com forças de superfície nulas, a Eq. (17) é reescrita como,

$$[H]\{U\} = 0 \quad (18)$$

em que:

$$\sum_{j=1}^{N_p} H_{2j-1} = 0 \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^{N_p} H_{2j} = 0$$

2.4 Método da Reciprocidade Múltipla

Alguns problemas da engenharia dependem de forças que atuam no volume de um corpo (Forças de volume), e suas presenças são consideradas com integrais definidas sobre o domínio do problema. Alguns exemplos podem ser citados: forças gravitacionais, forças centrífugas, efeitos relacionados a retração de um corpo como na variação de temperatura ou inchamento, na análise não-linear, com o surgimento de termos de domínio ocasionados pela aplicação de tensões ou deformação residuais.

Esta técnica está relacionada com a repetida aplicação do teorema da reciprocidade, originalmente desenvolvido por Nardini e Brebbia [20] na resolução de problemas de Poisson, e posteriormente expandido para problemas da elasticidade linear [21], utilizando-se de uma sequência de soluções fundamentais de alta ordem, com a consequente diminuição da ordem da função da força de domínio até a convergência do procedimento.

Seja a integral de domínio para o caso de termos de valor conhecido.

$$\int_{\Omega} X^* \bar{T} d\Omega \quad (20)$$

Admite-se a existência de uma primitiva da solução fundamental e a integral é reescrita na forma:

$$\int_{\Omega} X^* \bar{T} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^2 L \bar{T} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right) \bar{T} d\Omega \quad (21)$$

Integrando-se por partes:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right) \bar{T} d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial L}{\partial x} n_x + \frac{\partial L}{\partial y} n_y \right) \bar{T} d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (22)$$

Fazendo-se duas integrações por partes, chega-se a:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 L \bar{T} d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial L}{\partial n} \right) \bar{T} d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial n} \right) L d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla^2 \bar{T} L d\Omega \quad (23)$$

Para os casos em que \bar{T} possui uma distribuição constante, como na consideração de forças gravitacionais, é necessária uma única integração por partes, a fim de anular a integral de domínio presente no último termo da Eq. (22). Para casos em que o carregamento possui distribuição acima que linear, sucessivas integrações por partes são feitas objetivando-se anular os termos de domínio remanescentes.

2.5 Técnica de sub-regiões

Caso um dado problema não seja homogêneo em todo o seu domínio de validação, pode-se

dividi-lo em uma série de regiões acopladas através de equações de compatibilidade de deslocamentos na interface das regiões, e equações de equilíbrio de forças internas entre os pontos de colocação da interface. A técnica de sub-regiões, inicialmente proposta por Rizzo e Shippy [22] para a discretização de meios compostos com diferentes materiais é apresentada na Fig. 2, discretizando-se em três subdomínios homogêneos.

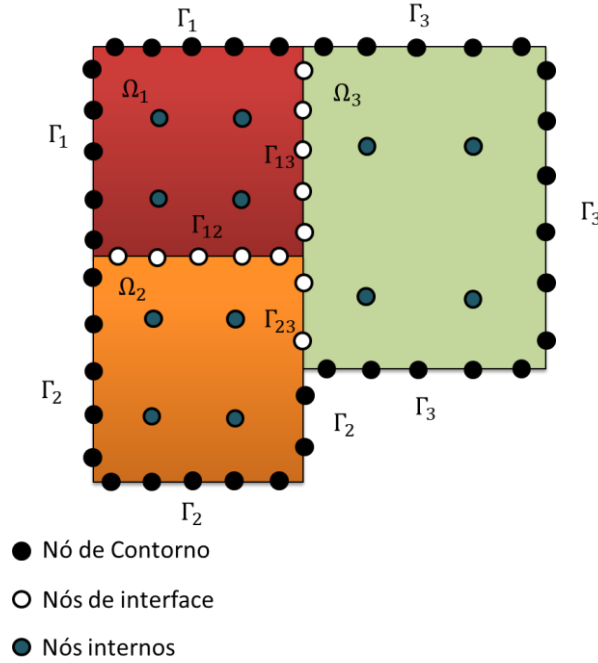


Figura 2. Discretização de um domínio não-homogêneo pela técnica de sub-regiões.

As equações singulares e/ou hipersingulares na obtenção das matrizes $[H]$ e $[G]$ podem ser aplicadas em cada sub-domínio separadamente, resultando no sistema de equações para cada sub-região:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} [H]^{11} & [H]^{12} \\ [H]^{12} & [H]^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}^{11} \\ \{u\}^{12} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [G]^{11} & [G]^{12} \\ [G]^{12} & [G]^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p\}^{11} \\ \{p\}^{12} \end{Bmatrix} \rightarrow \Omega_1 \\
 \begin{bmatrix} [H]^{21} & [H]^{22} & [H]^{23} \\ [H]^{21} & [H]^{22} & [H]^{23} \\ [H]^{23} & [H]^{32} & [H]^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}^{21} \\ \{u\}^{22} \\ \{u\}^{23} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [G]^{21} & [G]^{22} & [G]^{23} \\ [G]^{21} & [G]^{22} & [G]^{23} \\ [G]^{23} & [G]^{32} & [G]^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p\}^{21} \\ \{p\}^{22} \\ \{p\}^{23} \end{Bmatrix} \rightarrow \Omega_2 \\
 \begin{bmatrix} [H]^{31} & [H]^{32} \\ [H]^{32} & [H]^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}^{31} \\ \{u\}^{32} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [G]^{31} & [G]^{32} \\ [G]^{32} & [G]^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p\}^{31} \\ \{p\}^{32} \end{Bmatrix} \rightarrow \Omega_3
 \end{aligned} \tag{24}$$

onde

Γ_i - parte externa do contorno da sub-região Ω_i ;

Γ_{ij} - interface entre as regiões Ω_i e Ω_j ;

$\{u\}^i, \{p\}^i$ - deslocamentos e forças de superfícies nos nós do contorno da sub-região Ω_i ;

$[H]^i, [G]^i$ - são as matrizes $[H], [G]$ para a sub-região Ω_i que multiplicam $\{u\}^i$ e $\{p\}^i$;

$[H]^{ij}, [G]^{ij}$ - são as matrizes $[H], [G]$ para a sub-região Ω_i que multiplicam $\{u\}^{ij}$ e $\{p\}^{ij}$;

O acoplamento dos sistemas se faz pelo equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamentos:

$$\begin{aligned} \{u\}^{ij} &= \{u\}^{ji} \\ \{p\}^{ij} &= -\{p\}^{ji} \end{aligned} \quad (25)$$

Obtêm-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} [H]^1 & [H]^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}^1 \\ \{u\}^{12} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [G]^1 & [G]^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p\}^1 \\ \{p\}^{12} \end{Bmatrix} \rightarrow \Omega_1 \\ \begin{bmatrix} [H]^2 & [H]^{21} & [H]^{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^2 \\ \{u\}^{12} \\ \{u\}^{23} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [G]^2 & -[G]^{21} & [G]^{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p\}^2 \\ \{p\}^{12} \\ \{p\}^{23} \end{Bmatrix} \rightarrow \Omega_2 \\ \begin{bmatrix} [H]^3 & [H]^{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}^3 \\ \{u\}^{23} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [G]^3 & -[G]^{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p\}^3 \\ \{p\}^{23} \end{Bmatrix} \rightarrow \Omega_3 \end{aligned} \quad (26)$$

3 Conceitos em Confiabilidade Estrutural

A utilização de modelos de confiabilidade objetiva-se avaliar a segurança de uma estrutura, o que consiste na estimativa de violação de um certo modo potencial de falha. Na análise, cada critério pode ser entendido como evento estatístico e suas consequências como cenários de falha. A caracterização das variáveis aleatórias (v.a.), se trata de uma etapa crucial na análise confiabilística, sendo feita a partir de técnicas de inferência estatística.

A avaliação da probabilidade é realizada a partir da análise de uma função de falha, denominada $G(X)$, onde X é um vetor de variáveis aleatórias consideradas na análise. Durante a avaliação de segurança de uma estrutura, quantifica-se a ocorrência de falhas, ou seja, a probabilidade de que o vetor de v.a. esteja contido na região de falha Ω_f :

$$\begin{cases} G(X) > 0 \rightarrow \textit{Seguro} \\ G(X) \leq 0 \rightarrow \textit{Falha} \end{cases} \quad (27)$$

A probabilidade de falha é obtida integrando-se $f_X(x)$ (função conjunta de densidade de probabilidade das variáveis aleatórias do problema) sobre o domínio de falha.

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_X(x) dx \quad (28)$$

A integral (28) costuma ser de difícil solução analítica, uma vez que envolve a avaliação de uma integral n-dimensional em um domínio complexo. Assim, faz-se necessário o uso de outros métodos capazes de avaliar a probabilidade de falha, como o tradicional método de simulação Monte Carlo e o método de Confiabilidade de Primeira Ordem – FORM.

3.1 Método de Simulação de Monte Carlo

Um dos principais objetivos da confiabilidade refere-se a avaliação da integral (28), o que na prática depende da quantidade de variáveis aleatórias dependentes e com distribuições não normais. Por este motivo, o método de simulação de Monte Carlo surge como uma técnica alternativa, envolvendo exaustivas repetições do problema em estudo, utilizando em cada processo uma realização particular de variáveis aleatórias do problema. Estas repetições fornecem um conjunto de soluções, uma para cada realização, representando a saída simulada do problema. Beck [23] retrata o método de Monte Carlo como uma técnica que envolve simular artificialmente um grande número de elementos e observar o resultado encontrado. No caso da análise da confiabilidade em estruturas, isto significa do

modo mais simples, que cada variável aleatória X_i pode fornecer aleatoriamente um determinado valor. Basicamente, a técnica consiste em produzir N eventos aleatórios a serem avaliados na equação do estado limite $G(X)$, assim, a probabilidade de falha é estimada como a razão entre o número de eventos de falha (N_f) e o número total de eventos (N),

$$P_f = \frac{N_f}{N} \quad (29)$$

A precisão do método está relacionada com o tamanho da amostragem, e pode ser avaliada pelo coeficiente de variação (COV) da probabilidade de falha. Com o objetivo de obter uniformidade na resposta, para diferentes execuções do método, estima-se um número de cenários mínimos para que uma probabilidade de falha P_f seja determinada com um almejado coeficiente de variação δ ,

$$N_{\min} = \frac{1}{\delta^2} \frac{1 - P_f}{P_f} \quad (30)$$

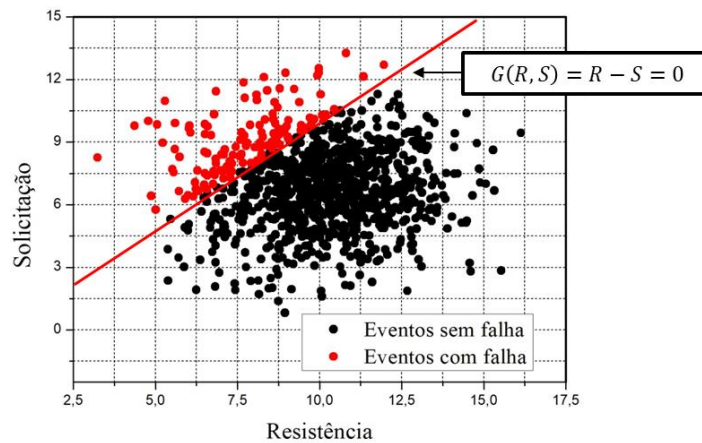


Figura 3. Exemplo ilustrativo da simulação de Monte Carlo.

3.2 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem – FORM

O método de confiabilidade de primeira ordem ou FORM (First Order Reliability Method), fornece, por meio da linearização da função estado limite em torno do ponto de projeto no espaço padrão, uma estimativa de probabilidade de ocorrência de falha. A linearização se faz através de um hiperplano tangente à superfície de falha no ponto de projeto, a qual é seguida pela minimização da distância entre o ponto sobre o hiperplano e a origem do sistema. O chamado ponto de projeto consiste na combinação dos valores das v.a. que mais provavelmente levam à falha do problema em estudo.

O grande diferencial desse método está relacionado com a capacidade em representar fielmente as informações estatísticas das variáveis aleatórias que representam o problema, podendo lidar com quaisquer distribuições, inclusive considerando correlação entre variáveis. Em síntese, o FORM é baseado na definição geométrica do chamado índice de confiabilidade, o qual tem interpretação oposta à da probabilidade de falha. A definição deste índice é feita no espaço das variáveis normais padronizadas independentes.

Assim, é necessária a transformação de um dado vetor X , que contém as variáveis aleatórias do problema, em um vetor de variáveis aleatórias com distribuição normal padrão, Y . A transformação de variáveis não normais em suas normais equivalentes é classicamente feita segundo o princípio da aproximação normal, devendo-se fazer uma transformação intermediária caso as variáveis aleatórias sejam correlacionadas. Para maiores detalhes, vide [23].

3.3 Algoritmo HLRF

Low e Tang [13] apresentaram uma interpretação alternativa do índice de confiabilidade de Hassofer-Lind baseada na perspectiva de uma elipsóide expandida no espaço original das variáveis aleatórias,

$$\beta = \min_{x \in F} \sqrt{\left[\frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \right]^T [C]^{-1} \left[\frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \right]} \quad (31)$$

na qual X é o vetor com todas as n variáveis aleatórias X_i envolvidas no problema, C a matriz de correlação, F o domínio de falha na qual a função $G(X) \leq 0$, σ_{X_i} e μ_{X_i} o desvio padrão e média da variável aleatória X_i , respectivamente. O índice de Hassofer-Lind, β , representa a distância entre o ponto médio e o mais próximo ponto na equação do estado limite, o qual é referido como ponto de projeto. A minimização da Eq. (31) pode ser obtida usando um método padrão de otimização não linear sujeito à restrição $G(x) = 0$, o qual é tradicionalmente resolvido através do algoritmo de Hassofer-Lind [9] e de Rackwitz e Fiessler [24], conhecido como HLRF [15]. Segundo Beck [23], a fórmula de recorrência do algoritmo HLRF é fundamentada na aproximação de um ponto X à superfície $G(X) = 0$ e na perpendicularização entre o vetor X e a tangente à superfície no ponto. Beck [23] apresenta o algoritmo de otimização HLRF como,

$$y_{k+1} = - \frac{G(y_k)}{\|\nabla G(y_k)\|} \left[\beta_k + \frac{G(y_k)}{\|\Delta G(y_k)\|} \right] \quad (32)$$

4 Acoplamento entre o MEC e algoritmos de Confiabilidade

No acoplamento com uma rotina de confiabilidade do tipo FORM, a equação de estado limite permanece implícita e expressa através de um modelo mecânico, desta forma, os gradientes da função de estado limite, utilizados na estimativa da probabilidade de falha do problema podem ser calculados numericamente por meio da Eq. (33), através de consultas ao modelo numérico.

Desta forma, as derivadas da função de falha podem ser calculadas numericamente por diferenças finitas, para cada chamada do modelo mecânico do MEC. Para este trabalho, estimou-se o passo Δ como 0,1% do valor médio da variável aleatória (X).

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_1} &= \lim_{\Delta_{a_1}} \frac{G(X_1 + \Delta_{X_1}, X_2, \dots, X_n) - G(X_1 - \Delta_{X_1}, X_2, \dots, X_n)}{2\Delta_{X_1}} \\ \frac{\partial G(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_2} &= \lim_{\Delta_{a_2}} \frac{G(X_1, X_2 + \Delta_{X_2}, \dots, X_n) - G(X_1, X_2 - \Delta_{X_2}, \dots, X_n)}{2\Delta_{X_2}} \\ \frac{\partial G(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_n} &= \lim_{\Delta_{a_n}} \frac{G(X_1, X_2, \dots, X_n + \Delta_{X_n}) - G(X_1, X_2, \dots, X_n - \Delta_{X_n})}{2\Delta_{X_n}} \end{aligned} \quad (33)$$

4.1 Acoplamento direto entre o MEC e o algoritmo HLRF/FORM

O modelo de confiabilidade baseado no acoplamento entre o modelo mecânico e o FORM quase sempre apresenta soluções estáveis com boa convergência, além de apresentar esses resultados em um menor número de chamadas que o modelo envolvendo o método de Monte Carlo. É importante destacar que os resultados obtidos por meio desta metodologia e apresentados nesta primeira etapa se limitaram a um estudo em domínios planos, no regime elástico linear, ressaltando-se que a estabilidade

e a acurácia do método sofrem alterações no regime não linear. Apresenta-se na Fig. 4 um esquema ilustrativo da estratégia de acoplamento direto entre o modelo mecânico elástico linear e o FORM.

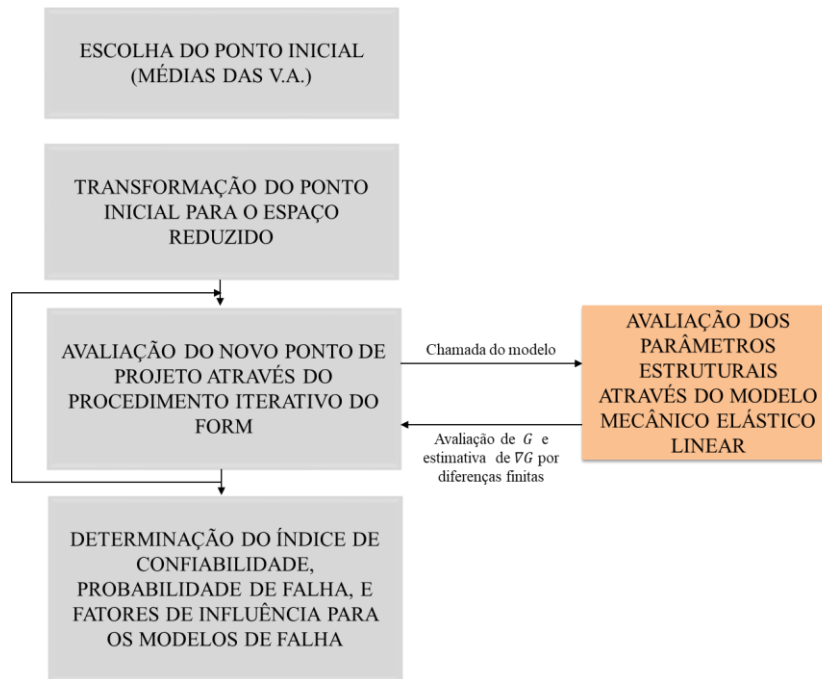


Figura 4. Estratégia de acoplamento direto entre o modelo mecânico elástico linear e o FORM.

Com relação ao caso da simulação de Monte Carlo, o acoplamento é mais intuitivo, consistindo na execução do modelo numérico a cada simulação do método.

5 Exemplo de Aplicação

Será apresentado a seguir um exemplo para fins de validação e aplicação da formulação do MEC linear acoplada à rotina de análise confiabilística.

5.1 Cavidade em meio semi-infinito com força de domínio

O exemplo para validação do acoplamento do MEC com algoritmos de confiabilidade considerando-se forças de domínio e multi-domínios é apresentado na Fig. 5. Trata-se de problema de uma cavidade ($r = 6\text{ m}$) em meio semi-infinito, simulando um túnel circular, submetida a uma força de domínio definida pelo peso próprio do solo, o qual tem peso específico $\gamma = 17\text{ KN/m}^3$. Admite-se a existência de um revestimento no entorno do túnel. As propriedades mecânicas referentes ao solo e ao revestimento do túnel são descritas na Fig. 5.

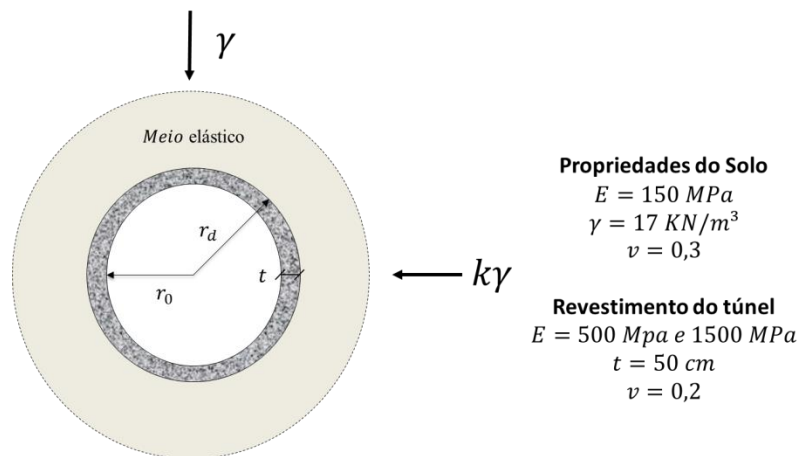


Figura 5. Problema físico de uma cavidade em meio elástico solicitada por forças de domínio verticais e horizontais.

Etapa 1: Análise mecânica sem a incorporação do revestimento no túnel

A etapa 1 tem como objetivo avaliar a eficiência da formulação do MEC linear em problemas com forças de corpo. Valendo-se da simetria do carregamento, o exemplo numérico foi modelado considerando-se apenas 1/2 da geometria real do problema e considerando-se estado plano de deformação, Fig. 6.

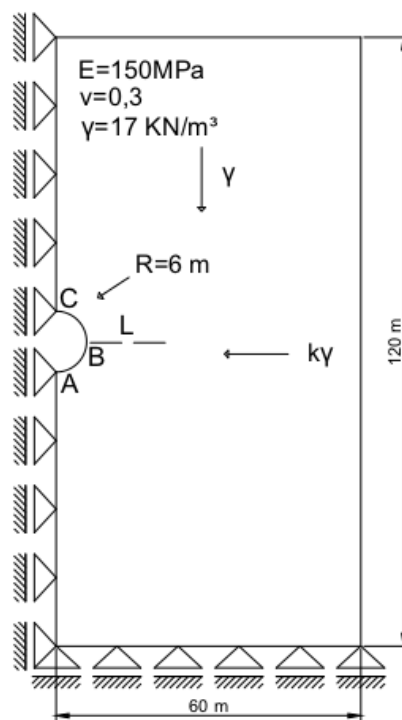


Figura 6. Cavidade em meio semi-infinito submetida a forças de domínio.

Utiliza-se uma malha com cerca de 50 elementos lineares, sendo 31 nós no contorno da cavidade. O problema foi analisado levando-se em conta como solução de referência uma malha de 15000 elementos finitos triangulares lineares obtida no *software* ABAQUS. Na Fig. 7a apresenta-se o comportamento do trecho AB após deformação para o modo de solicitação sem tensões horizontais. Percebe-se uma boa convergência da solução obtida pelo MEC quando comparado com a resposta

numérica do ABAQUS. Posteriormente uma análise considerando a variação da tensão de von Mises ao longo da linha L foi realizada (Fig. 7b), para este fim, considerou-se três diferentes coeficientes de empuxo horizontal k . Destaca-se a maior concentração de tensões próximas à cavidade circular, sendo os valores críticos observados no estado de carregamento sem tensões horizontais ($k = 0$).

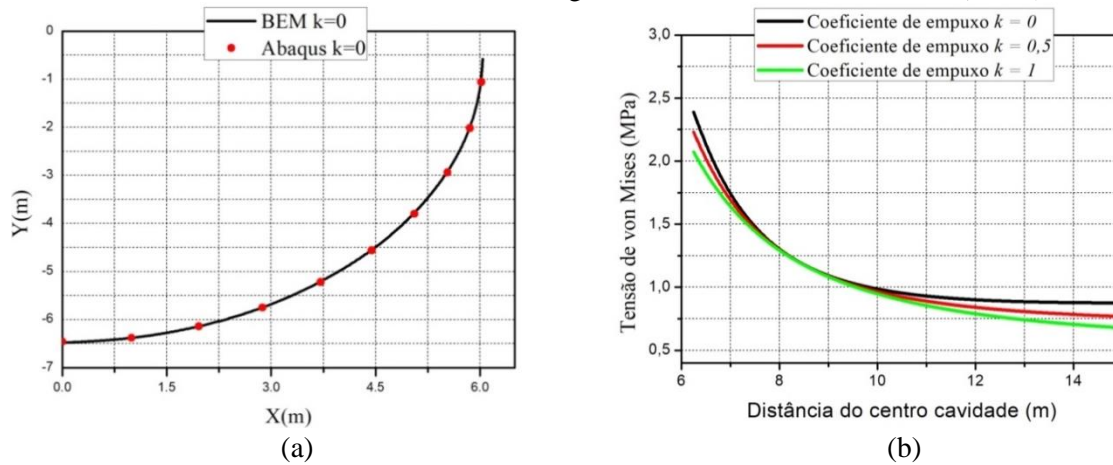


Figura 7. (a) Trecho AB após deformação com coeficiente de empuxo $k=0$ (b) Tensões de von Mises ao longo da linha L.

Etapa 2: Análise mecânica com a incorporação do revestimento no túnel

Em seguida, realizou-se a análise do comportamento do trecho ABC após sofrer a deformação ocasionada para os três tipos de solicitações propostas (Fig. 8a), considerando-se a existência de um reforço com 50 cm de espessura, no entorno da cavidade. Este tipo de solução é comumente utilizada em túneis. O material do reforço é admitido com dois valores de módulo de elasticidade, 5 GPa e 15 GPa. Para melhor visualização, optou-se por ampliar em 10 vezes os deslocamentos nodais e centralizar todas as curvas na mesma posição. É notável a diminuição do diâmetro vertical com o alívio do empuxo horizontal, acompanhada do aumento do diâmetro horizontal. Por fim, percebe-se que a camada de reforço conseguiu aumentar significativamente a rigidez, em ambos os materiais adotados, notando-se uma redução nas deformações em todo o contorno da cavidade. Para avaliar o efeito da rigidez da camada do reforço na deformação da cavidade, medida através do eixo vertical, é introduzida a relação deformação e rigidez do reforço/solo ($E_{Reforço} / E_{Solo}$), Fig. 8b. Percebe-se de fato que o reforço atua diretamente na redução dessas deformações, principalmente quando a relação reforço/solo está abaixo de 10, entretanto é importante observar que a taxa de diminuição das deformações ocorre mais rapidamente no primeiro patamar do gráfico (0 a 10), seguida, por uma estabilização da resposta com o aumento de rigidez.

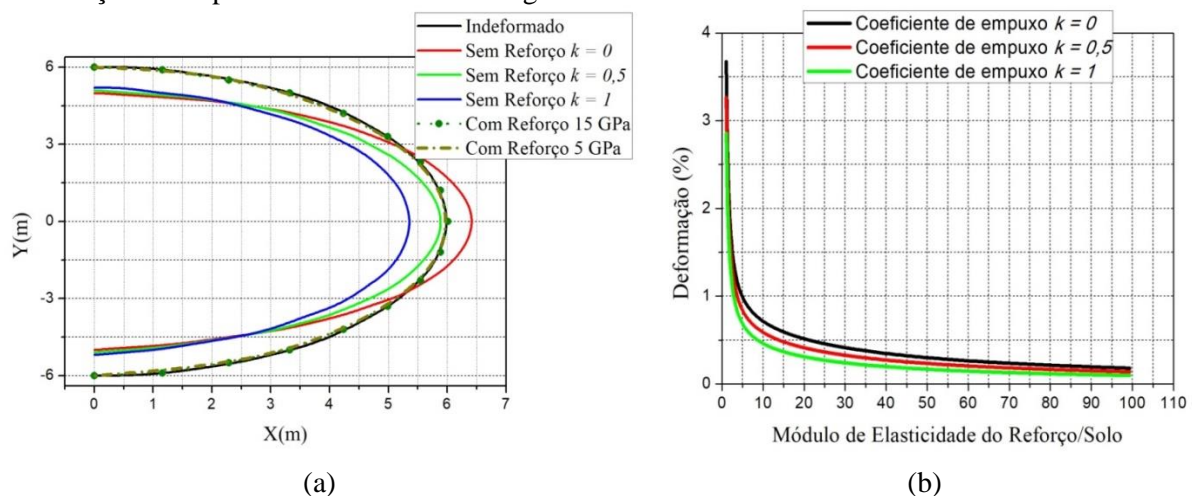


Figura 8. Comportamento após deformação para o trecho ABC (a) Comportamento após deformação para o eixo vertical AC (b).

Etapa 3: Análise considerando a aleatoriedade dos parâmetros envolvidos

O problema apresentado na Fig. 5 é revisitado, no sentido de ilustrar a influência da aleatoriedade das variáveis envolvidas, vide Tabela 1. Considera-se estado plano de deformação, e dessa vez, realiza-se um estudo confiabilístico a partir da seguinte função de falha, Eq. (34):

$$G_1 = u_L - \frac{(e_v - d_0)}{d_0} \quad (34)$$

Os parâmetros estatísticos relacionados a média e tipo de distribuição podem ser encontrados em [7]. O limite do deslocamento relativo diametral u_L é fixado em 2% do diâmetro inicial d_0 da cavidade, e e_v é a dimensão do eixo vertical da cavidade no estado deformado. A seguir são apresentados os dados estatísticos das variáveis aleatórias que compõem o problema:

Tabela 1. Definição dos dados estatísticos para parâmetros da análise.

	Média	Coeficiente de variação	Distribuição tipo	
			Caso 1: Normal	Caso 2: Log-normal
Solo				
E (MPa)	150	15%	Normal	Log-normal
Poisson	0,3	10%	Normal	Log-normal
Peso específico (KN/m ³)	17	10%	Normal	Log-normal
Revestimento do Túnel (50 cm)				
E (MPa)	[500,5000]	10%	Normal	-
Poisson	0,2	10%	Normal	-

Etapa 3.1: Análise de confiabilidade sem a incorporação do revestimento do túnel

Realiza-se a análise de confiabilidade variando-se o coeficiente de empuxo. Para este caso inicial, considera-se todos os parâmetros como gaussianos. Esta análise baseada no modelo de confiabilidade HLRF/FORM se mostra coerente com o resultado apresentado pelo método de Monte Carlo, e é perceptível a diminuição na probabilidade de falha à medida que o coeficiente de empuxo é aumentado (Tabela 2). Destaca-se que o número de simulações foi estimado considerando um coeficiente de variação de 5 %. Outra análise feita, Tabela 3, refere-se ao estudo de sensibilidade das variáveis aleatórias envolvidas, com maior influência para o módulo de elasticidade.

Tabela 2. Análise de confiabilidade para o Exemplo 1 (caso1) considerando variáveis gaussianas.

k	β	Pf (%) (FORM)	Pf (%) (Monte Carlo)	Nº mínimo de simulações
0	1,526	6,351	6,915	5900
0,1	1,663	4,812	4,949	7916
0,2	1,801	3,585	3,667	10773
0,3	1,941	2,613	2,659	14925
0,4	2,082	1,864	1,966	21105
0,5	2,224	1,305	1,201	30369
0,6	2,368	0,896	0,828	44543
0,7	2,512	0,607	0,606	66266

0,8	2,657	0,398	0,410	102164
0,9	2,804	0,251	0,246	159600
1	2,951	0,160	0,158	249600

Tabela 3. Ponto de projeto e fatores de sensibilidade para o caso 1.

k	Pontos de projeto			Fatores de sensibilidade (%)		
	E*(MPa)	ν^*	γ^* (KN/m ³)	E*(MPa)	ν^*	γ^* (KN/m ³)
0	119,274	0,2980	18,152	80,0875	0,1745	19,7378
0,1	116,315	0,2981	18,227	81,0261	0,1375	18,8362
0,2	113,300	0,2982	18,297	81,9566	0,1042	17,9391
0,3	110,230	0,2984	18,362	82,8765	0,0750	17,0484
0,4	107,107	0,2985	18,423	83,7843	0,0501	16,1655
0,5	103,934	0,2988	18,479	84,6782	0,0299	15,2918
0,6	100,712	0,2991	18,529	85,5565	0,0146	14,4288
0,7	97,445	0,2994	18,573	86,4174	0,0046	13,5779
0,8	94,135	0,2998	18,612	87,2596	0,0002	12,7401
0,9	90,784	0,3003	18,645	88,0787	0,0016	11,9195
1	87,397	0,3008	18,672	88,8761	0,0091	11,1146

Deve-se destacar que este exemplo é meramente ilustrativo, apresentando significativos valores de probabilidade de falha associados ao alto coeficiente de variação adotado. Em seguida, apresenta-se um estudo comparativo entre a solução obtida pelo FORM e pelo método de Monte Carlo, Fig. 9.

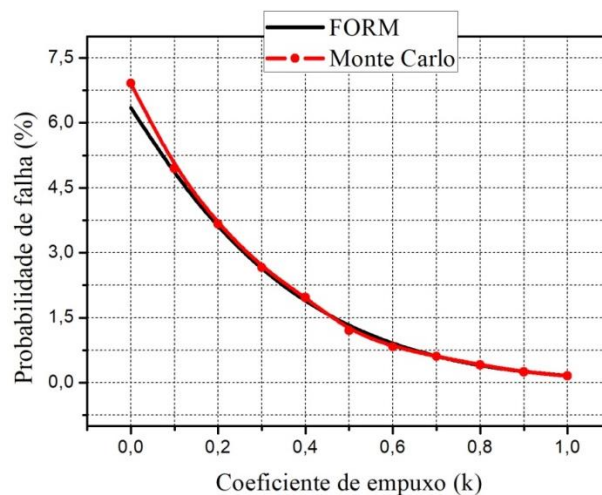


Figura 9. Probabilidade de falha vs coeficiente de empuxo com acoplamento direto entre dois modelos de confiabilidade.

Em seguida, de maneira similar ao que foi realizado no caso 1, apresenta-se um estudo para o caso 2 (variáveis não normais). Assim como na Fig. 9, a probabilidade de falha diminui com o crescimento do coeficiente de empuxo, entretanto, nota-se que a abordagem considerando todas as variáveis como não gaussianas mostra-se menos conservadora (Tabela 4 e Fig. 10).

Tabela 4. Análise de confiabilidade para o Exemplo 1 (caso 2) considerando variáveis não gaussianas.

k	β	Pf% (FORM)
0	1,607	5,412
0,1	1,770	3,833
0,2	1,938	2,634
0,3	2,111	1,745
0,4	2,289	1,112
0,5	2,474	0,672
0,6	2,665	0,384
0,7	2,862	0,215
0,8	3,067	0,111
0,9	3,279	0,052
1	3,499	0,023

Tabela 5. Ponto de projeto e fatores de sensibilidade para o caso 2.

k	Pontos de projeto			Fatores de sensibilidade (%)		
	E*(MPa)	ν^*	γ^* (KN/m ³)	E*(MPa)	ν^*	γ^* (KN/m ³)
0	115733,255	0,2962	18,361	68,9418	0,2278	30,8303
0,1	112174,947	0,2962	18,500	68,9705	0,1862	30,8431
0,2	108467,728	0,2962	18,640	68,9977	0,1469	30,8553
0,3	104604,203	0,2964	18,784	69,0230	0,1102	30,8666
0,4	100575,129	0,2965	18,930	69,0460	0,0771	30,8768
0,5	96372,129	0,2968	19,078	69,0660	0,0482	30,8858
0,6	91984,980	0,2972	19,229	69,0822	0,0247	30,8930
0,7	87403,340	0,2977	19,383	69,0936	0,0081	30,8981
0,8	82616,200	0,2983	19,539	69,0990	0,0003	30,9006
0,9	77612,034	0,2991	19,698	69,0967	0,0036	30,8995
1	72378,941	0,3000	19,859	69,0845	0,0213	30,8941

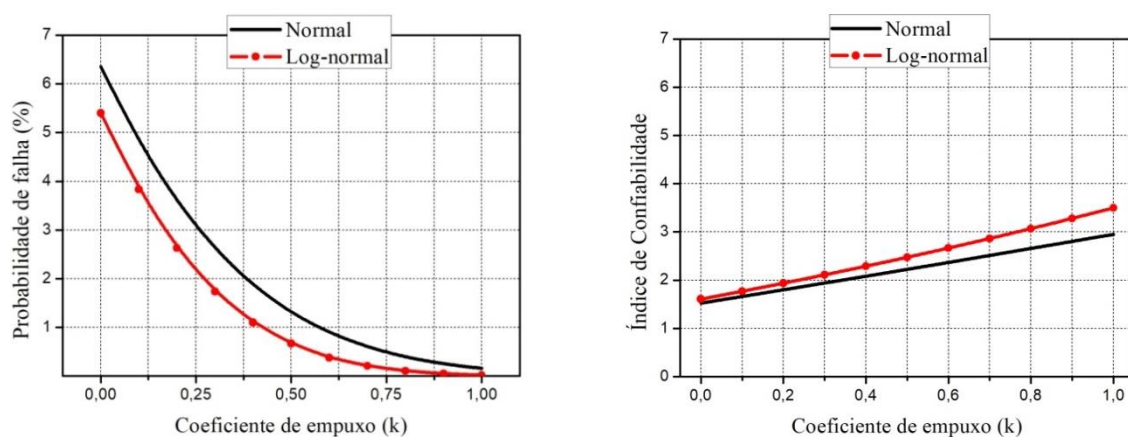


Figura 10. Probabilidade de falha (a) Índice de confiabilidade β (b) considerando variáveis normais e não normais.

Etapa 3.2: Análise de confiabilidade com a incorporação do revestimento do túnel

A última etapa refere-se a inclusão do revestimento do túnel de espessura 50 cm na análise confiabilística considerando-se o algoritmo HLRF-FORM, a função limite (34) e todas as variáveis envolvidas na análise como gaussianas. Os dados estatísticos referentes ao material e reforço foram definidos na Tabela 1, considerando-se um estado de solitação sem tensões horizontais. É perceptível o aumento do parâmetro β à medida que a média do reforço sofre variações em um intervalo de 500 MPa a 5000 MPa, mantendo-se sempre o mesmo coeficiente de variação de 10 %, Fig. 11. Nota-se ainda, para o reforço inicial de 500 MPa, um grande aumento do índice de confiabilidade, $\beta = 3,911$, comparando-se à análise sem a consideração do revestimento (Tabela 2), $\beta = 1,526$.

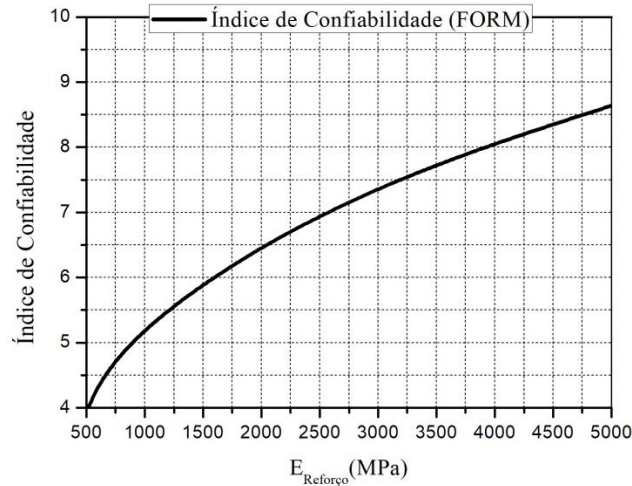


Figura 11. Análise de confiabilidade considerando-se a relação índice de confiabilidade e $E_{\text{Reforço}}$.

6 Conclusões

Este trabalho propõe a implementação de uma ferramenta numérica para investigação dos efeitos da aleatoriedade dos materiais e/ou condições de contorno no contexto da elasticidade linear por meio do acoplamento entre modelos mecânicos e de algoritmos da confiabilidade estrutural. A formulação linear do MEC é empregada na análise de problemas com domínio estendido ao semi-infinito e em estado plano de deformação. As técnicas de sub-regiões e do Método da Reciprocidade Múltipla são utilizadas para a consideração de múltiplos domínios não homogêneos e na avaliação de integrais de domínio, respectivamente. Com relação à análise confiabilística, duas abordagens são consideradas, a primeira refere-se ao acoplamento direto entre o modelo numérico e um método de transformação (HLRF/FORM), já a segunda, consiste no emprego da técnica de simulação de Monte Carlo. O exemplo de um túnel circular em meio elástico foi avaliado, constatando-se que o acoplamento mecano-fiabilístico se mostrou eficaz na investigação probabilística, permitindo um melhor entendimento dos níveis de segurança aos quais a estrutura está submetida, e identificando as variáveis que contribuem mais significativamente para a resposta aleatória do problema.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pelo suporte financeiro concedido.

Referências

- [1] C. Duenser e G. Beer. Simulation of sequential excavation with the Boundary Element Method. *Computers and Geotechnics*, 44, 157–166, 2012.
- [2] C. Duenser, K. Thoeni, K. Riederer, B. Lindner e G. Beer. New Developments of the Boundary Element Method for Underground Constructions. *International Journal of Geomechanics*, 12(6), 665–675, 2012.
- [3] J. Zechner e G. Beer. A fast elasto-plastic formulation with hierarchical matrices and the boundary element method. *Computational Mechanics*, 51(4), 2012.
- [4] P.G.C. Prazeres, K. Thoeni e G. Beer. Nonlinear analysis of NATM tunnel construction with the boundary element method, *Computers and Geotechnics* 40, 160-173, 2012.
- [5] G. Beer e C. Duenser. Advanced Boundary Element analysis of geotechnical problems with geological inclusions. *Computers and Geotechnics*, 79, 86–95, 2016.
- [6] T.S. Dang e G. Meschke. A Shear-Slip Mesh Update – Immersed Boundary Finite Element model for computational simulations of material transport in EPB tunnel boring machines. *Finite Elements in Analysis & Design*, Vol.142, pp.1-16, 2018.
- [7] A. Hamrouni, D. Dias e B. Sbartai. Reliability analysis of shallow tunnels using the response surface methodology. *Underground Space*, 2(4), 246–258, 2017.
- [8] Q. Lü, Z.P. Xiao, J. Ji e J. Zheng. Reliability based design optimization for a rock tunnel support system with multiple failure modes using response surface method. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 70, 1–10, 2017.
- [9] A.M. Hasofer e N.C. Lind. An exact and invariant first-order reliability format. *J. Eng. Mech.*, 100, 1974.
- [10] O. Ditlevsen. *Uncertainty modeling: With applications to multidimensional civil engineering systems*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- [11] M. Shinozuka. Basic analysis of structural safety. *J. Struct. Eng.*, 109(3), 721–740, 1983.
- [12] H.S. Ang e W.H. Tang. *Probability concepts in engineering planning and design*, Vol. 2—Decision, risk, and reliability, Wiley, New York, 1984.
- [13] B.K. Low e W.H. Tang. Efficient spreadsheet algorithm for first-order reliability method. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 133, No. 12, pp.1378- 1387, 2007.
- [14] H.Z. Li e B.K. Low. Reliability analysis of circular tunnel under hydrostatic stress field. *Computers and Geotechnics*, 37(1-2), 50–58, 2010.
- [15] Q. Lü e B.K. Low. Probabilistic analysis of underground rock excavations using response surface method and SORM. *Computers and Geotechnics*, 38(8), 1008–1021, 2011.
- [16] G. Mollon, D. Dias e A.H. Soubra. Probabilistic analysis and design of circular tunnels against face stability. *International Journal of Geomechanics*, 9(6), 237–249, 2009a
- [17] G.Mollon, D. Dias e A.H. Soubra. Probabilistic analysis of circular tunnels in homogeneous soils using response surface method-ology. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 135(9), 1314–1325, 2009b.
- [18] Q.Wang, H. Fang e L. Shen. Reliability analysis of tunnels using a metamodeling technique based on augmented radial basis functions. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 56, 45–53, 2016.
- [19] C. Somigliana. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotrope, *Il Nuovo Cimento*, p. 17-19, 1886.
- [20] D. Nardini e C.A. Brebbia. A new approach to free vibration analysis using boundary elements, *4th Int. Conf. on B.E.M.*, Southampton University, Springer-Verlag, Berlin. 1982.
- [21] A.C. Neves e C.A. Brebbia. The multiple Reciprocity boundary element method in elasticity: A new approach for transforming domain integrals to the boundary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31(4), 709–727, 1991.
- [22] F.J. Rizzo e D.J. Shippy. A Formulation and Solution Procedure for the General Non-Homogeneous Elastic Inclusion Problem. *International Journal of Solids and Structures*, 4: 1161-1179, 1968.
- [23] A.T. Beck. *Confiabilidade e Segurança das Estruturas*.1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.

- [24] R. Rackwitz e B. Fiessler. Structural Reliability under Combined Random Load Sequences
Computers and Structures, *Computers and Structures*, Vol. 9, No. 5, pp. 489-494, 1978.