

PROJETO OTIMIZADO DOS PARÂMETROS DO AMORTECEDOR DE MASSA SINTONIZADO EM VIGAS METÁLICAS

Lucas M. R. Menezes

Fábio M. G. Ferreira

Eduardo N. Lages

lucass.menezes@gmail.com

fabio.ferreira@lccv.ufal.br

enl@ctec.ufal.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC

Centro de Tecnologia – CTEC

Universidade Federal de Alagoas – UFAL

Avenida Lourival Melo Mota, S/N, Tabuleiro do Martins, 57072-900, Maceió - Alagoas, Brasil.

Resumo. Problemas de vibrações em vigas não são incomuns; vigas metálicas que são utilizadas como suporte de máquinas, por exemplo, estão sujeitas a vários tipos de ações dinâmicas simultâneas provenientes das diversas máquinas em operação. Outro caso são as vigas que suportam os pisos de academias, salões de festas e outros ambientes com grande movimento de pessoas que geram acelerações no piso. As abordagens mais comumente empregadas para controle dessas vibrações excessivas é o enrijecimento da estrutura, porém em muitos casos este tipo de abordagem é inviabilizada por restrições arquitetônicas, estéticas ou relativa à própria capacidade da estrutura ao sofrer o acréscimo de elementos estruturais pesados para o enrijecimento. Este trabalho é motivado em desenvolver um amparo teórico para controlar vibrações com a utilização de sistemas mecânicos acoplados às estruturas, especificamente em vigas metálicas, como uma solução alternativa à resolução do problema de engenharia. Técnicas de otimização são utilizadas com o objetivo de obter projetos com a melhor relação custo-benefício do atenuador. Dessa forma é realizada uma modelagem numérica via implementações computacionais do problema de vibração e seu controle em vigas metálicas. Os estudos realizados neste trabalho apontam a eficiência do atenuador com a inclusão de uma pequena massa adicional, juntamente com especificação de molas e amortecedores. Um pequeno acréscimo de massa (em torno de 4%) do atenuador leva a reduções consideráveis (acima de 55%) na resposta dinâmica da estrutura. Com o emprego de técnicas de otimização é possível automatizar o dimensionamento dos parâmetros do atenuador, podendo incluir critérios de eficiência quanto à faixa de operação do mesmo.

Palavras-chave: Controle de vibrações, Otimização estrutural, Vigas metálicas, Dinâmica das estruturas.

1 Introdução

Em estruturas existentes podem vir a apresentar problemas dinâmicos devido a vários fatores, como por exemplo, erro de projeto em que o projetista pode negligenciar as verificações quanto ao estado limite de vibrações ao desconsiderar o efeito da frequência de excitação de uma carga com características dinâmicas. A mudança na utilização da estrutura é outro fator não incomum, em que estruturas passam a ser utilizadas para uma finalidade diferente para a qual foi projetada inicialmente, ou seja, empreendimento concebido para cargas essencialmente estáticas podem vir a ser submetido a ações dinâmicas, por exemplo: empreendimentos com a finalidade residencial que são transformados em academias ou casa de shows; ou estádios de futebol que são utilizados para grandes espetáculos musicais. Alterações no ambiente em que se encontra o empreendimento também podem influenciar no surgimento de problemas dinâmicos; a exemplo dos projetos de pontes que são levados em conta os efeitos dinâmicos do tráfego e do vento, porém a intensidade do tráfego muda com o passar dos anos, assim como as condições climáticas do ambiente também são multáveis, exigindo um cuidado quanto a monitoração e possíveis adequações para reduzir os novos efeitos dinâmicos na estrutura.

Uma das soluções para reduzir os impactos gerados por ações dinâmicas em estruturas existentes, citadas no parágrafo anterior, é a utilização de sistemas de controle de vibrações acoplados à estrutura original. Os sistemas de controle (atenuadores) são dispositivos acoplados à estrutura em que se deseja reduzir ou controlar as vibrações provenientes de ações dinâmicas externas. Existem trabalhos acadêmicos, como o de Varela e Battista [1], que abordam a utilização de amortecedores de massa sintonizados para controle de vibrações em pisos de grandes vãos submetido a ação do movimento de pessoas; neste trabalho os autores realizaram um estudo numérico e experimental da eficiência da utilização de Amortecedores de Massa Sintonizados (AMS) em uma placa de concreto sob um deck metálico submetido a cargas devido ao movimento aleatório de pessoas. Sakr [2] estudou o uso de Múltiplos Amortecedores de Massa Sintonizados (MAMS) para o controle de vibrações em edifícios altos submetidos à aceleração na base, simulando o efeito de sismos, enquanto que Xu et al. [3] realizaram um estudo de um AMS com um sistema adicional de amortecedor em pontes com o objetivo de reduzir vibrações induzidas por vórtices. Atenuadores passivos geralmente são sistemas de controle de ciclo fechado, ou seja, a força de controle depende da resposta (deslocamento, velocidade e aceleração) da estrutura na qual o atenuador está acoplado, bem como da força de excitação (das frequências) Saaed et al. [4] realizaram uma revisão do estado da arte em controle de vibrações estruturais comentando sobre os diversos tipos de controles estudados na literatura e aplicados no mercado, o autor também aborda as bases teóricas de atenuadores passivos e algumas outras aplicações. Como a calibração do atenuador passivo está intrinsicamente relacionado com a estrutura e a força de excitação, se houver alguma perturbação no sistema original (mudança na característica da estrutura ou na ação dinâmica) o sistema de controle pode se tornar ineficaz ou até mesmo intensificar os problemas de vibrações. A vantagem do atenuador passivo é a simplicidade de instalação e não necessita de uma fonte externa de energia.

Segundo Harris e Piersol [5] o AMS é um atenuador passivo composto basicamente de uma massa, mola e amortecedor. Em geral esses dispositivos são calibrados para que sua frequência fique próxima da frequência natural (ou da frequência referente ao modo que se deseja atenuar) do sistema estrutural em que está acoplado; dessa forma o AMS gera forças inerciais que se contrapõe às forças inerciais geradas na estrutura pela ação dinâmica externa.

2 Controle de Vibrações em Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade

A ideia geral no controle de vibrações de sistemas contínuos ou discretos com múltiplos graus de liberdade é transformar a estrutura principal em um sistema equivalente de um grau de liberdade pelo método da superposição modal; e o AMS é acoplado posteriormente no sistema modal reduzido.

A Figura 1 apresenta uma estrutura com mais de um grau de liberdade com um AMS acoplado no

grau de liberdade n . A formulação pode ser então desenvolvida partindo da equação de movimento da estrutura principal

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (1)$$

em que \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são, respectivamente a matriz de massa, amortecimento e rigidez da estrutura principal. Os vetores \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$ e $\ddot{\mathbf{u}}$ são os deslocamentos, velocidades e acelerações nodais, enquanto \mathbf{F} é o vetor que contém as forças dinâmicas. Segundo Clough e Penzien [6] o vetor deslocamento pode ser reescrito em termos de vetores modais

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi}\mathbf{d} \quad (2)$$

em que \mathbf{d} é o vetor de deslocamentos modais e $\mathbf{\Phi}$ a matriz modal que contém os autovetores (modos de vibração), definidos como:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ \vdots \\ d_n(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\varphi}_n] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1j} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nj} \end{bmatrix} \quad (4)$$

em que φ_{ij} representa uma proporção do deslocamento na coordenada nodal i referente ao modo j . A matriz modal é obtida resolvendo a equação de vibração livre não amortecida, esta solução pode ser encontrada com mais detalhes em Clough e Penzien [6]. Substituindo a Eq. (2) na Eq. (1) e, posteriormente, multiplicando pela transposta da matriz modal $\mathbf{\Phi}$, a equação de movimento fica:

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} \ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi} \dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \mathbf{d}(t) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{F}(t) \quad (5)$$

lembrando que os vetores modais satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade, como indicado por Clough e Penzien [6]:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_j = \begin{cases} \tilde{m}_j & \text{com } i = j \\ 0 & \text{com } i \neq j \end{cases} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j = \begin{cases} \tilde{k}_j & \text{com } i = j \\ 0 & \text{com } i \neq j \end{cases} \quad (7)$$

no qual \tilde{m}_j e \tilde{k}_j são chamados de massa modal e rigidez modal associados ao j -ésimo modo de vibração. Assumindo que a matriz de amortecimento é proporcional apenas à matriz de rigidez, pode-se aproveitar das relações de ortogonalidade apresentadas nas Eqs. (6) e (7):

$$\mathbf{C} = \beta \mathbf{K} \quad (8)$$

ao utilizar as relações de ortogonalidade da Eq. (7), e isolando os termos modais não nulos ($i = j$), o amortecimento modal fica:

$$\tilde{c}_j = \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}_j = \beta \boldsymbol{\varphi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_j \quad (9)$$

em que β_j é um coeficiente de proporcionalidade definido, segundo Clough e Penzien [6], como:

$$\beta_j = \frac{2\xi_j}{\omega_j} \quad (10)$$

no qual ξ_j é a taxa de amortecimento estrutural referente ao modo j .

Substituindo as Eqs. (3), (6), (7) e (9) na Eq. (5) tem-se:

$$\tilde{m}_j \ddot{d}_j(t) + \tilde{c}_j \dot{d}_j(t) + \tilde{k}_j d_j(t) = \tilde{F}_j \quad (11)$$

em que \tilde{F}_j é a força modal equivalente. A Eq. (11) representa j equações modais de movimento no formato de um grau de liberdade. A Figura 1 mostra de forma esquemática a redução do sistema principal para um sistema com um grau de liberdade referente ao modo j .

A segunda etapa consiste em acoplar o AMS no sistema modal. Como o AMS cobre apenas uma janela que envolve a frequência de operação; dessa forma, deve-se primeiramente escolher qual modo de vibração deseja-se atenuar as vibrações. Dessa forma, a equação do sistema estrutural (estrutura principal com o AMS acoplado) é reduzida à um sistema com dois graus de liberdade: um grau de liberdade modal, referente a estrutura principal, e o grau de liberdade referente ao AMS (ver Figura 1):

$$\begin{cases} \tilde{m}_j \ddot{d}_j + (\tilde{c}_j + c_a) \dot{d}_j + (\tilde{k}_j + k_a) d_j - c_a \dot{u}_a - k_a u_a = \tilde{F}_j \\ m_a \ddot{u}_a + c_a \dot{u}_a + k_a u_a - c_a \dot{d}_j - k_a d_j = 0 \end{cases} \quad (12)$$

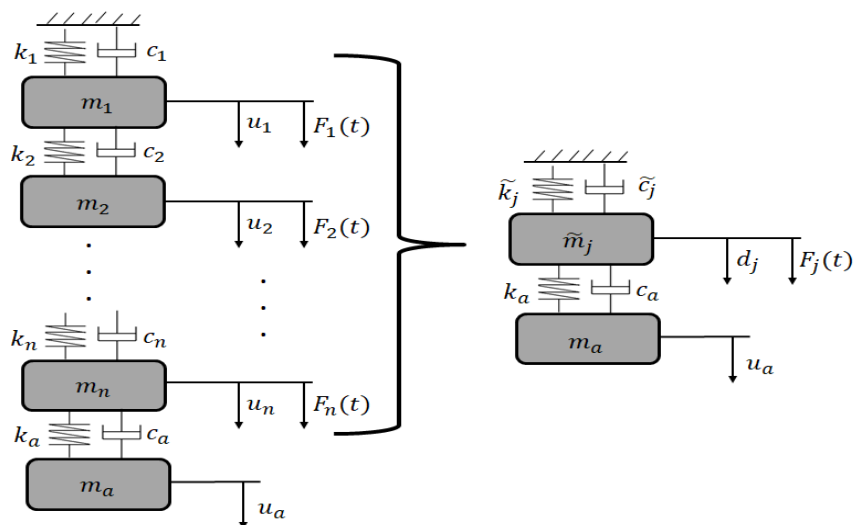


Figura 1. Redução da estrutura principal para sistema equivalente de um grau de liberdade na forma modal.

A Eq. (12) pode ser reescrita em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \tilde{m}_j & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}_j \\ \ddot{u}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{c}_j + c_a & -c_a \\ -c_a & c_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{d}_j \\ \dot{u}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{k}_j + k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_j \\ u_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_j(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

em que m_a é a massa do AMS, c_a é o coeficiente de amortecimento do AMS e k_a é a rigidez do AMS. O deslocamento do AMS é dado por u_a .

O sistema apresentado pela Eq. (13) pode ser resolvido aplicando algum algoritmo de integração da equação de movimento como *Newmark* ou *Método das Diferenças Finitas* para obter os deslocamentos modais d_j considerando forças dinâmicas de qualquer natureza. Para forças essencialmente harmônicas, foco desse trabalho, pode-se obter os deslocamentos modais resolvendo o sistema da Eq. (13) diretamente por meio de algumas manipulações algébricas. Assim o máximo deslocamento modal para uma estrutura submetida a um carregamento harmônico é dado por:

$$d_j = \frac{\tilde{F}_j}{\tilde{k}_j} \sqrt{\frac{(1 - r_a^2)^2 + (2\xi_a r_a)^2}{B}} \quad (14)$$

no qual o denominador B da Eq. (14) é definido como

$$\begin{aligned} B = & (r_j^2 r_a^2 - 4r_j r_a \xi \xi_a - r_a^2 - r_j^2 - r_j^2 \mu_j + 1)^2 \\ & + (-2\xi r_j r_a^2 - 2\xi_a r_j^2 r_a - 2\xi_a r_j^2 r_a \mu_j + 2\xi r_j + 2\xi_a r_a)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$r_a = \frac{\Omega}{\omega_a} \quad (16)$$

$$r_j = \frac{\Omega}{\omega_j} \quad (17)$$

$$\mu_j = \frac{m_a}{m_j} \quad (18)$$

em que Ω é a frequência de excitação da força harmônica sob a estrutura, ξ_a é a taxa de amortecimento do AMS e ξ a taxa de amortecimento da estrutura. Os deslocamentos nodais da estrutura principal podem ser obtidos utilizando a Eq. (2). O deslocamento do AMS pode ser calculado de forma similar:

$$u_a = \frac{\tilde{F}_j}{\tilde{k}_j} \sqrt{\frac{1 + (2\xi_a r_a)^2}{B}} \quad (19)$$

Nota-se que para tornar o sistema principal indeslocável o numerador da Eq. (14) tem que ser igual a zero, assim:

$$(1 - r_a^2)^2 + (2\xi_a r_a)^2 = 0 \rightarrow r_a = 1 \text{ e } \xi_a = 0 \quad (20)$$

ou seja, os parâmetros ótimos do AMS para tornar a estrutura principal imóvel são:

$$\begin{aligned} r_a = 1 &\rightarrow \omega_a = \Omega \\ \xi_a = 0 &\rightarrow c_a = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Observa-se das expressões da Eq. (21) que o AMS é mais eficiente sem amortecimento e com sua frequência natural igual à frequência de excitação. Porém o amortecimento do AMS auxilia na obtenção de uma faixa de operação maior para o mesmo, ou seja, especificando amortecimento para o AMS é possível garantir a eficiência da resposta para uma perturbação na frequência de excitação da força dinâmica. A rigor é difícil a eliminação total da vibração na estrutura principal, assim, é necessário estabelecer uma faixa de operacionalidade do AMS. O sistema composto (estrutura e AMS) tem duas frequências naturais e não devem estar próximas da frequência de excitação (Ω).

Um conceito interessante é o Fator de Amplificação Dinâmica (*FAD*). O *FAD* é a resposta permanente normalizada da estrutura definido como a relação entre o maior deslocamento dinâmico e o deslocamento pseudoestático (\tilde{F}_j/\tilde{k}_j). Assim, é possível, por meio do *FAD*, avaliar a resposta da estrutura em função da razão da frequência da estrutura e a frequência de excitação da força dinâmica.

$$FAD = \frac{d_j}{\tilde{F}_j/\tilde{k}_j} = \sqrt{\frac{(1 - r_a^2)^2 + (2\xi_a r_a)^2}{B}} \quad (22)$$

De forma similar, tem-se o *FAD* para a resposta do AMS:

$$FAD_{AMS} = \frac{u_a}{\tilde{F}_j/\tilde{k}_j} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi_a r_a)^2}{B}} \quad (23)$$

3 Estudo Numérico

3.1 Descrição da Estrutura

O estudo numérico consiste em dimensionar um atenuador do tipo AMS que será acoplado à viga para reduzir sua resposta dinâmica. A Figura 2 ilustra a viga com o atenuador acoplado e uma ação dinâmica atuando. A viga mostrada na Figura 2 possui uma massa distribuída linearmente \bar{m} , módulo

de elasticidade E , inércia à flexão I e com vão de comprimento L . A posição da força $f(t)$ é definida por x_f , enquanto a posição do AMS é dada por x_a . Supondo uma viga metálica do tipo $W360x79$ do catálogo da *GERDAU* [7] simplesmente apoiada, com as características descritas na Tabela 1.

Tabela 1. Características da viga metálica

Característica	Nomenclatura	Unidade de Medida	Valor
Comprimento	L	m	6,0
Momento de Inércia	I	m^4	$2,2 \cdot 10^{-4}$
Massa Linear	\bar{m}	kg/m	79,0
Módulo de Elasticidade	E	N/m^2	$2,0 \cdot 10^{11}$
Taxa de Amortecimento	ξ	%	2,0

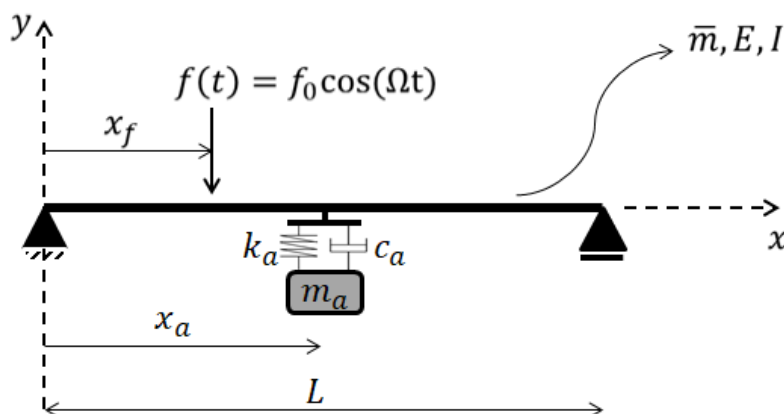


Figura 2. Viga simplesmente apoiada com atenuador acoplado

A forma modal de vibração da viga pode ser expressa por uma função seno, descrita como

$$\varphi_j(x) = \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad (24)$$

em que para cada modo j , tem-se uma configuração deformada. Lembrando que a função de forma deve satisfazer as condições de contorno da estrutura em questão, ou seja, deslocamento vertical nulo nas extremidades ($x = 0$ e $x = L$).

O deslocamento nodal pode ser escrito como o somatório do produto entre o deslocamento modal (em função do tempo) e a função de forma que representa a deformada da estrutura, dada pela Eq. (24), no respectivo instante de tempo, ou seja,

$$u = \sum_{j=1}^N d_j(t)\varphi_j(x) \quad (25)$$

A energia de deformação elástica da estrutura contínua é escrita da seguinte forma:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left[\frac{d^2 u}{dx^2} \right]^2 dx \quad (26)$$

isolando cada contribuição modal do deslocamento exposto na Eq. (25) e aplicando a segunda derivada, tem-se:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{d_j \pi^2 j^2}{L^2} \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad (27)$$

substituindo a equação anterior na Eq. (26) e realizando a integração, tem-se a energia de deformação elástica da viga referente ao modo j :

$$U = \frac{1}{2} EI \frac{\pi^4 j^4}{2L^3} d_j^2 \quad (28)$$

tomando a equação geral da energia de deformação para um respectivo modo como

$$U_j = \frac{1}{2} \tilde{k}_j d_j^2 \quad (29)$$

e comparando as Eqs. (28) e (29), obtêm-se a rigidez equivalente ao modo j da estrutura:

$$\tilde{k}_j = EI \frac{\pi^4 j^4}{2L^3} \quad (30)$$

De forma similar, fazendo a energia cinética do sistema estrutural contínuo, tem-se:

$$Ec = \frac{1}{2} \int_0^L \bar{m} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 dx \quad (31)$$

em que a derivada do deslocamento, novamente isolando cada modo, em relação ao tempo é dada por

$$\frac{du}{dt} = \dot{d}_j \text{sen}\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad (32)$$

que substituindo na Eq. (31) e realizando a integração, tem-se a energia cinética da viga referente ao modo j :

$$Ec = \frac{1}{2} \bar{m} \frac{L}{2} \dot{d}_j^2 \quad (33)$$

tomando a equação geral da energia cinética para um respectivo modo como

$$Ec_j = \frac{1}{2} \tilde{m}_j \dot{d}_j^2 \quad (34)$$

e comparando as Eqs. (33) e (34), obtêm-se a massa equivalente ao modo j da estrutura:

$$\tilde{m}_j = \bar{m} \frac{L}{2} \quad (35)$$

a frequência natural referente ao modo j pode ser então determinada pela raiz quadrada da razão entre as Eqs. (30) e (35):

$$\omega_j = \sqrt{\frac{\tilde{k}_j}{\tilde{m}_j}} = \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}} \left(\frac{j\pi}{L}\right)^4} \quad (36)$$

assim, a equação de movimento modal da estrutura é escrita da seguinte forma:

$$\tilde{m}_j \ddot{d}_j + \tilde{c}_j \dot{d}_j + \tilde{k}_j d_j = \tilde{F}_j \quad (37)$$

em que \tilde{F}_j é a força modal, definida pelo produto da força de excitação pelo modo de vibração referente à posição onde a força está atuando, ou seja:

$$\tilde{F}_j = \varphi_j(x_f) f(t) = \text{sen}\left(\frac{j\pi x_f}{L}\right) f(t) \quad (38)$$

Considerando o amortecimento da estrutura proporcional à rigidez, então o coeficiente de amortecimento modal é escrito como:

$$c_j = \beta_j k_j \quad (39)$$

em que β_j é o coeficiente de proporcionalidade dado pela Eq. (10).

3.2 Dimensionamento do AMS via Método Manual

O procedimento de dimensionamento do AMS manualmente consiste em determinar as características do mesmo de tal forma a obter uma resposta desejada para a viga. Nota-se, pelas equações que regem o problema de dinâmica da viga com o AMS acoplado, que não é uma tarefa simples. Alguns trabalhos acadêmicos, tais como de Tsai e Lin [8], Kim e Lee [9], Farghaly e Ahmed [10], Jangid [11], Salvi, Pioldi e Rizzi [12], Randall, Halsted e Taylor [13] e Batou e Adhikari [14], vêm sendo desenvolvidos com a finalidade de encontrar parâmetros otimizados para o AMS a fim de alcançar um melhor custo benefício dos mesmos nas mais diversas aplicações como também para facilitar na etapa de projeto. Por meio de estudos paramétricos e ajustes de curva em estruturas amortecidas com AMS acoplado, Tsai e Lin [8] propuseram parâmetros otimizados para a taxa de amortecimento (ξ_a) e relação de frequências entre AMS e a estrutura original (f) em função da relação de massa entre o AMS e a estrutura (μ) e a taxa de amortecimento da estrutura original (ξ), dados a seguir:

$$\xi_a = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)(1-0.5\mu)}} + (0,151\xi - 0,170\xi^2) + (0,163\xi + 4,980\xi^2)\mu \quad (40)$$

$$f = \frac{\omega_a}{\omega} = \frac{r}{r_a} = \left(\frac{\sqrt{1-0,5\mu}}{1+\mu} + \sqrt{1-2\xi^2} - 1 \right) - [2,375 - 1,034\sqrt{\mu} - 0,426\mu]\xi\sqrt{\mu} - (3,730 - 16,903\sqrt{\mu} + 20,496\mu)\xi^2\sqrt{\mu} \quad (41)$$

Com os parâmetros ξ_a e f definidos, é possível construir um gráfico de resposta normalizada (FAD) do sistema estrutural em função de μ inserindo as Eqs (40) e (41) na Eq. (22). A Figura 3 mostra o gráfico da resposta da estrutura dada pela Eq. (22) em função de μ .

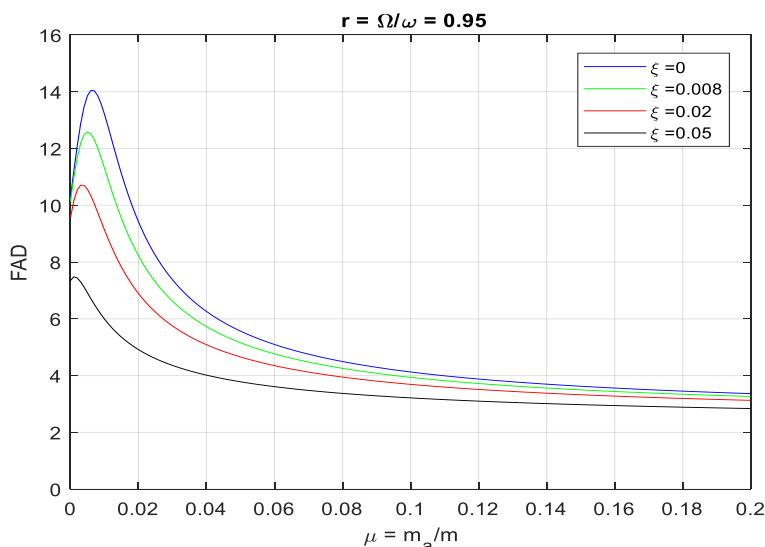


Figura 3. Gráfico da resposta normalizada da estrutura (FAD) em função da relação de massa (μ), para uma razão de frequências $r=0.95$.

É possível também construir um gráfico de resposta normalizada relativa (FAD_r) entre sistema estrutural e o AMS em função de μ inserindo as Eqs (40) e (41) na Eq. (23).

$$FAD_r = \frac{FAD_a}{FAD} \quad (42)$$

A Figura 4 mostra o gráfico da resposta relativa normalizada dada pela Eq. (42) em função de μ .

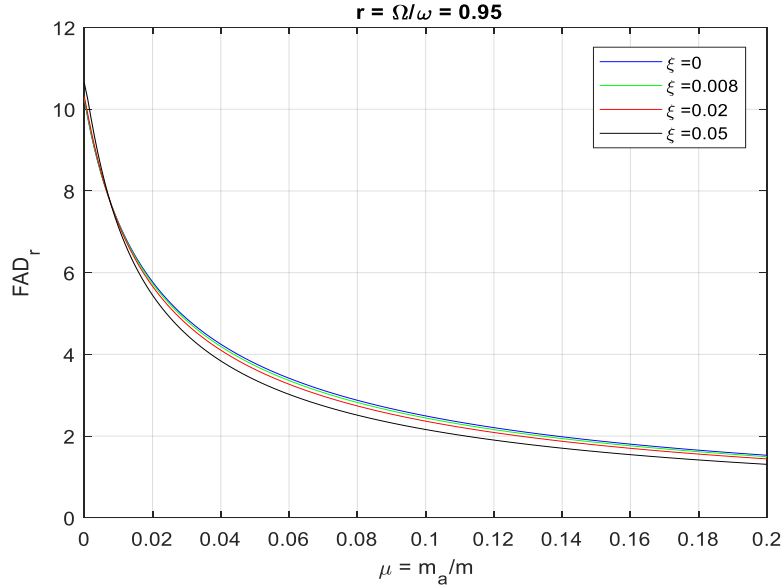


Figura 4. Gráfico da resposta normalizada relativa da estrutura e AMS (FAD_r) em função da relação de massa (μ), para uma razão de frequências $r=0.95$

Inicialmente, define-se uma amplitude limite para a estrutura e para o AMS. Toma-se como deslocamento limite da estrutura

$$\Delta_{lim} = \frac{L}{350} = 0,017 \text{ m} \quad (43)$$

Os parâmetros modais da estrutura representada na Figura 2, utilizando as Eqs. (17), (30), (35) e (36) são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2. Parâmetros modais da estrutura analisada

Parâmetro	Valor
r	0,95
\tilde{k}_j	$9321,3 \cdot 10^3 \text{ N/m}$
\tilde{m}_j	237 kg
ω_j	$204,6 \text{ rad/s}$

Levando em conta uma força dinâmica com intensidade $f_0 = 42000 \text{ N}$ e frequência de operação $\Omega = 194,4 \text{ rad/s}$, situada no meio do vão ($x_f = L/2$). Pode-se calcular a amplitude máxima do deslocamento dinâmico [1]:

$$A_p = \frac{u_{est}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = 0,041 \text{ m} \quad (44)$$

em que u_{est} é o deslocamento pseudoestático originado pelo módulo da força dinâmica, dado por

$$u_{est.} = \frac{f_0 L^3}{48EI} = 0,0043 \text{ m} \quad (45)$$

assim o fator de amplificação dinâmica da estrutura sem o AMS acoplado é igual a

$$FAD_o = \frac{A_p}{u_{est}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = 9,5 \quad (46)$$

Nota-se pela amplitude dinâmica (Eq. (44)) que a estrutura, quando sujeita a excitação dinâmica, ultrapassa o deslocamento limite estipulado pela Eq. (43). Assim, deve-se especificar um AMS para controlar a resposta dinâmica, a fim que mesma retorne ao deslocamento aceitável. Impondo o deslocamento dinâmico igual ao deslocamento limite e utilizando o conceito da resposta normalizada da estrutura dada pela Eq. (22), tem-se:

$$A_{p,imposto} = 0,017 \rightarrow FAD_{lim} = \frac{A_{p,imposto}}{u_{est.}} = \frac{0,017}{0,0043} \cong 4 \quad (47)$$

Levando em conta a instalação do AMS também no vão central ($x_a = L/2$), visto que é o local de maior amplitude para o primeiro modo (ver Eq. (24)), e limitando que o AMS, por questões do local de instalação, tenha uma disponibilidade de amplitude de deslocamento ($A_{a,max}$) máxima igual a 0,10 m, pode-se calcular a resposta normalizada relativa entre o AMS e a estrutura, dada pela Eq. (42).

$$FAD_r = \frac{FAD_a}{FAD} = \frac{A_{a,max}}{A_{p,imposto}} = \frac{0,10}{0,017} \cong 6 \quad (48)$$

Utilizando o valor calculado pela Eq. (47) no eixo das abscissas para a curva da taxa de amortecimento referente a estrutura do gráfico da Figura 3, obtém-se uma relação de massa de aproximadamente $\mu = 0,078$ no eixo das ordenadas. Utilizando o valor calculado pela Eq. (48) no eixo das abscissas para a curva da taxa de amortecimento referente à estrutura do gráfico da Figura 4 obtém-se uma relação de massa de aproximadamente $\mu = 0,018$. Adota-se então o maior valor.

$$\mu = 0,078 \quad (49)$$

Com o valor obtido para a relação de massa (Eq. (49)), por meio das Eqs. (40) e (41) encontram-se a taxa de amortecimento do AMS (ξ_a) e a relação das frequências entre o AMS e a estrutura (f) sugeridas por Tsai e Lin [8]:

$$\xi_a = 0,1714 \quad (50)$$

$$f = 0,8974 \quad (51)$$

A partir dos valores encontrados pelas Eqs. (50) e (51) podem-se encontrar os parâmetros para especificação do AMS utilizando as equações a seguir

$$m_a = \mu \tilde{m}_1 = 18,49 \text{ kg} \quad (52)$$

$$\omega_a = f \omega_1 = 183,62 \text{ rad/s} \quad (53)$$

$$c_a = 2\xi_a \omega_a m_a = 1,1635 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{s/m} \quad (54)$$

$$k_a = \omega_a^2 m_a = 6,2327 \cdot 10^5 \text{ N/m} \quad (55)$$

A massa total da estrutura são 474 kg, portanto, o AMS representa em torno de 4% da massa total da viga, produzindo uma redução no deslocamento dinâmico de quase 60%. Em geral é dispensada a verificação do acréscimo de carga estática produzida pela massa do AMS adicionada, visto que são valores muito baixos em relação à massa total da estrutura original. Porém, a rigor a verificação deve ser feita, principalmente se forem necessários acréscimos de massa consideráveis.

Na Figura 5 consta o gráfico de resposta normalizada da estrutura com e sem o AMS acoplado. É possível notar que o fator de amplificação dinâmica para $r = 0,95$ é atendido e a curva de resposta obtida é razoavelmente suave em torno de r , garantindo uma certa faixa de operação.

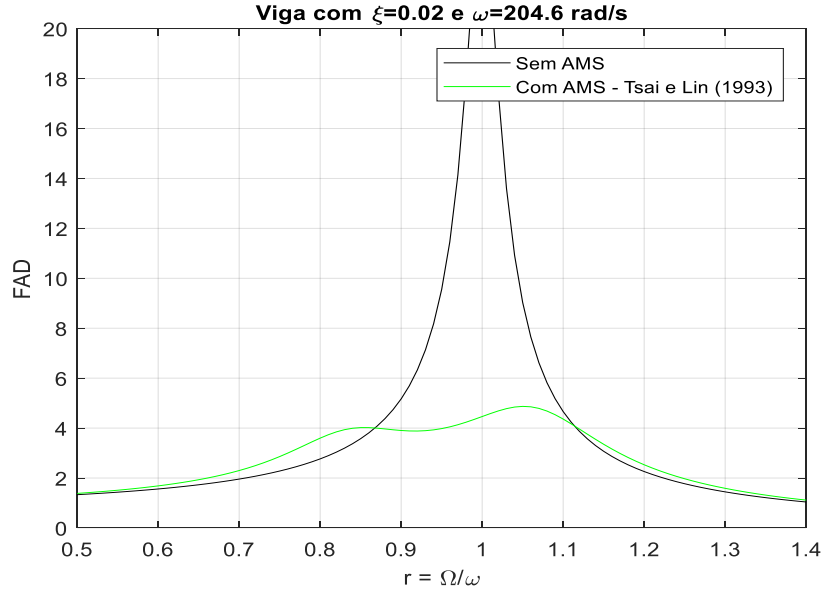


Figura 5. Resposta da estrutura original (sem AMS) e com AMS dimensionado via parâmetros sugeridos por Tsai e Lin [8].

3.3 Dimensionamento do AMS via Otimização

Esta seção consiste em otimizar os parâmetros do atenuador tipo AMS dimensionado na Seção 3.2 via método manual. Primeiramente, definem-se as variáveis de projeto do problema de otimização. As variáveis de projeto serão os parâmetros do AMS, ou seja, o vetor \mathbf{x} será composto pela relação de massas (μ), relação de frequências (r_a) e pela taxa de amortecimento do AMS (ξ_a), na forma

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = [\mu \quad r_a \quad \xi_a]^T \quad (56)$$

em que os limites das variáveis de projetos são definidos a seguir:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 \leq 1 \\ 0 &\leq x_2 \leq 1,5 \\ 0 &\leq x_3 \leq 1 \end{aligned}$$

O objetivo será minimizar a relação de massa μ , ou seja, reduzir a massa do AMS, dessa forma tem-se:

$$\min g_0(\mathbf{x}) = \mu = x_1 \quad (57)$$

As restrições do problema de otimização são definidas pelo deslocamento estático limite, a amplitude dinâmica em que se pretende alcançar e a amplitude dinâmica pré-definida para o AMS. Assim, tem-se:

$$g_1(\mathbf{x}) = \frac{(f_0 + 10x_1\bar{m})L^3}{48EI} - \Delta_{lim} \leq 0 \quad (58)$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{(1 - x_2^2)^2 + (2x_3x_2)^2}{B}} - FAD_{lim} \leq 0 \quad (59)$$

$$g_3(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{1 + (2x_3x_2)^2}{B}} - A_{a,max} \leq 0 \quad (60)$$

em que Δ_{lim} é o deslocamento estático limite definido pela Eq. (43) e $A_{a,max}$ o deslocamento máximo permitido para o AMS definido na Seção 3.2. Utilizando as Eqs. (15) e (41) que são reescritas aqui

substituindo a notação para as variáveis de projeto definidas na Eq. (56), têm-se

$$B = (r^2 x_2^2 - 4rx_2 \xi x_3 - x_2^2 - r^2 - r^2 x_1 + 1)^2 + (-2\xi r x_2^2 - 2x_3 r^2 x_2 - 2x_3 r^2 x_2 x_1 + 2\xi r + 2x_3 x_2)^2 \quad (61)$$

$$f = \frac{r}{x_2} \quad (62)$$

O problema de otimização é resolvido utilizando o algoritmo de otimização *interior point* implementado no *Matlab*®. Dessa forma minimizando a função $g_0(\mathbf{x})$ sob as restrições $g_1(\mathbf{x})$, $g_2(\mathbf{x})$ e $g_3(\mathbf{x})$ chega-se ao vetor contendo os valores ótimos das variáveis de projeto

$$\mathbf{x}^* = [0,0273 \quad 1,0775 \quad 0,0246]^T \quad (63)$$

Como a função objetivo $g_0(\mathbf{x})$ é a primeira variável de projeto (ver Eq. (57)), o mínimo da função objetivo é $g_0(\mathbf{x}^*) = 0,0273$. Assim, os parâmetros do AMS podem ser calculados usando as mesmas Eqs. (52) a (55) com os valores obtidos no processo de otimização e são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3. Parâmetros otimizados

Parâmetro	Valor
m_a	6,4637 kg
ω_a	180,3891 rad/s
c_a	57,4739 N · s/m
k_a	$2,1033 \cdot 10^5$ N/m

Percebe-se que utilizando o algoritmo de otimização, é alcançado uma redução nos parâmetros do AMS. Comparando os valores obtidos nesta seção com os valores obtidos na Seção 3.2 nota-se que houve uma redução significativa nos parâmetros o que está relacionado a uma redução no custo do sistema de atenuação.

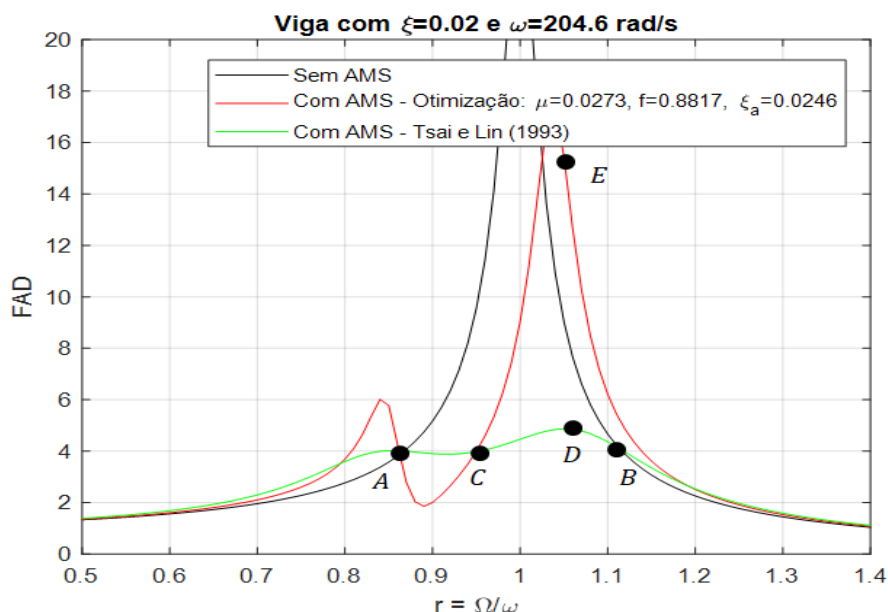


Figura 6. Resultados obtidos com a metodologia da Seção 3.2 (curva verde, Tsai e Lin [8]) e utilizando algoritmo de otimização (curva vermelha).

Na Figura 6 pode-se observar que, ambas as soluções para o AMS são atendidas para a frequência de excitação especificada para a força (ponto C). Porém a faixa de operação obtida com o processo de

otimização, representada pela curva em vermelho, é menor, ou seja, qualquer perturbação crescente na frequência de excitação da força geram ampliações consideráveis na resposta da estrutura; por exemplo, se a frequência de excitação oscilar de maneira a resultar uma razão $r = 1,05$, a resposta dinâmica sobe para aproximadamente 15 vezes maior ($FAD = 15,44$ no ponto E) que o deslocamento estático, e inclusive maior que a resposta dinâmica se a estrutura não tivesse o AMS acoplado; enquanto que, para o AMS com os parâmetros obtidos pela formulação de Tsai e Lin [8], na faixa de razão de frequências para $r = 1,05$ resultaria em uma amplificação dinâmica de aproximadamente 5 vezes maior ($FAD = 4,87$ no ponto D).

Para obter uma função de resposta da estrutura suave na região de interesse (em torno da faixa de operação da excitação da força dinâmica, ou seja, entre os pontos A e B) devem-se adicionar restrições ao problema de otimização com a finalidade melhorar a faixa de operação do AMS. Adicionando uma quarta restrição, $g_4(\mathbf{x})$, como sendo a derivada de primeira ordem igual zero do fator de amplificação dinâmica em relação ao r de interesse do problema, impõe que no entorno da frequência de excitação a curva de resposta seja mais suave, pois a inclinação da reta tangente neste ponto seja nula.

$$g_4(\mathbf{x}) = \frac{\partial FAD}{\partial r} = 0 \quad (64)$$

Dessa forma, minimizando a função $g_0(\mathbf{x})$ sob as restrições $g_1(\mathbf{x})$, $g_2(\mathbf{x})$, $g_3(\mathbf{x})$ e $g_4(\mathbf{x})$, chega-se ao vetor contendo os valores ótimos das variáveis de projeto $\mathbf{x}^* = [0,036 \quad 1,0147 \quad 0,0834]^T$, em que é representada pela curva azul na Figura 7.

Ao adicionar também uma quinta restrição, $g_5(\mathbf{x})$, dada por

$$g_5(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 FAD}{\partial r^2} \leq 0 \quad (65)$$

como a derivada de segunda ordem menor ou igual a zero do fator de amplificação dinâmica em relação ao r de interesse do problema, é possível garantir que a curva seja côncava; e em conjunto com as restrições $g_2(\mathbf{x})$ e $g_4(\mathbf{x})$ para garantir que a concavidade esteja abaixo do limite estabelecido, a curva de resposta tenha um comportamento ainda mais suave, aumentando a faixa de operação do AMS.

Dessa forma minimizando a função $g_0(\mathbf{x})$ sob as restrições $g_1(\mathbf{x})$, $g_2(\mathbf{x})$, $g_3(\mathbf{x})$, $g_4(\mathbf{x})$ e $g_5(\mathbf{x})$ chega-se ao vetor contendo os valores ótimos das variáveis de projeto $\mathbf{x}^* = [0,1177 \quad 1,0748 \quad 0,2554]^T$, em que é representada pela curva magenta na Figura 7.

Uma alternativa para garantir uma faixa de operação eficiente para o AMS é aplicar no processo de otimização um intervalo de segurança de interesse em entorno de r . Em vez de utilizar as restrições relacionadas às derivadas do FAD , utiliza-se restrições com uma variação prescrita da razão de frequências (r) em que se deseja garantir a faixa de operação. Imagina-se, por exemplo, que queiramos que o AMS opere de forma segura em uma faixa de operação no intervalo de $0,85 \leq r \leq 1,05$, para tal, estipula-se um $\Delta r = 0,10$ e impor no processo de otimização que as respostas normalizadas nesses limites extremos sejam iguais ao limite imposto para o ponto de interesse ($r = 0,95$). Dessa forma, definem-se outras duas funções de restrições:

$$g_6(\mathbf{x}) = FAD(r - \Delta r) - FAD_{lim} = 0 \quad (66)$$

$$g_7(\mathbf{x}) = FAD(r + \Delta r) - FAD_{lim} = 0 \quad (67)$$

Minimizando a função $g_0(\mathbf{x})$ sob as restrições $g_1(\mathbf{x})$ a $g_3(\mathbf{x})$, $g_6(\mathbf{x})$ e $g_7(\mathbf{x})$ chega-se ao vetor contendo os valores ótimos das variáveis de projeto $\mathbf{x}^* = [0,0927 \quad 1,0407 \quad 0,0912]^T$, em que é representada pela curva azul clara na Figura 7.

Essas duas restrições expostas nas Eqs. (66) e (67), em conjunto com as restrições $g_1(\mathbf{x})$ a $g_3(\mathbf{x})$, conseguem, também, suavizar a função de resposta entorno do ponto de interesse com as vantagens de obtenção de valores menores para a taxa de amortecimento do AMS e especificação prévia da faixa de interesse de operação pelo projetista pelo índice Δr .

As curvas para comparação da eficiência das respostas normalizadas para a viga considerando as restrições adicionais $g_4(\mathbf{x})$ e $g_7(\mathbf{x})$ com as respostas obtidas com método manual da seção anterior em que se utilizam apenas as restrições mecânicas ($g_1(\mathbf{x})$ a $g_3(\mathbf{x})$) no ponto de interesse ($r = 0,95$)

estão plotadas na Figura 7.

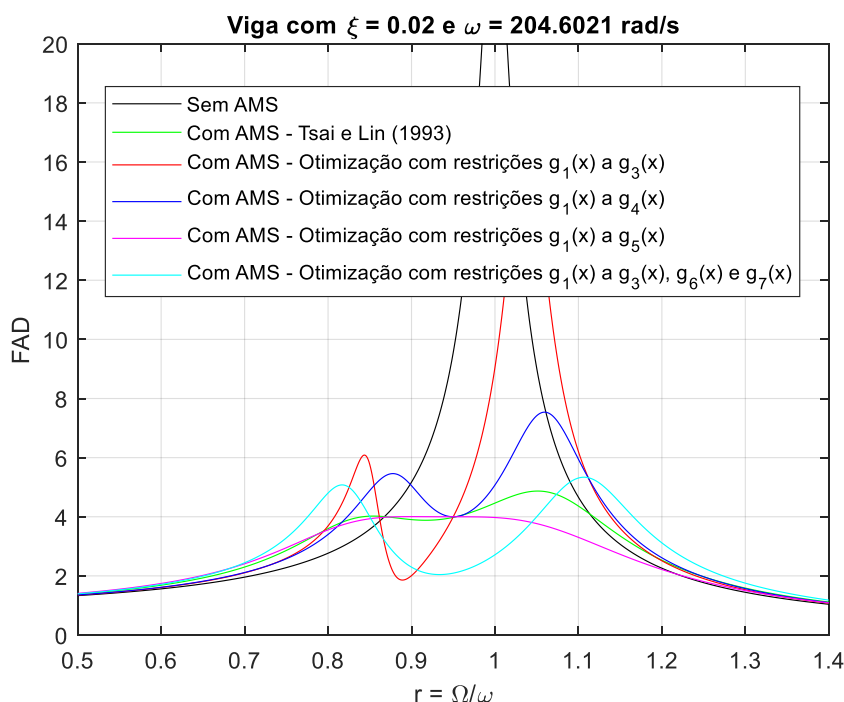


Figura 7. Comparação da resposta da estrutura entre o método manual e com processo de otimização com restrições de $g_1(x)$ a $g_7(x)$

Na Tabela 4 encontra-se um resumo com as características obtidas para o AMS com a utilização das restrições sugeridas para o processo de otimização e que estão plotadas na Figura 7.

Tabela 4. Resumo com as características do AMS para diferentes casos analisados no estudo numérico

Parâmetro	Tsai e Lin	Com Otimização			
		g_1 a g_3	g_1 a g_4	g_1 a g_5	g_1 a g_3, g_6, g_7
m_a [kg]	18,49	6,46	8,53	27,90	21,98
ω_a [rad/s]	183,62	180,38	191,55	180,84	186,78
ξ_a [-]	0,1714	0,0246	0,0834	0,2554	0,0912
k_a [N/m]	6,23e5	2,10e5	3,13e5	9,12e5	7,67e5

4 Conclusões

Sabendo das consequências negativas que podem ocorrer em estruturas sob cargas dinâmicas, é fundamental que haja um estudo no sentido de mitigar esses problemas, seja na etapa de projeto ou em estruturas existentes.

Pôde-se perceber que a utilização dos atenuadores do tipo AMS é um recurso bastante eficiente e já utilizado em muitos casos descritos neste trabalho. Porém, os parâmetros de dimensionamento do atenuador são sensíveis e devem ser escolhidos de forma correta para atingir o objetivo com segurança e economia, pois, foi visto que a variação pequena de forma equivocada desses parâmetros pode incorrer até em uma piora no desempenho do sistema estrutural original. O suporte de técnicas de otimização entra como um recurso valioso para o engenheiro poder especificar o atenuador de forma segura, eficiente e econômica.

No exemplo numérico apresentado neste trabalho foi demonstrada a eficiência dos atenuadores

com a inclusão de uma pequena massa (comprando com a massa total da estrutura) adicional, juntamente com especificação de molas e amortecedores. Utilizando as técnicas de otimização foram encontrados parâmetros também que reduzem a resposta da estrutura, porém foi visto que se deve incluir outras restrições, não mecânicas, voltadas para suavização de curvas para garantir uma abrangência maior no desempenho dos atenuadores.

Agradecimentos

Os autores agradecem os apoios financeiros da CAPES, PETROBRAS e CNPq.

Referências

- [1] Varela, W. D.; Battista, R. C. Control of vibrations induced by people walking on large span composite floor decks. *Engineering Structures*. 2011, Vol. 33, No. 9, pp. 2485-2494.
- [2] Sakr, T. A. Vibration control of buildings by using partial floor loads as multiple tuned mass dampers. *Housing and Building National Research Center Journal*. 2015, Vol. 13, No. 2, pp. 133-144.
- [3] Xu, K.; Bi, K.; Han, Q.; Li, X.; Du, X. Using tuned mass damper inerter to mitigate vortex-induced vibration of long-span bridges: Analytical study. *Engineering Structures*. 2019, Vol. 182, pp. 101-111.
- [4] Saaed, T. E.; Nikolakopoulos, G.; Jonasson, J.-E.; Hedlund, H. A state-of-the-art review of structural control systems. *Journal of Vibration and Control*. 2013, Vol. 21, No. 5, pp. 919-937.
- [5] Harris, C. M.; Piersol, A. G. 2002. *Harris` Shock and Vibration Handbook*. 5. s.l. : McGRAW-HILL, 2002.
- [6] Clough, R. W.; Penzien, J. *Dynamics of Structures*. 3ªed. Berkley: Computers and Structures, Inc., 2003.
- [7] www2.gerdau.com.br/catalogos-e-manuais (acessado 19 de junho de 2019)
- [8] Tsai, H.-C.; Lin, G.-C. Optimum tuned-mass dampers for minimizing steady-state response of support-excited and damped systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 1993, Vol. 22, No. 11, pp. 957-973.
- [9] Kim, S.-Y.; Lee, C.-H. Optimum design of linear multiple tuned mass dampers subjected to white-noise base acceleration considering practical configurations. *Engineering Structures*. 2018, Vol. 171, pp. 516-528.
- [10] Farghaly, A. A.; Ahmed, M. S. Optimum design of TMD system for tall buildings. *ISRN Civil Engineering*. 2012, Article ID 716469, 13 pages.
- [11] Jangid, R. S. Optimum multiple tuned mass dampers for base-excited undamped system. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 1999, Vol. 28, No. 9, pp. 1041-1049.
- [12] Salvi, J.; Pioldi, F.; Rizzi, E. Optimum tuned mass dampers under seismic soil-structure interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2018, Vol. 114, pp. 576-597.
- [13] Randall, S. E.; Halsted, D. M.; Taylor, D. L. Optimum vibration absorbers for linear damped systems. *Journal of Mechanical Design*. 1981, Vol. 103, No. 4, pp. 908-913.
- [14] Batou, A.; Adhikari, S. Optimal parameters of viscoelastic tuned-mass dampers. *Journal of Sound and Vibration*. 2019, Vol. 445, pp. 17-28.