

COUPLED ELASTOPLASTIC-VISCOPLASTIC SOLUTIONS FOR COMPACTION PROCESS IN SEDIMENTARY BASINS

Paulo Sérgio Baumbach Lemos

paulobaumbach@hotmail.com

*Department of Civil Engineering, Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil
Av. Osvaldo Aranha 99, 3rd floor, Centro – CEP 90035-190 – Porto Alegre, RS, Brazil*

André Brüch

andre.reinert-bruch@ifpen.fr

*IFP Energies Nouvelles
1 et 4 avenue de Bois-Préau, 92852 Rueil-Malmaison, France*

Samir Maghous

samir.maghous@ufrgs.br

*Department of Civil Engineering, Federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brazil
Av. Osvaldo Aranha 99, 3rd floor, Centro – CEP 90035-190 – Porto Alegre, RS, Brazil*

Abstract. Simulation of sedimentary basins is a complex multidisciplinary problem that involves geological, chemical and mechanical aspects. The potential applications are important in geoscience and petroleum engineering, including exploration, reserves assessment and production activities. In this context, basin simulators that implement numerical models are used to reconstruct its mechanical state over geological time in order to optimize exploration processes. This work presents semi-analytical reference solutions in elastoplasticity-viscoplasticity to describe the compaction history of sedimentary basins in the context of finite irreversible transformations, which are useful for the verification of numerical simulators. A finite element based modelling specifically devised for dealing with basin simulation has been used for comparison purposes. The numerical responses were favorably compared to the developed solutions, thus providing preliminary verification for the finite element tool.

Keywords: sedimentary basin, finite elastoplasticity-viscoplasticity, benchmark.

1 Introdução

As bacias sedimentares são regiões da crosta terrestre onde a subsidência da litosfera proporciona um ambiente favorável à deposição e compactação gravitacional do material erodido oriundo do roteamento sedimentar. Ao longo dos processos de diagênese, o material sedimentado é transformado em rocha sedimentar. Estes são os ambientes naturais para a formação e acumulação de hidrocarbonetos, águas subterrâneas, outros recursos minerais, bem como o depósito de resíduos.

As deformações do material geológico originam-se nos processos de compactação mecânica e químico-mecânica em associação com os efeitos térmicos. Grandes deformações irreversíveis se desenvolvem ao longo do perfil rochoso. Essas deformações são de natureza distinta, sendo diferentes em relação à dependência do tempo.

As deformações independentes do tempo são resultantes da compactação mecânica (originada principalmente do rearranjo das partículas sólidas e subsequente expulsão do fluido poroso durante a compactação) e prevalecem nas camadas superiores da bacia. As deformações dependentes do tempo são resultado da compactação químico-mecânica (decorrente do fenômeno IPS – Pressão Solução Intergranular) e são induzidas pelo aumento de tensão e temperatura nas camadas mais profundas da bacia. Os dois processos ocorrem simultaneamente em uma zona de transição [1].

Do ponto de vista da indústria petrolífera, a modelagem de bacias sedimentares tem como objetivo detectar potenciais reservatórios, otimizar processos de exploração, prever o desempenho e aumentar a recuperação final de poços. Simuladores computacionais consistem em modelos numéricos que permitem o estudo detalhado das bacias a partir da reconstrução de eventos geológicos ao longo do tempo. Mais especificamente, os simuladores numéricos fornecem a reconstrução, avaliação e previsão dos perfis de porosidade, poropressão, tensão e temperatura.

Nesse cenário, um modelo constitutivo foi desenvolvido para o material poroso saturado no contexto da termo-poromecânica finita em [2], o qual foi implementado em um simulador numérico baseado no método dos elementos finitos. Este modelo originou-se da formulação apresentada em [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] e [10] para representar o comportamento do material sedimentar submetido à compactação puramente mecânica. Nesta formulação, os efeitos induzidos pelas grandes deformações irreversíveis nas propriedades poroelásticas foram introduzidos por termos adicionais nas equações de estado, formulados a partir de uma análise micromecânica.

No contexto de simuladores numéricos, a verificação e validação são os dois processos primários para avaliar e quantificar a precisão dos resultados computacionais. A verificação é o processo de avaliação da precisão do software e precisão numérica da solução para um dado modelo matemático, onde a associação ou relação da simulação com o mundo real não é um problema. O processo de verificação é basicamente feito comparando as respostas do simulador aos benchmarks, que são soluções altamente precisas para modelos matemáticos específicos [11].

Este trabalho apresenta a formulação de benchmarks que descrevem os processos de deformação em uma bacia sedimentar, útil no processo de verificação de simuladores numéricos. A bacia sedimentar é modelada como um meio elastoplástico-viscoplástico submetido a grandes deformações. A análise é restrita a condições drenadas e isotérmicas, desconsiderando o efeito da poropressão e temperatura no material. Os modelos utilizados foram incorporados ao simulador numérico desenvolvido em [2] e as respostas numéricas foram comparadas às soluções formuladas.

2 Descrição do problema

O problema mecânico é definido da seguinte forma: material sedimentar é depositado ao longo do tempo no leito oceânico; o material sedimentado é sujeito a compactação gravitacional; nesse processo, o sedimento é submetido a compactação mecânica e químico-mecânica.

Durante o processo de compactação, o sedimento pode sofrer redução de porosidade acima dos 50% [12]. Essa característica remete a análise a não linearidade geométrica induzida pela grande deformação sofrida pelo material.

Para a formulação de uma solução semi-analítica para o processo descrito, considerou-se um

material sedimentar em condições drenadas, onde não há desenvolvimento de excesso de poropressão. Além disso, o processo de sedimentação ocorre sob condições oedométricas. O problema também é colocado sob condições isotérmicas, desconsiderando o campo térmico e seu efeito no comportamento do sedimento.

A bacia é modelada como uma camada de dimensões horizontais infinitas, perpendiculares à direção \underline{e}_3 , e assentada sobre um leito rígido localizado no plano $x_3 = 0$. Negligenciando a atividade tectônica, o campo gravitacional $\underline{g} = -g\underline{e}_3$ consiste no único carregamento no processo de compactação. Devido às simetrias espaciais, as grandezas físicas envolvidas no problema desempenham exclusivamente do tempo e da coordenada vertical x_3 . A posição de uma partícula material na camada sedimentar no tempo t é definida como x_3 , e o instante em que essa partícula é depositada no topo da bacia é definido como $T(x_3, t)$.

Com a contínua deposição dos sedimentos no topo da camada, a altura da bacia é uma função do tempo. Assumindo que o topo da bacia permanece horizontal, a posição da sua fronteira superior é definida pela lei de compactação gravitacional $x_3 = H(t)$ (Figura 1).

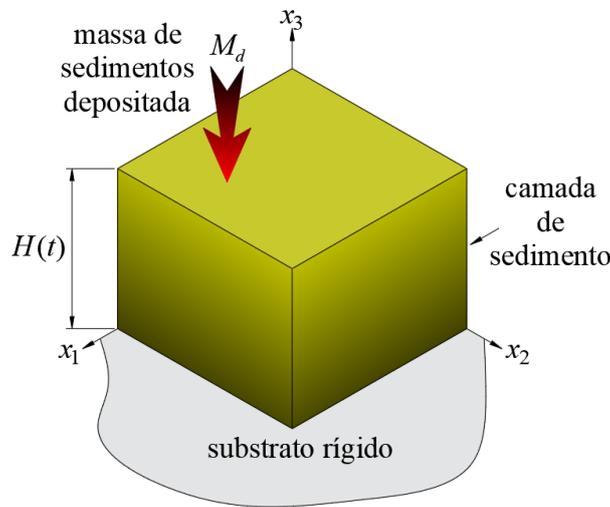


Figura 1. Evolução da bacia sedimentar.

2.1 Equações de campo

O problema quase estático é definido por equações de campo que serão brevemente descritas. O balanço de momentum, negligenciando as forças inerciais, é dado por:

$$\underline{\text{div}}_x \underline{\underline{\sigma}}(x_3, t) + \rho(x_3, t) \underline{g} = \underline{0} \quad (1)$$

Onde $\underline{\text{div}}_x$ é o operador divergência na configuração atual, $\underline{\underline{\sigma}}$ é o tensor de tensão de Cauchy, ρ é a massa específica do material na configuração atual e o sublinhado indica a ordem do campo tensorial.

O balanço de massa em sua formulação Euleriana é dado por:

$$\frac{\partial \rho(x_3, t)}{\partial t} + \underline{\text{div}}_x (\rho(x_3, t) \underline{u}(x_3, t)) = 0 \quad (2)$$

Onde \underline{u} é o campo Euleriano de velocidade das partículas de sedimento.

O balanço de massa em sua formulação Lagrangiana é dado por:

$$\rho(x_3, t) = \frac{\rho_0}{J(x_3, t)} \quad (3)$$

Onde ρ_0 é a massa específica inicial, $J = d\Omega_t / d\Omega_0$ é o Jacobiano da transformação, que

corresponde a razão entre os volumes de uma partícula na configuração atual e de referência.

Como a bacia sedimentar é um sistema material aberto, as partículas assentadas no topo da bacia possuem as seguintes condições iniciais:

$$\underline{\underline{\sigma}}(H(t), t) = \underline{\underline{0}} \quad (4)$$

$$J(H(t), t) = 1 \quad (5)$$

$$\rho(H(t), t) = \rho_0 \quad (6)$$

Como condição de contorno, o campo de velocidade das partículas é nulo no contato com o substrato rígido:

$$\underline{u}(0, t) \cdot -\underline{e}_3 = 0 \quad (7)$$

Devido a hipótese de homogeneidade do material depositado, a natureza oedométrica e a ausência de sequencias tectônicas, os campos de velocidade e tensão assumem as formas:

$$\underline{u}(x_3, t) = u_3(x_3, t)\underline{e}_3 \quad (8)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_3, t) = \sigma_h(x_3, t)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \sigma_v(x_3, t)\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (9)$$

A partir do campo de tensões anterior, o campo desviador de tensão assume a forma:

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \text{tr}\underline{\underline{\sigma}}/3\underline{\underline{1}} = (\sigma_v - \sigma_h)/3(-\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 2\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \quad (10)$$

2.2 Carregamento e transformação geométrica

A massa de sedimentos depositada $M_d(t)$ define o carregamento da bacia sedimentar. No intervalo $[0, t]$ ela é calculada como:

$$M_d(t) = \int_0^{H(t)} \rho(x_3, t) dx_3 \quad (11)$$

É assumido que a taxa de massa depositada $\dot{M}_d(t)$ é conhecida. A partir da equação anterior, ela é dada por:

$$\dot{M}_d(t) = \dot{H}(t)\rho_0 + \int_0^{H(t)} \frac{\partial \rho(x_3, t)}{\partial t} dx_3 \quad (12)$$

A combinação de (2) e (12), juntamente com a condição de contorno (7), resulta em:

$$\dot{H}(t) = \frac{\dot{M}_d(t)}{\rho_0} + u_3(H(t), t) \quad (13)$$

A razão entre a altura de uma partícula na configuração atual no tempo t e a sua altura na configuração de referência no tempo $T(x_3, t)$ é representada pelo alongamento vertical $\Lambda(x_3, t)$. A partir da sua definição, tem-se a condição inicial para a partícula assentada:

$$\Lambda(H(t), t) = 1 \quad (14)$$

Sob condições oedométricas, o gradiente da transformação geométrica de uma partícula entre a configuração de referência e a configuração atual é dado por:

$$\underline{\underline{F}}(x_3, t) = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \Lambda(x_3, t)\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (15)$$

O Jacobiano da transformação geométrica $J = \det \underline{\underline{F}}$ é, portanto, igual a:

$$J = \det \underline{\underline{F}} = \Lambda \quad (16)$$

Como $\underline{\underline{F}}(x_3, t)$ e $\Lambda(x_3, t)$ dependem da coordenada x_3 na configuração atual, essas quantidades aparecem como campos Eulerianos, mesmo que as suas definições sejam inspiradas em uma descrição Lagrangiana do movimento.

O gradiente Euleriano do campo de velocidade $\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{u}$ está relacionado à $\underline{\underline{F}}$ por $\underline{\underline{\nabla}}_x \underline{u} = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$, que pode ser calculada como:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \rightarrow \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad (17)$$

O tensor taxa de deformação $\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u} + {}^t \underline{\nabla} \underline{u})$ é dado por:

$$\underline{\underline{d}} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (18)$$

A tensão vertical de uma partícula localizada em x_3 corresponde ao peso das partículas assentadas sobre ela e pode ser calculado independentemente do comportamento constitutivo. Matematicamente, isso é colocado como:

$$\sigma_v(x_3, t) = - \int_{x_3}^{H(t)} \rho(\eta, t) g d\eta \quad (19)$$

A taxa de tensão vertical pode ser calculada a partir da expressão anterior, combinando (2) e (13), resultando em:

$$\dot{\sigma}_v(x_3, t) = -\dot{M}_d(t) g \quad (20)$$

2.3 Comportamento constitutivo

A bacia sedimentar é modelada como um material elasto-plástico-viscoplástico sob grandes deformações. A anisotropia induzida pela compactação nas propriedades mecânicas do sedimento é desconsiderada. Durante a transformação geométrica, as deformações reversíveis permanecem infinitesimais. Grandes deformações produzidas pela compactação são de natureza irreversível.

A lei constitutiva do comportamento é apresentada na sua forma clássica:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}^{ir}) \quad (21)$$

Onde $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ é a taxa do tensor de tensões de Cauchy, $\underline{\underline{d}}^{ir}$ representa a componente irreversível da taxa de deformação, $\underline{\underline{C}}$ é o tensor dos módulos elásticos do esqueleto, expresso por:

$$\underline{\underline{C}} = (K - 2\mu/3) \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{1}} \quad (22)$$

Onde K e μ são os módulos de compressão e cisalhamento, respectivamente. $\underline{\underline{1}}$ e $\underline{\underline{1}}$ são os tensores identidade de segunda e quarta ordem.

Adicionalmente, a relação entre o traço da taxa de deformação irreversível e a componente irreversível do Jacobiano é dada por:

$$tr \underline{\underline{d}}^{ir} = \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} \quad (23)$$

2.4 Comportamento plástico

A taxa de deformação irreversível $\underline{\underline{d}}^{ir} = \underline{\underline{d}}^p + \underline{\underline{d}}^{vp}$ é aditivamente dividida em duas parcelas, as componentes plástica e viscoplástica, respectivamente.

A componente plástica do modelo constitutivo visa representar a compactação puramente mecânica resultante da acomodação do material sedimentar. A superfície plástica corresponde a um “cap model” descrito por um critério plástico na forma [13]:

$$f^p(\underline{\underline{\sigma}}, p_c) = -\frac{1}{3} I_1 + a \sqrt{J_2} - p_c = -\frac{1}{3} tr \underline{\underline{\sigma}} + a \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} - p_c \quad (24)$$

Onde p_c é a pressão de consolidação do solo que define o parâmetro de endurecimento do modelo plástico, I_1 é o primeiro invariante do tensor de tensão de Cauchy, J_2 é o segundo invariante do tensor desviador de tensão de Cauchy, a é um escalar positivo e constante que controla a

inclinação da parte dúctil da superfície de plastificação.

Uma regra de fluxo associada é adotada para a taxa de deformação plástica:

$$\underline{\underline{d}}^p = \dot{\chi} \frac{\partial f^p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (25)$$

Onde $\dot{\chi}$ é o multiplicador plástico não-negativo.

A fase sólida que constitui o esqueleto é considerada incompressível. Além disso, pode-se demonstrar que, sob a hipótese das deformações reversíveis infinitesimais $J \approx J_{ir}$, a porosidade Euleriana pode ser escrita na forma [6]:

$$\varphi(J_{ir}) = 1 - \frac{1 - \phi_0}{J_{ir}} \quad (26)$$

A lei de endurecimento plástico adotada, que descreve a evolução da pressão de consolidação p_c em função do adensamento irreversível do material, corresponde ao exposto originalmente por [8]. Em [2] é apresentada uma extensão dessa lei bem, no contexto da poro-visco-plasticidade, onde é considerado as contribuições mecânicas e químico-mecânica sobre o fechamento da porosidade:

$$p_c(\varphi) = \frac{P_{c0}}{\ln \phi_0} \ln \varphi \quad (27)$$

Essa lei de endurecimento previne o desenvolvimento de porosidades negativas sob altos níveis de tensão de compressão isotrópica, levando a pressão de consolidação a um valor infinito quando $J_{ir} \approx J \rightarrow 1 - \phi_0$ [9].

A taxa da lei de endurecimento plástico é dada por:

$$\dot{p}_c = \frac{(1 - \phi_0) p_c}{J_{ir} \varphi \ln \phi_0} \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} = -h_p(\varphi) \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} \quad (28)$$

Onde h_p é o módulo de endurecimento plástico.

2.5 Comportamento viscoplástico

A componente viscoplástica do modelo constitutivo visa representar a compactação químico-mecânica induzida pelo mecanismo pressão-solução intergranular (IPS). A superfície viscoplástica corresponde a um “cap model” descrito por um critério viscoplástico na forma:

$$f^{vp}(\underline{\underline{\sigma}}, p_{vp}) = -\frac{1}{3} I_1 + a \sqrt{J_2} - p_{vp} = -\frac{1}{3} \text{tr} \underline{\underline{\sigma}} + a \sqrt{\frac{1}{2} s : s} - p_{vp} \quad (29)$$

Onde p_{vp} é a pressão de consolidação do solo que define o parâmetro de endurecimento do modelo viscoplástico.

A taxa de deformação viscoplástica utilizada está baseada no princípio da teoria de Perzyna [14]:

$$\underline{\underline{d}}^{vp} = \frac{\langle f^{vp} \rangle}{\eta_{vp}} \frac{\partial g^{vp}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (30)$$

Onde $\langle \cdot \rangle$ corresponde a notação de Macaulay, η_{vp} é o coeficiente de viscosidade e g^{vp} é o potencial viscoplástico que define a direção da taxa de deformação viscoplástica.

A lei de endurecimento viscoplástica para p_{vp} foi formulada em [2] e decorre da ideia heurística de que a similaridade pode ser preservada entre o modelo plástico e o modelo viscoplástico:

$$p_{vp}(\varphi) = p_{vp0} \left(\frac{\ln \varphi}{\ln \phi_0} \right)^{m_{vp}} \quad (31)$$

Onde o expoente m_{vp} é uma constante material, que varia entre zero e a unidade, responsável por controlar a magnitude relativa das deformações viscoplásticas em relação às deformações plásticas.

$$\dot{p}_{vp} = \frac{m_{vp}(1-\phi_0)p_{vp}}{J_{ir}\phi \ln \phi} \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} = -h_{vp}(\phi) \frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} \quad (32)$$

Onde h_{vp} é o módulo de endurecimento viscoplástico.

Em toda a análise, e com o objetivo de reproduzir as observações em bacias sedimentares reais, assume-se a condição $p_{c0} < p_{vp0}$. Essa condição é necessária expressar que a camada plástica se situa acima da camada viscoplástica.

3 Formulação do problema

O objetivo dessa seção é descrever o princípio de resolução e formular soluções de referência para verificar os códigos numéricos. Para isso, é feita uma descrição do problema.

A evolução temporal da sedimentação e do processo de compactação é dividido em cinco fases consecutivas, distintas entre si pelos domínios de comportamento das partículas da bacia. A ocorrência de cada fase está condicionada às características mecânicas e temporais da análise.

As quatro primeiras fases estão referidas ao período de deposição sedimentar, enquanto a última está referida ao período não-deposicional:

- **Fase elástica:** essa fase marca o início do período de deposição do sedimento, quando todas as partículas assentadas se comportam de forma elástica. O domínio temporal compreende o intervalo $t \in [0, t]$ e o domínio espacial se estende por $x_3 \in [0, H(t)]$. Essa fase termina quando a partícula em $x_3 = 0$ atinge a condição $f^p = 0$ no tempo $t = T_0^e$. Nesse instante, o maciço tem a altura $H(T_0^e) = H^e$;
- **Fase elástica-plástica:** nessa fase, parte das partículas se comporta de forma elástica e o restante apresenta o comportamento elastoplástico. O domínio temporal compreende o intervalo $t \in [T_0^e, t]$. O comportamento elástico se desenvolve no domínio espacial $x_3 \in [H(t) - H^e, H(t)]$, e o comportamento elastoplástico se desenvolve no domínio espacial $x_3 \in [0, H(t) - H^e]$. Essa fase termina quando a partícula em $x_3 = 0$ atinge a condição $f^{vp} = 0$ no tempo $t = T_0^p$. Nesse instante, o maciço tem a altura $H(T_0^p) = H^p$;
- **Fase elástica-plástica-viscoplástica:** nessa fase, uma parte das partículas assentadas se comporta de forma elástica, outra parte se comporta de forma elastoplástica e o restante apresenta um comportamento elastoplástico-viscoplástico. O domínio temporal compreende o intervalo $t \in [T_0^p, t]$. O comportamento elástico se desenvolve no mesmo domínio espacial da fase precedente. O comportamento elastoplástico se desenvolve no domínio espacial $x_3 \in [H(t) - H^p, H(t) - H^e]$, e o comportamento elastoplástico-viscoplástico se desenvolve no domínio espacial $x_3 \in [0, H(t) - H^p]$. Essa fase termina quando a partícula em $x_3 = 0$ atinge $\underline{\underline{d}}^p = \underline{\underline{0}}$ ($\dot{\chi} = 0$) no tempo $t = T_0^{vp}$. Nesse instante, o maciço tem a altura $H(T_0^{vp}) = H^{vp}$;
- **Fase elástica-viscoplástica no período de deposição sedimentar:** nessa fase, em adição ao comportamento das partículas da fase precedente, uma parte desenvolve o comportamento elasto-viscoplástico. O domínio temporal compreende o intervalo $t \in [T_0^{vp}, t]$. Os comportamentos elástico e elastoplástico se desenvolvem nos mesmos

domínios espaciais da fase precedente. O comportamento elastoplástico-viscoplástico se desenvolve no domínio espacial $x_3 \in [H(t) - H^{vp}, H(t) - H^p]$, e o comportamento elasto-viscoplástico se desenvolve no domínio espacial $x_3 \in [0, H(t) - H^{vp}]$. Essa fase termina ao final do período de deposição sedimentar no tempo $t = T^s$. Nesse instante, o maciço tem a altura $H(T^s) = H^s$;

- **Fase elástica-viscoplástica no período pós deposição sedimentar:** essa fase marca o início do período não-deposicional da bacia. O domínio temporal compreende o intervalo $t \in [T^s, t]$. Os comportamentos elástico e elastoplástico não evoluem e, assim, apresentam os mesmos domínios espaciais da fase precedente. O comportamento elasto-viscoplástico se desenvolve no domínio espacial $x_3 \in [0, H(t) - H^p]$. Essa fase termina no tempo final de análise T^f . Nesse instante, o maciço tem a altura $H(T^f) = H^f$.

O sistema de equações diferenciais que descreve o comportamento da bacia sedimentar é composto pelo balanço de momentum (1), a relação entre o gradiente de velocidade e o gradiente da transformação (18), a relação entre a taxa de deformação irreversível e a componente irreversível do Jacobiano da transformação (23) e a lei constitutiva (21). Esse sistema relaciona os campos incógnitos Λ , J_{ir} , σ_h , σ_v e u_3 do problema. Ele corresponde a um sistema de equações diferenciais parciais, parabólico, não-linear e de primeira ordem.

3.1 Período de deposição sedimentar

No período de deposição sedimentar, o domínio material é variável devido ao acréscimo contínuo de partículas à bacia, isto é, trata-se de um sistema material aberto. Por essa razão, uma descrição Euleriana do movimento das partículas é utilizada.

Para a fase elástica, soluções analíticas são desenvolvidas. Para as outras fases, as soluções analíticas ou são muito complicadas, ou não existem. Assim, soluções numéricas foram desenvolvidas para os sistemas de equações diferenciais que descrevem o comportamento da bacia. Para isso, tem-se o seguinte desenvolvimento.

Devido ao caráter monotônico do carregamento de partículas ($\dot{M}_d \geq 0$), os campos que descrevem o problema podem ser colocados como funções da dilatação vertical. Como um exemplo, o campo de tensão pode ser reescrito como:

$$\underline{\underline{\sigma}}(x_3, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\Lambda(x_3, t)) \quad (33)$$

Para uma dada configuração da bacia, definida pela altura $H(t)$ (ou, de forma equivalente, para um determinado tempo t), os campos dependem unicamente da variável espacial $x_3 \in [0, H(t)]$, como o campo de tensão:

$$\underline{\underline{\sigma}}(\Lambda(x_3, t)) \xrightarrow{t \text{ fixo}} \underline{\underline{\sigma}}(\Lambda(x_3)) \quad (34)$$

Matematicamente, isso reduz o sistema de equações diferenciais parciais a um sistema de equações diferenciais ordinário em cada instante de tempo (um problema de valor de contorno em cada instante).

A solução em cada fase do problema é obtida de forma incremental, discretizando o domínio temporal em incrementos de tempo Δt e solucionando o sistema de equações diferenciais para cada configuração do maciço rochoso, definido pela altura $H(t)$. As condições de continuidade dos campos devem ser observadas nas fronteiras dos domínios em $x_3 = H(t) - H^e$, $x_3 = H(t) - H^p$ e $x_3 = H(t) - H^{vp}$.

Por fim, a altura da bacia é então atualizada para o próximo incremento Δt , através da discretização da equação (13):

$$\Delta H \approx \Delta t \left(\frac{\dot{M}_d(t)}{\rho_0} + u_3(H(t), t) \right) \quad (35)$$

O esquema incremental bem como a solução do sistema não-linear de equações diferenciais ordinário foram realizados com o software MAPLE. Uma técnica de diferenças finitas com extrapolação de Richardson é usada para resolver o problema de valor de contorno.

O problema é determinado em cada domínio de cada fase com a solução do sistema de equações diferenciais:

$$\frac{\partial \sigma_h}{\partial x_3} = \frac{F_h^\alpha(J_{ir})}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \quad (36)$$

$$\frac{\partial \sigma_v}{\partial x_3} = \frac{F_v^\alpha(J_{ir})}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} = \frac{\rho_0 g}{F_v^\alpha(J_{ir})} \quad (38)$$

$$\frac{\partial J_{ir}}{\partial x_3} = -G^\alpha(J_{ir}) \frac{J_{ir}}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_3} \quad (39)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{-\dot{M}_d g}{F_v^\alpha(J_{ir})} \quad (40)$$

Onde $F_h^\alpha(J_{ir})$, $F_v^\alpha(J_{ir})$ e $G^\alpha(J_{ir})$ são funções resultantes do equacionamento em cada domínio, $\alpha \in \{e, p, vp, v\}$ identifica os respectivos domínios de comportamento (elástico, elásto-plástico, elástoplástico-viscoplástico e elásto-viscoplástico, respectivamente).

A obtenção da equação (39), no domínio elasto-viscoplástico, está sujeita a uma simplificação necessária para a eliminação do termo $\dot{\Lambda}$. A validade desse procedimento será confirmada posteriormente, comparando a solução desenvolvida à resposta obtida pelo simulador de elementos finitos.

3.2 Período pós-deposição sedimentar

No período não-deposicional, o domínio material é constante pois não há o acréscimo de sedimentos ($\dot{M}_d = 0$), isto é, consiste em sistema material fechado. Por essa razão, uma descrição Lagrangiana é utilizada para o movimento das partículas. Para isso, a configuração da bacia ao final do período de deposição é tomada como referência, ou seja, $X_3 = x_3$ em $t = T^s$.

Nessa fase, a evolução da deformação ocorre unicamente nos domínios onde existe a taxa de deformação viscoplástica. Isso significa a deformação evoluirá apenas nos domínios elasto-plástico-viscoplástico e elasto-viscoplástico da fase precedente. Assim, esses dois domínios serão estudados de forma unificada.

A resposta da bacia na fase elástica-viscoplástica no período não-deposicional ocorre em $T^s \leq t \leq T^f$. Na configuração de referência, o domínio elástico tem o intervalo material $X_3 \in [H^s - H^e, H^s]$, enquanto o domínio elástoplástico tem o intervalo material $X_3 \in [H^s - H^p, H^s - H^e]$. As alturas dessas duas camadas permanecem constantes no tempo. O domínio elasto-viscoplástico tem o intervalo material $X_3 \in [0, H^s - H^p]$ e a altura da camada decresce com a evolução da deformação viscoplástica em função do tempo.

Nesse período, a taxa de sedimentos é nula ($\dot{M}_d = 0$). Isso implica que a taxa de tensão vertical é zero (ver equação (20)):

$$\dot{\sigma}_v = 0 \quad (41)$$

Essa equação possui a solução trivial, obtida por integração entre os tempos T^s e t , resultando em:

$$\sigma_v(x_3(X_3, t), t) = \sigma_v^{ps}(X_3) \quad (42)$$

Onde $\sigma_v^{ps}(X_3) = \sigma_v(x_3, T^s)$ corresponde ao perfil de tensão vertical da bacia ao término do período de deposição sedimentar, em $t = T^s$.

A taxa de deformação viscoplástica (30) aplicada à lei constitutiva (21), resulta em:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \left[\beta_h^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left(K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \frac{f^{vp}}{\eta} \right] (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2) + \left[\beta_v^e \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} + \left(K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \frac{f^{vp}}{\eta} \right] \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (43)$$

$$\text{Onde } \beta_h^e = K - 2/3 \mu \text{ e } \beta_v^e = K + 4/3 \mu$$

Igualando a taxa de tensão vertical da equação anterior à (41), tem-se:

$$\frac{f^{vp}}{\eta} = - \frac{\beta_v^e}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad (44)$$

Substituindo a expressão anterior na taxa de tensão horizontal e realizando a integração entre os tempos T^s e t , tem-se:

$$\sigma_h(x_3(X_3, t), t) = \sigma_h^{ps}(X_3) + \left[\beta_h^e - \beta_v^e \left(K - \frac{\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \right] \left/ \left(K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a \right) \right. \ln \frac{\Lambda(X_3, t)}{\Lambda^{ps}(X_3)} \quad (45)$$

Onde $\Lambda^{ps}(X_3) = \Lambda(x_3, T^s)$ corresponde ao perfil de dilatação vertical e $\sigma_h^{ps}(X_3) = \sigma_h(x_3, T^s)$ corresponde ao perfil de tensão horizontal da bacia, ambos relativos ao término do período de deposição sedimentar, em $t = T^s$.

A expressão (34) pode ser reescrita, utilizando (23), resultando em:

$$\frac{\dot{J}_{ir}}{J_{ir}} = \frac{\beta_v^e}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a} \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \quad (46)$$

Integrando a equação anterior entre os tempos T^s e t , tem-se a expressão da componente irreversível do Jacobiano:

$$J_{ir}(X_3, t) = J_{ir}^{ps}(X_3) \left(\frac{\Lambda(X_3, t)}{\Lambda^{ps}(X_3)} \right)^{\frac{\beta_v^e}{K + \frac{2\sqrt{3}}{3} \mu a}} \quad (47)$$

Onde $J_{ir}^{ps}(X_3) = J_{ir}(x_3, T^s)$ corresponde ao perfil da componente irreversível do Jacobiano ao término do período de deposição sedimentar, em $t = T^s$.

A solução da equação (44) fornece o alongamento vertical $\Lambda(X_3, t)$. A solução analítica dessa equação ou é muito complicada ou não existe. Assim, ela é integrada numericamente, utilizando as expressões anteriores. Isso é realizado utilizando-se o software Maple, com uma rotina que utiliza o método das diferenças finitas centrais em um esquema implícito.

A definição do gradiente de transformação geométrica fornece a relação elementar:

$$\frac{\partial \xi_3(X_3, t)}{\partial X_3} = \Lambda(X_3, t) - 1 \quad (48)$$

Onde ξ_3 é a componente e_3 do vetor deslocamento $\underline{\xi}$.

A lei de compactação gravitacional é obtida pela integração numérica da expressão anterior. A análise desse período encerra ao tempo final T^f .

4 Comparação com a predição obtida por modelagem de elementos finitos

Para o processo de verificação, os modelos descritos na seção 2 foram implementados em um simulador numérico de bacias sedimentares. A análise a seguir não tem como objetivo a simulação de uma bacia sedimentar real, mas sim a utilização de dados que ressaltam todas as características dos modelos adotados, o que está de acordo com a essência do processo de verificação.

As soluções formuladas são comparadas às respostas numéricas do simulador desenvolvido e apresentado por [2] e posteriormente estendido em [15]. Esse simulador consiste em um modelo numérico tridimensional com deformações mecânicas e químico-mecânicas com consideração dos efeitos térmicos. A bacia sedimentar é modelada como um meio poroso saturado com comportamento termo-poromecânico em grandes deformações. Um dos destaques do modelo diz respeito a evolução das propriedades elásticas do material sedimentar associado à elevação da temperatura e redução da porosidade.

O modelo computacional, que integra as componentes plástica e viscoplástica de deformação com a não linearidade geométrica, conta com uma interface de multiprocessamento em memória compartilhada baseada no método dos elementos finitos.

4.1 Análise proposta

A análise unidimensional refere-se a uma bacia sedimentar que se forma durante o período $t \in [0, T^s]$, que corresponde ao período de deposição dos sedimentos. A taxa de sedimentos é considerada constante, com valor $\dot{M}_d = 2.05 \times 10^{-9}$ kg/s por unidade de área (ou $\dot{M}_d = 65$ ton/km²/ano). Considera-se que o material assentado no topo da bacia possui as mesmas propriedades mecânicas durante todo o período de sedimentação. Adicionalmente, o total de sedimentos corresponde a uma coluna vertical com altura $H = 6000$ m, na ausência de compactação. A duração do período de sedimentação é dada por:

$$T^s = \rho_0 H / \dot{M}_d \quad (49)$$

Os dados utilizados na verificação são: massa específica inicial das partículas $\rho_0 = 646.8$ kg/m³, porosidade inicial $\phi_0 = 0.72$, módulo de Young $E = 10$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0.33$ e o escalar $a = 1.1545$. Pressão de consolidação plástica inicial $p_{c0} = 4$ MPa, pressão de consolidação viscoplástica inicial $p_{vp0} = 5$ MPa, coeficiente de viscosidade $\eta = 100$ MPa × Ma e expoente de da lei de endurecimento viscoplástica $m_{vp} = 0.8$. Os valores adotados para a taxa de deposição de massa \dot{M}_d e para a massa específica inicial ρ_0 correspondem a um aumento de 100m/My na camada de sedimentos na ausência da aceleração da gravidade. De acordo com (49), o período de deposição sedimentar é de $T^s = 60$ Ma. O tempo total de análise foi definido como $T^f = 2 \times T^s = 120$ Ma.

Para o modelo computacional apenas o módulo poromecânico do programa foi utilizado. Para modelar o sistema material aberto correspondente ao período de deposição sedimentar utiliza-se uma técnica baseada no algoritmo de ativação/desativação, desenvolvido e apresentado em [10], e implementada em trabalhos subsequentes ([16] e [17]).

A geometria inicial do sistema material é definida como um domínio prismático com altura

$H = 6000\text{m}$ e lados $Lx_{1,2} = 50\text{m}$ (Figura 2). A discretização espacial da coluna consiste em 120 elementos hexaédricos regularmente distribuídos, com lados medindo $L = 50\text{m}$. O número total de nós da malha é de 1448, correspondendo a um total de 5792 graus de liberdade, sendo 4344 graus de liberdade de deslocamentos e 1448 graus de liberdade de poropressão.

Para a análise drenada em questão, utiliza-se o artifício de um coeficiente de permeabilidade infinito para o meio poroso. (numericamente $k_0^f = 10^{20} \text{MPa}^{-1} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$). Em adição, a massa específica da água é fixada com um valor nulo, o que transforma o problema em uma análise sem a presença de água.

A discretização temporal foi feita com passos de tempos de $\Delta t = 0.01\text{My}$. Esse passo de tempo é menor que o tempo característico de relaxação do material $\Delta t_{ref}^{vp} = 0.089\text{My}$ ([7] e [18]).

O leito oceânico localizado no plano $x_3 = 0$ é considerado rígido. As condições de contorno mecânicas, apresentadas na Figura 2, são especificadas de acordo com a hipótese oedométrica.

$$x_3 = H(t) \text{ (superfície superior)}$$

$$\underline{T} = \underline{0}$$

$$x_3 = 0 \text{ (superfície inferior)}$$

$$\underline{\xi} \cdot \underline{e}_3 = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ e } x_1 = Lx_1$$

$$\underline{\xi} \cdot -\underline{e}_1 = \underline{\xi} \cdot \underline{e}_1 = 0$$

$$x_2 = 0 \text{ e } x_2 = Lx_2$$

$$\underline{\xi} \cdot -\underline{e}_2 = \underline{\xi} \cdot \underline{e}_2 = 0$$

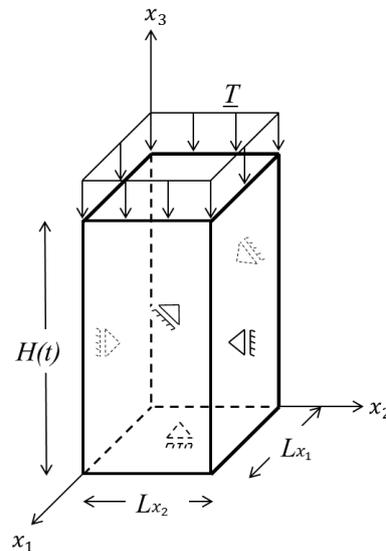


Figura 2. Condições de contorno mecânicas.

4.2 Resultados

Para fins de clareza na comparação entre os resultados das soluções desenvolvidas, os gráficos serão apresentados com linhas contínuas e pontos triangulares. As linhas contínuas, denominadas “benchmark”, dizem respeito às respostas semi-analíticas desenvolvidas, enquanto os pontos triangulares, denominados “FEM”, dizem respeito às respostas do simulador numérico de elementos finitos.

A primeira comparação consiste nos resultados da lei de compactação da bacia sedimentar.

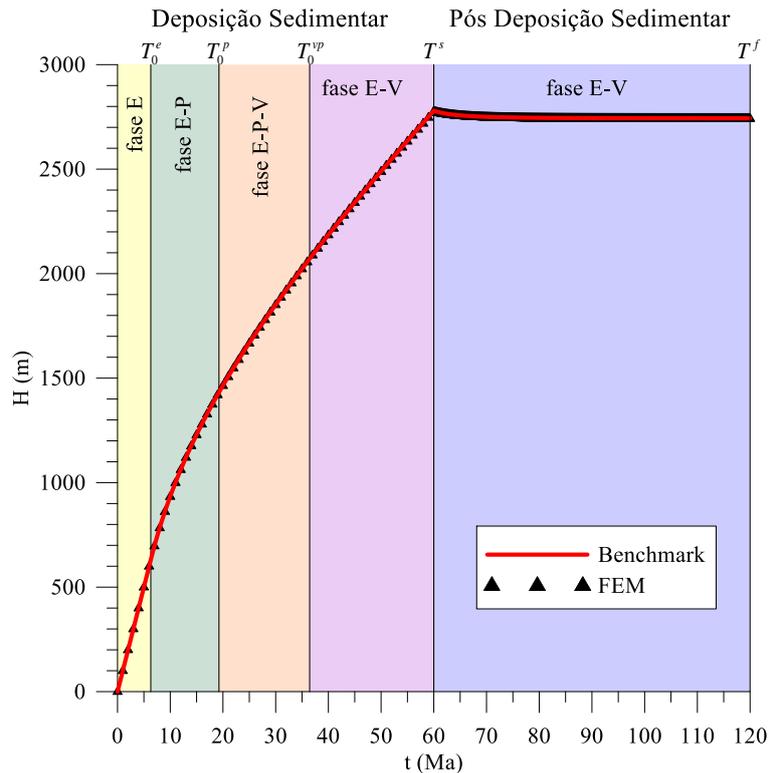


Figura 3. Lei de compactação da bacia.

Verifica-se uma boa convergência em todas as fases de comportamento da bacia. No instante $t = T^s = 60\text{Ma}$, a resposta benchmark apresenta uma altura $H^s = 2780.01\text{m}$, enquanto a resposta FEM apresenta a altura $H^s = 2775.76\text{m}$. No instante final de análise $t = T^f = 120\text{Ma}$, a resposta benchmark apresenta a altura $H^f = 2743.66\text{m}$, enquanto a resposta FEM apresenta a altura $H^f = 2741.84\text{m}$.

Análise Local

A seguir, as respostas obtidas para as partículas localizadas em $x_3 = 0$ são comparadas. Essas partículas correspondem àquelas depositadas diretamente no fundo do leito oceânico. Elas sofrem o maior grau de deformação ao longo da evolução da bacia sedimentar.

As Figura 4 e Figura 5 apresentam-se as evoluções da porosidade Euleriana e da massa específica. A Figura 6 e Figura 7 apresentam a evolução das tensões e dos Jacobianos. Na Figura 8 apresenta a evolução das pressões de consolidação plástica e viscoplástica.

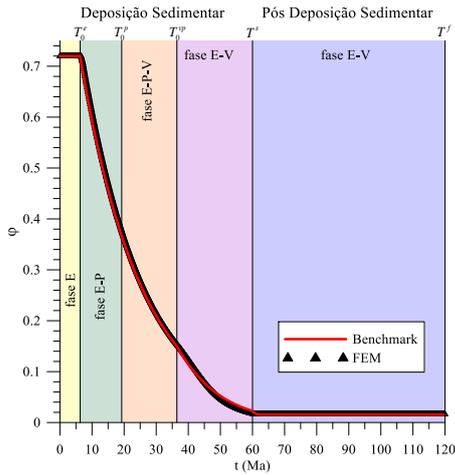


Figura 4. Evolução da porosidade.

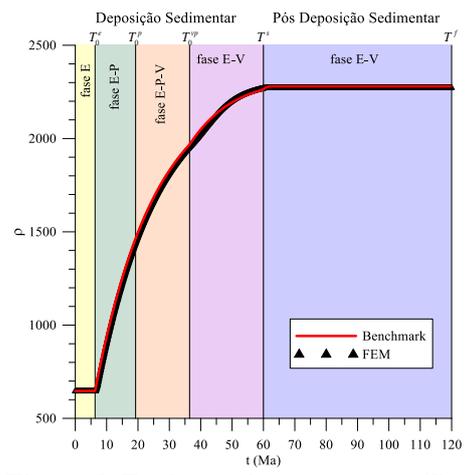


Figura 5. Evolução da massa específica.

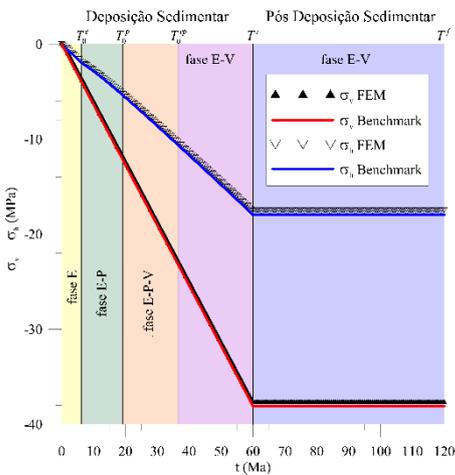


Figura 6. Evolução das tensões.

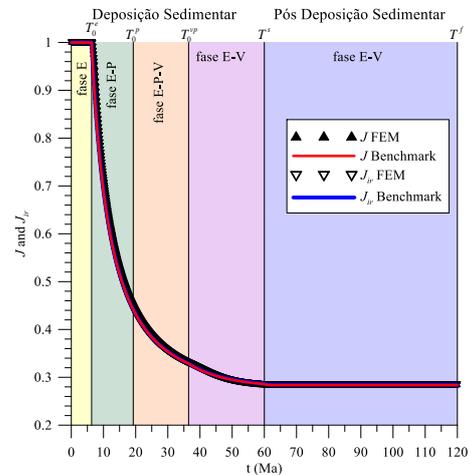


Figura 7. Evolução dos Jacobianos.

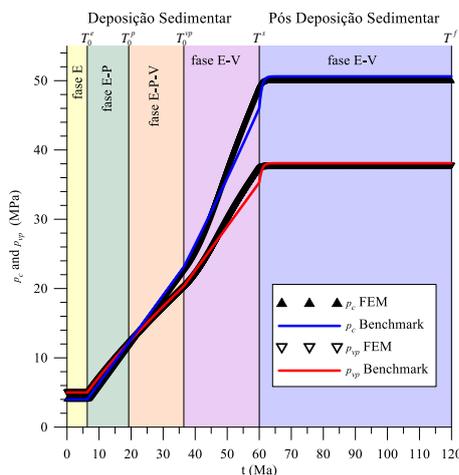


Figura 8. Evolução das pressões de consolidação.

Na Tabela 1, apresenta-se a comparação entre os resultados em $t = T^s = 60\text{Ma}$ e $t = T^f = 120\text{Ma}$.

Tabela 1. Resumo dos resultados

	t=60Ma		t=120Ma	
	Benchmark	FEM	Benchmark	FEM
φ	0.0228	0.0178	0.0157	0.0165
ρ (kg/m ³)	2262.97	2269.47	2279.47	2271.84
σ_h (MPa)	-17.9603	-17.4825	-17.954	-17.4812
σ_v (MPa)	-38.0961	-38.0914	-38.0961	-38.0914
J	0.2858	0.2842	0.2838	0.2839
J_{ir}	0.2865	0.285	0.2845	0.2847
p_c (MPa)	46.0537	49.1436	50.6229	49.9681
p_{vp} (MPa)	35.3129	37.1958	38.089	37.6942

Na Figura 8, verifica-se uma pequena diferença entre os resultados das pressões de consolidação plástica e viscoplástica na fase elasto-viscoplástica. Essa diferença existe pela mínima diferença existente entre as porosidades nessa fase, resultante da simplificação informada em 3.1.

Análise Global

A seguir é feita uma análise global da bacia sedimentar, comparando os perfis das respostas ao longo do processo de compactação gravitacional no final do período de deposição dos sedimentos e no final da análise, $t = T^s = 60\text{Ma}$ e $t = T^f = 120\text{Ma}$, respectivamente.

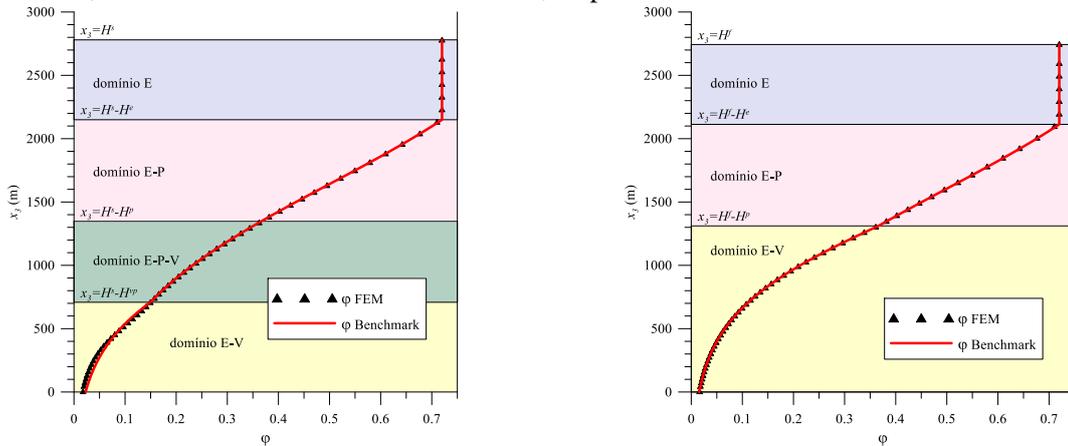


Figura 9. Perfis de porosidade em $t = T^s = 60\text{Ma}$ e $t = T^f = 120\text{Ma}$.

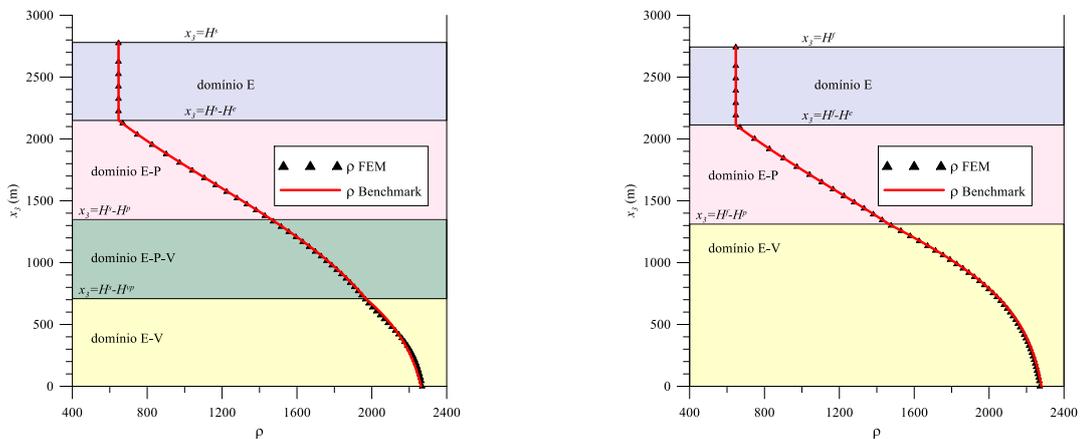


Figura 10. Perfis de massa em $t = T^s = 60\text{Ma}$ e $t = T^f = 120\text{Ma}$.

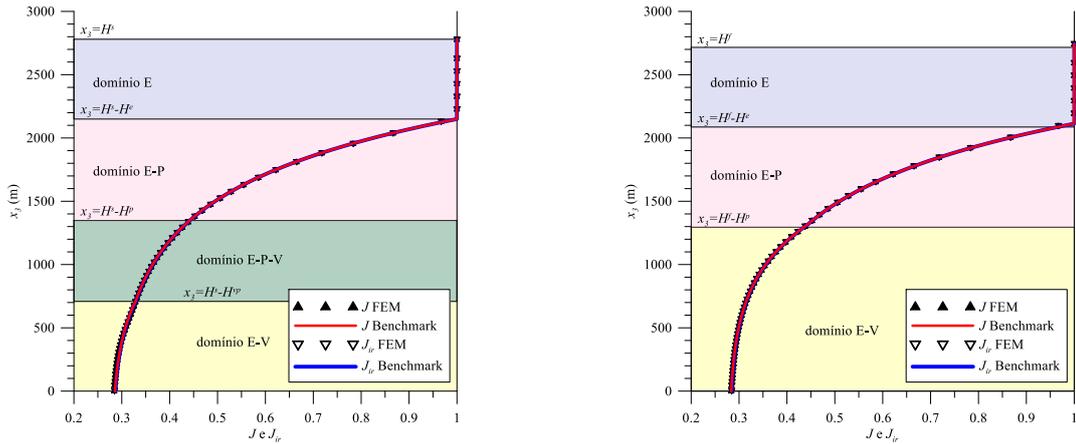


Figura 11. Perfis de Jacobianos em $t = T^s = 60\text{Ma}$ e $t = T^f = 120\text{Ma}$.

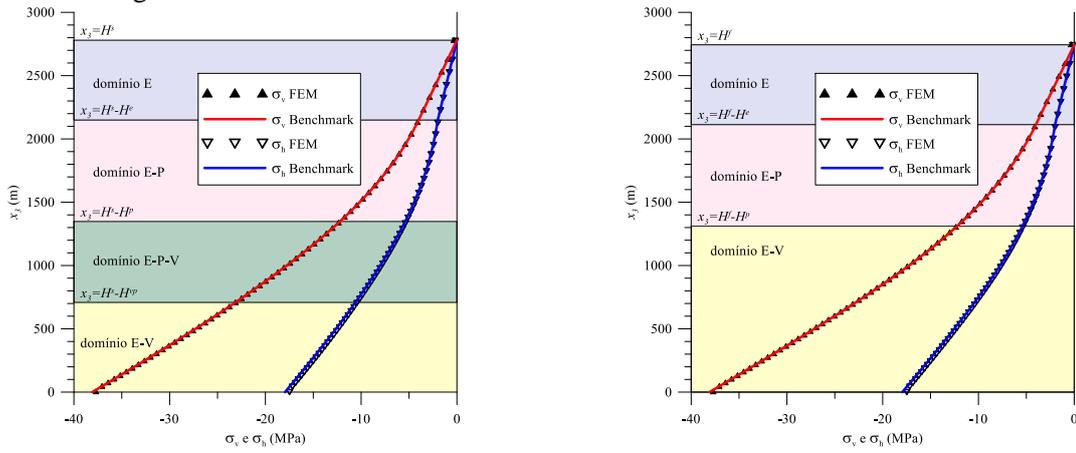


Figura 12. Perfis de tensões em $t = T^s = 60\text{Ma}$ e $t = T^f = 120\text{Ma}$.

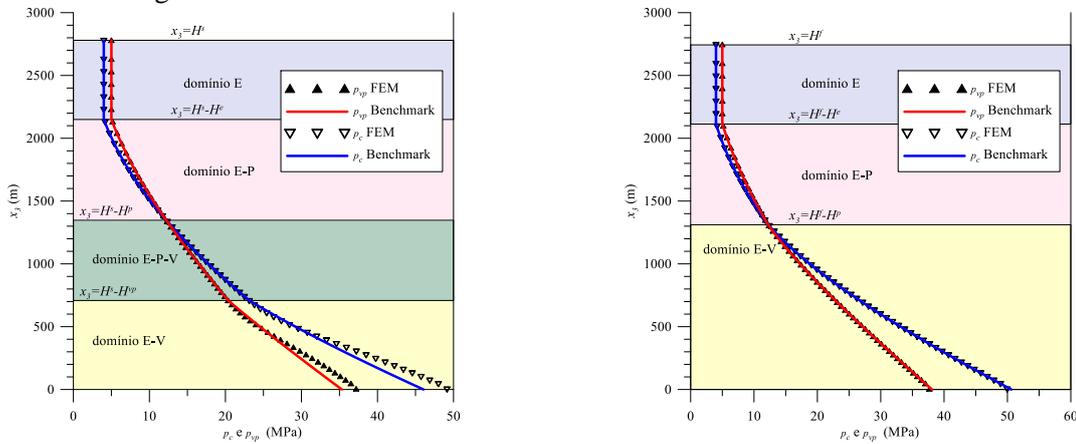


Figura 13. Perfis de pressões de consolidação em $t = T^s = 60\text{Ma}$ e $t = T^f = 120\text{Ma}$.

Na Figura 9, para o tempo de $t = T^s = 60\text{Ma}$, verifica-se uma pequena diferença entre os perfis de porosidade no domínio elasto-viscoplástico. Essa pequena diferença se torna mais evidente nos perfis de pressões de consolidação no mesmo instante de tempo (Figura 13), em função das leis de endurecimentos serem funções logarítmicas da porosidade. Essas diferenças são decorrentes da simplificação informada em 3.1.

5 Conclusões

O trabalho apresentou a formulação de soluções de referência para o processo de compactação em bacias sedimentares, visando a verificação de simuladores numéricos. A abordagem elasto-plástico-viscoplástica do problema foi apresentada, com o objetivo de simular as deformações irreversíveis instantâneas e diferidas nos períodos de deposição dos sedimentos e no período não-deposicional.

As comparações entre as soluções semi-analíticas desenvolvidas e as respostas do simulador numérico mostram boa convergência. Existem pequenas diferenças no domínio elasto-viscoplástico durante a fase elástico-viscoplástica, no período de deposição sedimentar, resultante da simplificação exposta no item 3.1.

A evolução das propriedades elásticas do material devido ao efeito de grandes deformações irreversíveis, desenvolvidas em [6], foi desconsiderada. Este tema faz parte do desenvolvimento futuro desta pesquisa, bem como a influência do campo de temperatura na evolução da bacia.

Referências

- [1] V. Schmidt e D. A. McDonald, "The role of secondary porosity in the course of sandstone diagenesis," *Aspects of Diagenesis*, vol. 26, pp. 175-207, 1979.
- [2] A. R. Brüch, "Simulação numérica tridimensional de processos de deformação em bacias sedimentares," *Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre*, p. 269, 2016.
- [3] E. Bourgeois, P. d. Buhau e L. Dormieux, "Formulation d'une loi élastoplastique pour un milieu poreux saturé en transformation finie," *Comptes rendus de l'Académie des sci-ences. Série II: Mécanique, physique, chimie, astronomie*, 1995.
- [4] E. Bourgeois e L. Dormieux, "Prise en compte des non-linéarités géométriques dans la modélisation de la compaction des sédiments," *Oil & Gas Science and Technology - Revue de l'Institut Français du Pétrole*, 1997.
- [5] L. Dormieux e S. Maghous, "Poroelasticity and poroplasticity at large strains," *Oil & Gas Science and Technology*, vol. 54, pp. 773-784, 1999.
- [6] L. Dormieux e S. Maghous, "Evolution of elastic properties in finite poroplasticity," *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences*, vol. 328(IIb), pp. 593-600, 2000.
- [7] D. Bernaud, V. Deudé, L. Dormieux, S. Maghous e D. Schmitt, "Evolution of elastic properties in finite poroplasticity and finite element analysis," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 26, pp. 845-871, 2002.
- [8] J.-F. Barthélémy, L. Dormieux e S. Maghous, "Micromechanical approach to the modelling of compaction at large strains," *Computers and Geotechnics*, vol. 30, pp. 321-338, 2003.
- [9] V. Deudé, L. Dormieux, S. Maghous, J. F. Barthélémy e D. Bernaud, "Compaction process in sedimentary basins: the role of stiffness increase and hardening induced by large plastic strains," *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, p. 1279-1303, March 2004.
- [10] D. Bernaud, L. Dormieux e S. Maghous, "A constitutive and numerical model for mechanical compaction in sedimentary basins," *Computers and Geotechnics*, 2006.
- [11] W. L. Oberkampf e C. J. Roy, *Verification and validation in scientific computing*, Cambridge University Press, 2010.
- [12] D. W. Houseknecht, "Assessing the relative importance of compaction processes and cementation to reduction of porosity in sandstones.," *Am Assoc Petroleum Geologist Bull*, vol. 77, p. pp. 633-642, 1987.
- [13] P. A. Charlez e C. Fairhurst, *Rock mechanics*, vol. 2, Paris : Editions Technip, 1997.
- [14] P. Perzyna, "Fundamental problems in viscoplasticity," *Adv. Appl. Mech.*, vol. 9, p. 243-277, 1966.

- [15] A. Brüch, S. Maghous, F. L. B. Ribeiro e L. Dormieux, “A thermo-poro-mechanical constitutive and numerical model for deformation in sedimentary basins,” *J. Pet. Sci.*, p. 313–326, 2018.
- [16] S. Maghous, A. Brüch, D. Bernaud, L. Dormieux e A. L. Braun, “Two-dimensional finite element analysis of gravitational and lateral-driven deformation in sedimentary basins,” *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, vol. 38, p. 725–746, 2014.
- [17] A. Brüch, S. Maghous, F. L. B. Ribeiro e L. Dormieux, “A constitutive model for mechanical and chemo-mechanical compaction in sedimentary basins and finite element analysis,” *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, vol. 40, p. 2238–2270, 2016.
- [18] J. C. Simo e T. J. R. Hughes, *Computational Inelasticity*, New York.: Springer-Verlag, 1998.