

## **CÁLCULO DE CONTRA FLECHAS INCLUINDO DEFORMAÇÕES POR FLUÊNCIA DURANTE A FASE CONSTRUTIVA DE ESTRUTURAS EM BALANÇOS SUCESSIVOS**

**Mariella Falcão de Lima Oliveira Santos**

*mariella.santos@ufpe.br*

*LITPEG, Universidade Federal de Pernambuco, UFPE*

*Rua Acadêmico Hélio Ramos s/n, Cidade Universitária, Recife-PE, Brasil*

**Silvana Maria Bastos**

*smb@ufpe.br*

*LITPEG, Universidade Federal de Pernambuco, UFPE*

*Rua Acadêmico Hélio Ramos s/n, Cidade Universitária, Recife-PE, Brasil*

**Renato Siqueira Motta**

*renato.motta@ufpe.br*

*LITPEG, Universidade Federal de Pernambuco, UFPE*

*Rua Acadêmico Hélio Ramos s/n, Cidade Universitária, Recife-PE, Brasil*

**Resumo.** A análise de estruturas requer a avaliação das deformações e, em alguns casos, é necessário acompanhar essas deformadas durante a construção, como ocorre nas estruturas executadas em etapas construtivas. Na execução de pontes e marquises pelo Método dos Balanços Sucessivos, os segmentos são construídos a partir do anterior e uma nova geometria é definida a cada estágio, assim o comportamento da estrutura anteriormente executada precisa ser analisado devido à nova configuração deformada. O uso de contra flechas introduz deslocamentos corretivos de modo a compensar essas deformações. O cálculo dessas contra flechas consideram o ganho de resistência do concreto ao longo do tempo, mas negligenciam as deformações devido aos efeitos de fluência que são diferentes para cada segmento, pois o material possui diferentes idades durante a concretagem e aplicação de carga. É importante que esse tipo de análise seja incorporado a essas estruturas, pois as deformações modificam a cada estágio e o deslocamento acumulado total é diferente quando comparado a uma análise da estrutura com estágios construtivos, mas sem os efeitos da fluência. O presente trabalho consiste na determinação dos valores de contra flecha a serem aplicados em uma estrutura, em balanço sucessivo, incluindo as tensões provenientes da fluência. Um código em elementos finitos foi desenvolvido para o cálculo das deformações em vigas que passam por modificação no seu sistema estrutural ou carregamento ao longo da construção, considerando os efeitos da fluência. Com isso, a análise incremental em estruturas especiais é aplicada e seus efeitos em cada estágio são compreendidos. Exemplos em programas comerciais são apresentados para validação das rotinas propostas, de maneira a mostrar a importância das deformações por fluência no cálculo do projeto.

**Keywords:** Balanço Sucessivo; Contra Flecha; Análise Incremental.

## **1 Introdução**

Durante a elaboração de um projeto, além dos esforços seccionais para dimensionar a estrutura, as deformações necessitam ser verificadas. Em alguns casos, acompanhar as deformações ainda durante a fase de construção da obra é de suma importância para a vida útil da estrutura, pois a técnica construtiva utilizada pode ser um diferencial na elaboração do projeto, exigindo uma série de verificações adicionais. Isto ocorre no método construtivo do Balanço Sucessivo, em que os carregamentos que ocorrem durante a fase de construção precisam ser considerados e as deformações acompanhadas.

Na execução desse método, a estrutura é construída por meio de segmentos sucessivos. Cada novo segmento é executado a partir do anterior, de maneira que os carregamentos de construção sejam suportados pelos segmentos anteriormente executados. As deformações aumentam à medida que a obra prossegue e atingem valores significativos, necessitando de medidas corretivas ainda durante a fase construtiva. O diferencial nesta análise é a mudança de geometria a cada estágio construtivo e a diferença de idade da execução das peças.

O cálculo das deformações é realizado em estágios construtivos, pois o acúmulo das deformações devido à mudança da geometria resulta em valores de flechas diferentes em comparação com a estrutura executada em uma única etapa. A idade das peças repercute em uma rigidez diferente para cada segmento, principalmente, à medida que a estrutura avança, pois, os carregamentos também serão aplicados em idades diferentes nas peças e acarretará em coeficientes de fluência diferentes.

Como essas deformações atingem valores significativos, é necessário compensá-las com a aplicação de contra flechas para garantir que o perfil da ponte seja atingido ao final da execução. O valor da contra flecha deve ser igual à deformação total devido ao carregamento de peso próprio e cargas permanentes. (Menn [2]).

O presente trabalho consiste na determinação dos valores de contra flecha a serem aplicados em uma estrutura, em balanço sucessivo, incluindo a superposição das deformações imediatas e as tensões provenientes por fluência conforme apresentado por Bazant [17] e Ghali, Favre e Elbadry [1]. Um código em elementos finitos foi desenvolvido para o cálculo das deformações em vigas que passam por modificação no seu sistema estrutural ou carregamento ao longo da construção, considerando os efeitos da fluência. Com isso, a análise incremental em estruturas aperticadas é aplicada e seus efeitos em cada estágio são compreendidos. Exemplos em programas comerciais são apresentados para validação das rotinas propostas, de maneira a mostrar a importância das deformações por fluência no cálculo do projeto e compõe uma pesquisa sobre correção de contra flechas em pontes executadas pelo Método do Balanço Sucessivo.

## **2 Características da análise**

A técnica de execução pelo método do Balanço Sucessivo é utilizada para execução de pontes e marquises. Mathivat [7] define esse método em pontes, como: “A construção de pontes em balanços sucessivos consiste em um tabuleiro executado por uma sucessão de segmentos, onde cada trecho é influenciado pelo peso próprio do segmento, e em alguns casos, pelo peso da forma ou da carga de construção”.

Por esta razão, é possível compreender a necessidade da análise construtiva para este processo e as consequências dos erros ocorridos em alguma das etapas construtivas.

No caso das pontes, este tipo de estrutura é caracterizado como uma viga contínua, que durante sua execução possui o sistema de uma estrutura em balanço. A instabilidade na fase construtiva é uma característica desse tipo de obra, que é contornada através de balanços nas duas extremidades para que o mesmo peso seja aplicado para ambos os lados, de maneira a tornar a superestrutura viável (Fig. 1).

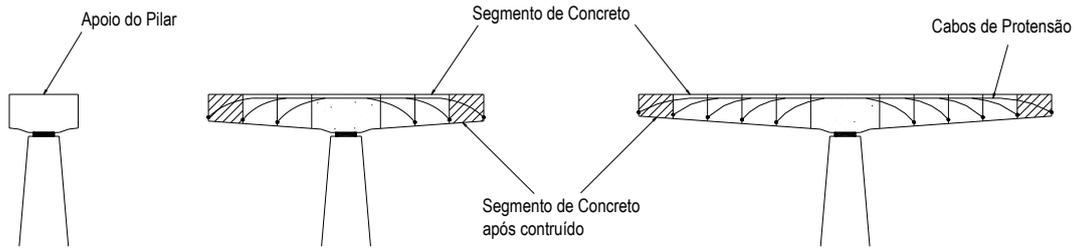


Figura 1. Sequência de construção de ponte em balanço sucessivo.

Porém um dos fatores mais importantes nesse tipo de obra é que as deformações que ocorram durante a execução não confirmam a estrutura uma geometria alinhada, ou seja, que ao final da execução da obra, um perfil seja apresentado correspondendo ao greide da pista, no caso de uma ponte, ou a inclinação da cobertura, para as marquises (Fig. 2).

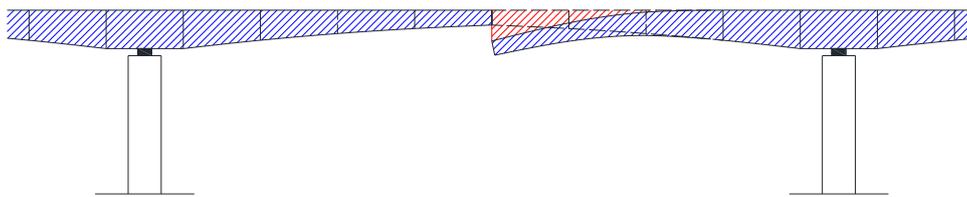


Figura 2. Execução final da estrutura (azul) e diferença de deformação em relação ao greide (vermelho).

Para que isso ocorra, uma compensação das deformações precisa ser imposta durante a construção, permitindo a obtenção da configuração prevista no projeto. Assim, é realizada a execução de contra flechas, que é o deslocamento vertical intencional aplicado à estrutura durante a montagem das formas no sentido contrário a flecha.

O cálculo desses valores da contra flecha é realizado através das deformações previstas para a estrutura. Por esta razão, é necessário analisar e determinar as deformações considerando os carregamentos permanentes e de construção, além dos fenômenos de fluência do concreto que muitas vezes são negligenciados.

## 2.1 Análise Incremental

A análise de uma estrutura é, normalmente, realizada com a aplicação de todos os carregamentos ocorrendo simultaneamente na estrutura. Entretanto, as estruturas são solicitadas à medida que a obra avança. Isto ocorre não somente nas obras executadas pelo método do Balanço Sucessivo, mas também na construção de edifícios de múltiplos pavimentos, conforme é apresentado por Gorza [9].

Os elementos anteriormente executados não produzem esforços e deformações imediatas nos novos segmentos. Porém a introdução desse novo segmento na estrutura e seus carregamentos repercute sobre uma estrutura que já sofreu solicitação e assim, os resultados são diferentes das análises com o carregamento aplicado simultaneamente na estrutura completa.

A análise da estrutura executada em uma única etapa resulta em deslocamentos incorretos, enquanto o procedimento incremental permite uma deformada real da estrutura, pois as deformações ocorridas são consideradas a cada etapa que os elementos estão sendo executados e assim, caracterizar de maneira correta a deformação final. Kripka [11] apresenta a relevância deste tipo de análise em edificações, pois as deformações residuais não consideradas na análise convencional proporcionam uma altura de topo da edificação maior do que na análise incremental já que as peças passam por um encurtamento dos pilares à medida que as deformações ocorrem em cada etapa.

Essa diferença existente entre os deslocamentos verticais dependendo de como a análise é

realizada, altera significativamente de acordo com a sequência construtiva e a aplicação dos carregamentos nas estruturas. Um exemplo pode ser visto na Fig. 3, em que uma viga com dois segmentos é executada em uma única etapa e comparada suas deformações com a execução em duas fases.

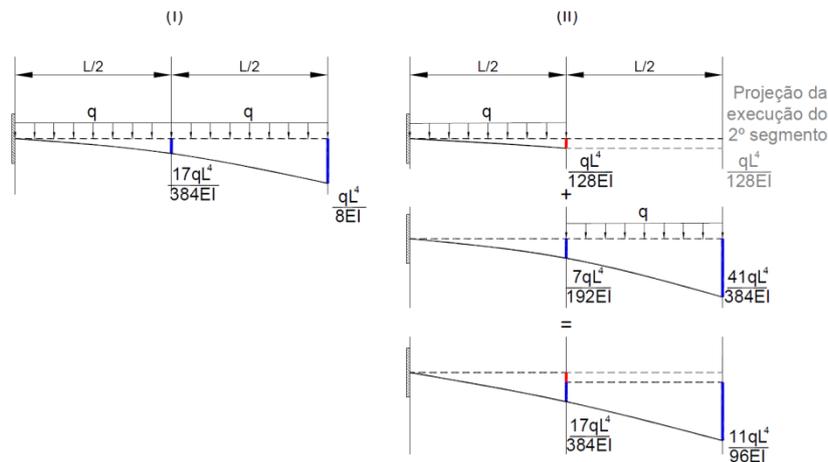


Figura 3. Deformação para o carregamento aplicado na estrutura completa (I) e deformação para geometria e carregamento em etapas de construção (II).

As vigas executadas em etapas construtivas influenciam nas deformações verticais do novo segmento que será executado, pois seu posicionamento em eixo reto depende diretamente da deformação ocorrida no segmento anterior. Demonstrando, assim, a importância da análise incremental.

## 2.2 Fluência do Concreto

A fluência é o aumento contínuo das deformações que ocorrem em uma peça devido a uma tensão aplicada constantemente (Araújo [6]). A presença da fluência nas peças de concreto acarreta no aumento das flechas, mesmo que não ocorra acréscimo de carga.

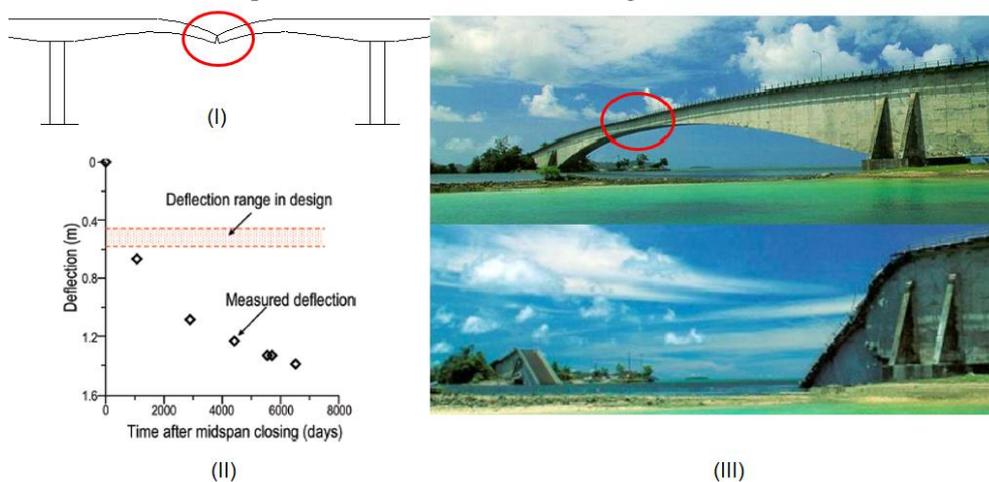


Figura 4. Deformação excessiva a meio vão devido a fluência (I); deformação prevista em projeto e medidas na Ponte de Palau durante a vida útil (II) e Ponte de Palau antes e após a ruptura (III). Fonte: Bazant, Wendner e Yu [19]

Em algumas estruturas é essencial a consideração da fluência, pois o aumento decorrente dessa tensão constante pode resultar em deformações extremamente elevadas nas estruturas ao longo do tempo. Além disso, os modelos matemáticos que representam este fenômeno precisam caracterizar

bem o problema.

Bazant, Hubler e Yu [18] apresentam estudos que alertam para a necessidade de aplicar a fluência nas análises, assim como, à utilização de modelos mais precisos. O caso mais conhecido é a Ponte de Palau, em que o fenômeno da fluência ocasionou em deformações excessivas que levaram a ruptura da estrutura 18 anos após sua execução (Fig. 4).

### 2.3 Contra Flecha

Nesse tipo de construção, as deformações são compensadas com a aplicação de contra flechas para garantir que o perfil da ponte seja atingido ao final da execução. O valor da contra flecha deve ser igual à deformação total devido ao carregamento de peso próprio e cargas permanentes (Menn [2]).

Segundo Podolny e Muller [15], o problema mais crítico da construção “in loco”, é o controle das deformações. Por isso, o acompanhamento e controle das deformações, durante a execução, devem ser rigorosos, para que o vão da ponte que será ligado posteriormente, não possua diferenças de nível ocasionando problemas na obra.

## 3 Métodos de Análise

### 3.1 Análise Incremental Construtiva

A Análise Incremental Construtiva é um processo sequencial direto, em que a cada etapa construtiva são analisadas as novas configurações da geometria e os novos carregamentos aplicados. A Fig. 5 mostra um exemplo do cálculo dos deslocamentos em uma viga em balanço pelo método da análise incremental construtiva.

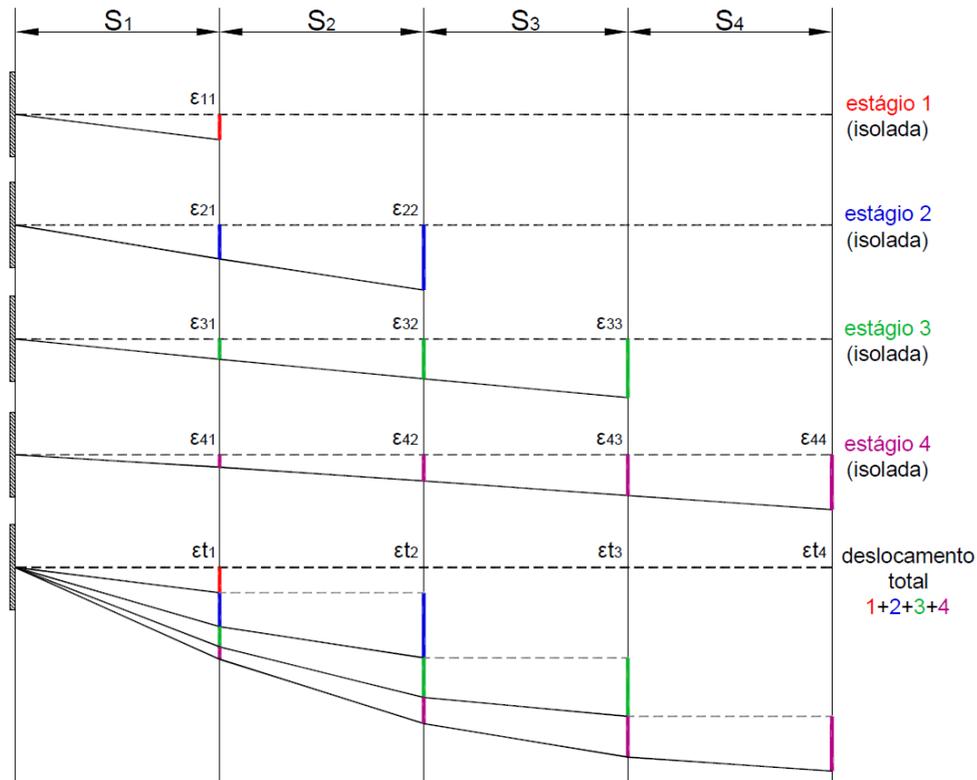


Figura 5. Deslocamentos de viga genérica com 4 segmentos executados em etapas

Considerando o número do estágio de construção da obra determinado por  $i$ , enquanto que  $j$  é o nó extremo do segmento de viga  $j$ . Cada deslocamento isolado do nó  $j$  devido à ação isolada das

cargas ocorrida no estágio  $i$  é definido por  $\varepsilon_{ij}$ . Utilizando os deslocamentos isolados é possível calcular os deslocamentos acumulados no nó  $j$ , no estágio de construção  $i$ , com a Eq. (1).

$$\varepsilon a_{ij} = \sum_{k=1}^i \varepsilon_{kj} \quad (1)$$

onde:  $\varepsilon a_{ij}$  é o deslocamento acumulado no nó  $j$ , até a execução do estágio  $i$ .

Através dos deslocamentos acumulados, é possível obter a matriz desses deslocamentos em cada nó  $j$  a cada estágio  $i$ , conforme apresentado abaixo.

$$\varepsilon a = \begin{bmatrix} \varepsilon a_{11} & - & \cdots & - \\ \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{22} & \cdots & - \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon a_{n1} & \varepsilon a_{n2} & \cdots & \varepsilon a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde:  $\varepsilon a$  é a matriz dos deslocamentos acumulados no nó  $j$ , em cada estágio de execução  $i$ ; e  $n$  é o número total de estágios de execução da obra. O deslocamento total, Fig. 5,  $\varepsilon t_j = \varepsilon a_{nj}$ , é o deslocamento final do nó  $j$ .

### 3.2 Fluência do Concreto

As deformações imediatas,  $\varepsilon_c(t_0)$ , ainda na fase elástica, são expressas pela Eq. (3):

$$\varepsilon_c(t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \quad (3)$$

onde:  $\sigma_c(t_0)$  é a tensão no concreto e  $E_c(t_0)$  é o módulo de elasticidade do concreto na idade  $t_0$ , em que ocorreu a aplicação da tensão.

Após a aplicação da tensão, as deformações aumentam com o tempo devido ao fenômeno de fluência. A deformação total corresponde a soma das deformações imediatas com as deformações por fluência, conforme a Fig. 6.

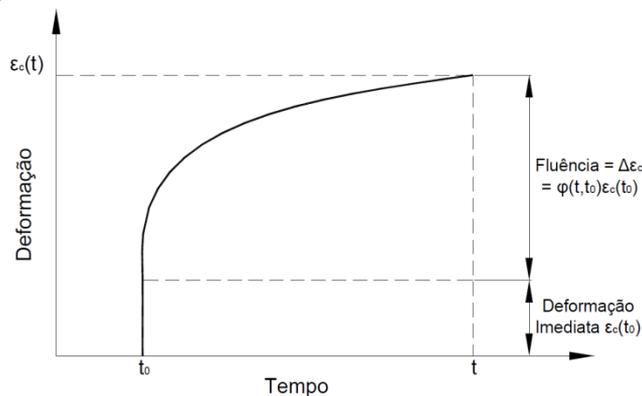


Figura 6. Fluência no concreto sob efeito de uma tensão constante

O coeficiente de fluência representa a razão entre a fluência e a deformação imediata, sendo calculado por modelos matemáticos que caracterizam o fenômeno e aplicado linearmente de acordo com a Fig. 6 e expresso no cálculo da deformação da Eq. (4). As normas apresentam modelos baseados em ensaios experimentais que permitem calcular esses coeficientes, como no caso do CEB-FIP [3].

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c(t_0) + \varphi(t, t_0) \varepsilon_c(t_0) = \varepsilon_c(t_0) \left[ 1 + \varphi(t, t_0) \right] = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \left[ 1 + \varphi(t, t_0) \right] \quad (4)$$

onde:  $\varphi(t, t_0)$  é o coeficiente de fluência que é função da idade de carregamento  $t_0$  e da idade  $t$  a qual a deformação será determinada.

Assim como ocorre na análise incremental, a deformação total envolvendo fluência é uma relação linear dos acréscimos de deformação devido aos incrementos de tensão que ocorram na peça, conforme apresentado por Ghali, Favre e Elbadry [1] e descrito abaixo:

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t_0) \frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \int_0^{\Delta\sigma_c(t)} \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E_c(\tau)} d\sigma_c(\tau) \quad (5)$$

onde:  $t_0$  e  $t$  são as idades do concreto em que a tensão inicial é aplicada e onde a deformação será considerada;  $\tau$  é uma idade intermediária entre  $t_0$  e  $t$ ;  $\sigma_c(t_0)$  é a tensão inicial aplicada na idade  $t_0$ ;  $d\sigma_c(\tau)$  é o incremento de tensão aplicado na idade  $\tau$ ;  $E_c(\tau)$  é o módulo de elasticidade do concreto na idade  $\tau$ ; e  $\varphi(t, t_0)$  é o coeficiente de fluência na idade  $t$  para um carregamento ocorrido na idade  $t_0$ .

É importante lembrar que o acréscimo de tensão corresponderia a introdução de um novo carregamento, por isso haverá uma deformação imediata e uma fluência ao longo do tempo. Desta forma, a deformação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t_0) \frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{\Delta\sigma_c(t)}{\bar{E}_c(t, t_0)} t \quad (6)$$

onde  $\Delta\sigma_c(t)$  é o incremento de tensão e  $\bar{E}_c(t, t_0)$  é o módulo de elasticidade ajustado apresentado por Bazant [16] e Ghali, Favre e Elbadry [1]. Isso acontece, pois, o incremento de tensão ocorre em uma nova idade, necessitando de ajuste no módulo de elasticidade devido ao ganho de resistência do material ao longo do tempo.

$$\bar{E}_c(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)} \quad (7)$$

De acordo com a Eq. (6), podemos dizer que um acréscimo de deformação no período  $(t-t_0)$  causado por um incremento de tensão de  $\Delta\sigma_c(t)$  é dado por:

$$\Delta\varepsilon_c(t) = \frac{\Delta\sigma_c(t)}{\bar{E}_c(t, t_0)} t \quad (8)$$

### 3.3 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico aproximado que consiste em dividir a peça estrutural em diversos elementos de dimensões menores com as mesmas propriedades do original.

#### *Abordagem pelo Método da Rigidez Direta*

Esse método consiste na aplicação de condições de equilíbrio (forças e momentos) ao Método dos Elementos Finitos, em que a discretização dos elementos tem como incógnitas principais do problema os deslocamentos e rotações nodais.

Segundo Martha [8], a ideia básica é determinar, dentro do conjunto de soluções deslocamentos que satisfazem as condições de compatibilidade, qual a solução que faz com que as condições de equilíbrio também sejam satisfeitas. A equação de compatibilidade é obtida com a expressão da deformação linear, visto na Eq. (9):

$$F = [K] \cdot u \quad (9)$$

onde: F é a força aplicada, K é a matriz de rigidez da barra e u é o deslocamento vertical.

Através dos valores de momento de engastamento perfeito é possível compor a matriz de rigidez de uma barra restrita em todos os graus de liberdade contido num plano, conforme apresentado na Eq. (10):

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (10)$$

### Superposição dos Efeitos e Matriz de Rigidez Global

Ainda segundo Martha [8], esse princípio prevê a superposição dos efeitos de deslocamentos provocados por vários sistemas de forças que atuando isoladamente corresponde ao mesmo deslocamento provocado pelos sistemas de forças atuando em conjunto. Como cada elemento de barra irá compor a estrutura completa, cada estágio possui uma matriz global composta pelas barras existentes nos estágios e a soma dos nós globais coincidentes das barras, em destaque na Eq. (11) para o caso de duas barras.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l_1^3} & \frac{6EI}{l_1^2} & -\frac{12EI}{l_1^3} & \frac{6EI}{l_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{l_1^2} & \frac{4EI}{l_1} & -\frac{6EI}{l_1^2} & \frac{2EI}{l_1} & 0 & 0 \\ \frac{12EI}{l_1^3} & \frac{6EI}{l_1^2} & -\frac{12EI}{l_1^3} & \frac{6EI}{l_1^2} & -\frac{12EI}{l_2^3} & \frac{6EI}{l_2^2} \\ -\frac{6EI}{l_1^2} & \frac{2EI}{l_1} & -\frac{6EI}{l_1^2} & \frac{4EI}{l_1} & -\frac{6EI}{l_2^2} & \frac{2EI}{l_2} \\ \frac{12EI}{l_1^3} & \frac{6EI}{l_1^2} & -\frac{12EI}{l_1^3} & \frac{6EI}{l_1^2} & -\frac{12EI}{l_2^3} & \frac{6EI}{l_2^2} \\ -\frac{6EI}{l_1^2} & \frac{2EI}{l_1} & -\frac{6EI}{l_1^2} & \frac{4EI}{l_1} & -\frac{6EI}{l_2^2} & \frac{2EI}{l_2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI}{l_2^3} & -\frac{6EI}{l_2^2} & \frac{12EI}{l_2^3} & -\frac{6EI}{l_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{l_2^2} & \frac{2EI}{l_2} & -\frac{6EI}{l_2^2} & \frac{4EI}{l_2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Porém, para utilizar esse princípio é necessário que a estrutura tenha um comportamento linear que está baseado em duas condições: o material trabalhe no regime elástico-linear e a hipótese de pequenos deslocamentos seja válida.

### 3.4 Cálculo de Contra Flecha

Como dito anteriormente, as contra flechas são aplicadas para atender o perfil final solicitado em projeto. Vários métodos de cálculo podem ser utilizados para determinar os valores das contra flechas a serem aplicados à estrutura. Para a utilização desses métodos, é necessário estimar as deformações previstas para estrutura ainda na fase de projeto.

Podolny e Muller [15] definem que o diagrama de contra flechas é formado pela soma dos valores de deformação das sucessivas aduelas executadas, ou seja, o rebatimento da curva de deformações total da estrutura é o valor de contra flecha a ser aplicado (Fig. 7).

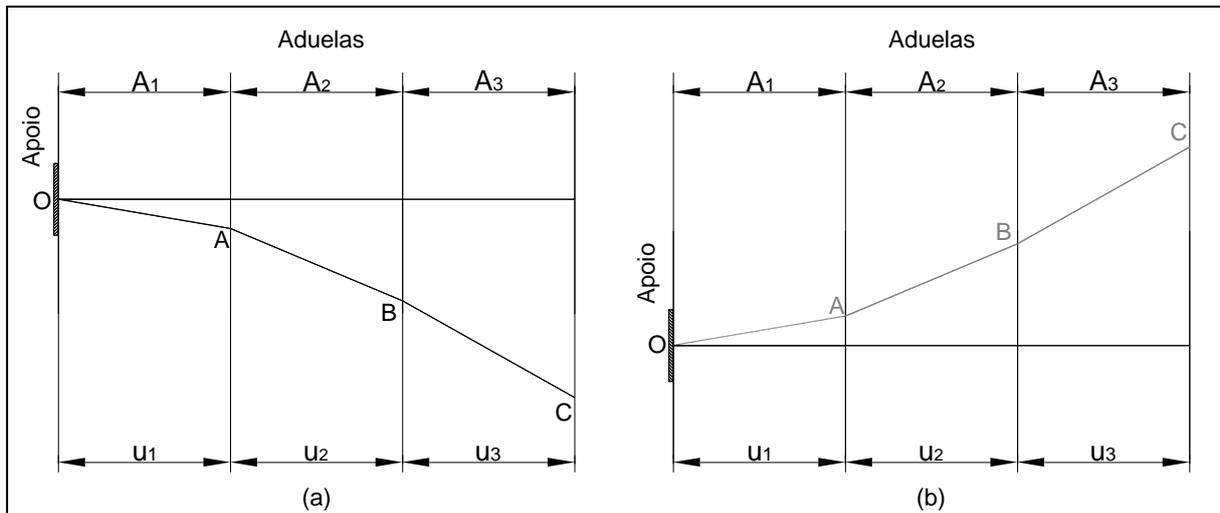


Figura 7. (a) Diagrama de deformações e (b) Diagrama de contra flechas. Fonte: Santos [10].

A utilização do diagrama de contra flechas depende da experiência do construtor, pois não existem coordenadas absolutas, já que o sistema muda a cada estágio de construção, o eixo da aduela executada modifica a cada etapa. Assim, é sugerido o uso de contra flechas relativas à aduela anteriormente executada. Por esta razão, é que se calcula o deslocamento ocorrido após cada estágio construtivo. O conceito de contra flecha relativa é demonstrado na Fig. 8. A contra flecha relativa aplicada ao ponto B, na execução da aduela A2 corresponde ao comprimento azul. A contra flecha relativa está posicionada sobre a projeção da aduela A1, delimitada pelo comprimento vermelho. A contra flecha absoluta é a soma desses dois comprimentos, azul e vermelho, e totaliza o somatório de todos os deslocamentos ocorridos no ponto B.

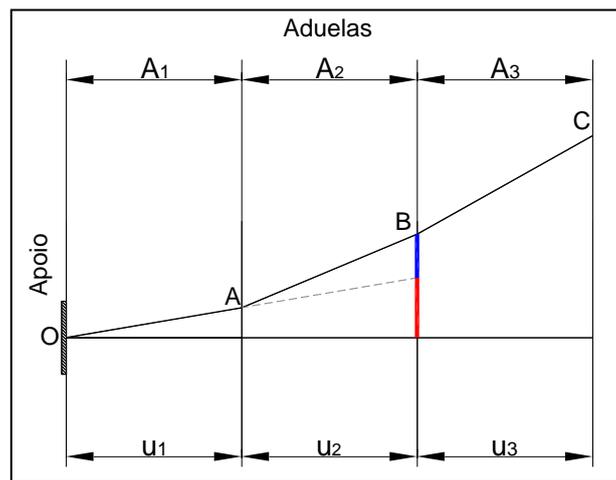


Figura 8. Esquema com contra flecha absoluta e relativa. Fonte: Santos [10].

Santos [10] apresenta uma adaptação da metodologia de cálculo apresentada por Paim [14]. Quando as aduelas ainda não foram executadas, os deslocamentos são obtidos pelo prolongamento tangencial da linha elástica em cada estágio, como pode ser visto na curva 2 do caso genérico apresentado na Fig. 9.

Considerando o conceito de contra flecha relativa para a execução de uma nova aduela, é necessário conhecer a posição do nó  $j$  a ser executado, de acordo com o prolongamento tangencial da posição da aduela anterior. Por isso, deve-se calcular a projeção da posição do nó  $j$  até a execução do estágio anterior. Assim, a posição das aduelas durante a execução de cada estágio é a curva do deslocamento acumulado incluindo a aplicação das contra flechas relativas. Na Fig. 9, é possível

determinar a projeção da posição do nó 3, após a execução da aduela 2 para uma viga genérica.

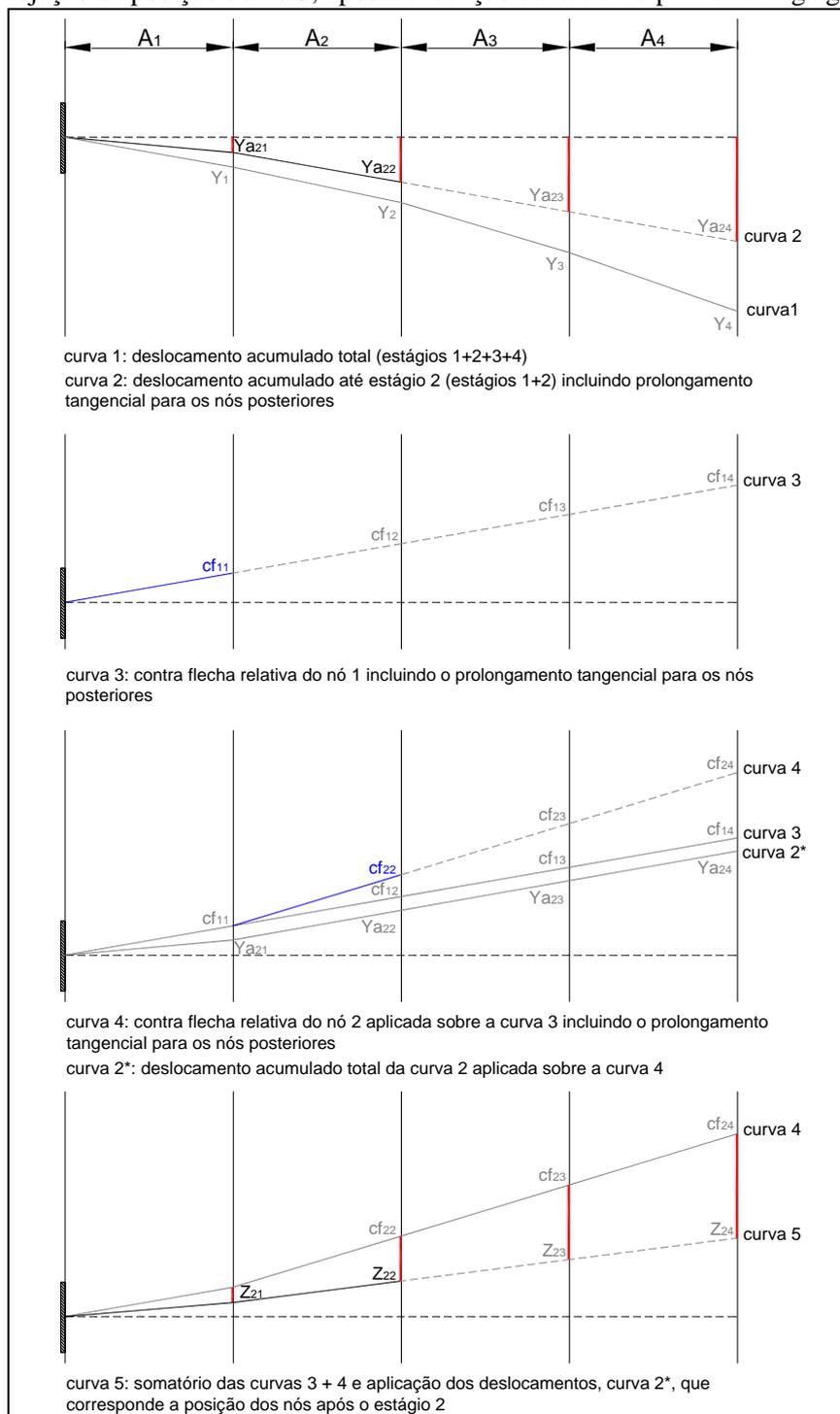


Figura 9. Viga com a projeção da posição do nó 3, após a execução da aduela 2. Fonte: Santos [10].

Conhecendo a posição do nó  $j$ , é possível determinar que a contra flecha relativa a ser aplicada neste nó na execução do estágio  $i$ , juntamente com os deslocamentos que ainda ocorrerão na estrutura para atender o perfil vertical de projeto. Assim, a contra flecha relativa a ser aplicada em um nó  $j$ , para a execução do estágio  $i$ , é definida por (12), e a projeção dos nós subsequentes é dado por (13):

$$\left( \begin{array}{c} \text{Contra flecha} \\ \text{do estágio } i \end{array} \right) = - \left[ \left( \begin{array}{c} \text{Prolongamento tangencial} \\ \text{das contra flechas relativas} \\ \text{até o estágio } (i-1) \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Deslocamento} \\ \text{acumulado total} \end{array} \right) \right]$$

$$cf_{ij} = - \left( \sum_{k=1}^{i-1} cf_{kj} + Y_j \right) \quad (12)$$

$$cf_{ij} = \frac{cf_{ii}}{u_i} \cdot \sum_{k=i}^j u_k \quad \text{se } j > i \quad (13)$$

onde:  $cf_{ij}$  é a contra flecha relativa no nó executado, no estágio de construção  $i$ ;  $\sum_{k=1}^{(i-1)} cf_{kj}$  é o prolongamento tangencial das contra flechas relativas até o estágio  $(i-1)$ ;  $Y_j$  é o deslocamento acumulado total;  $cf_{ii}$  é a contra flecha relativa no nó executado, no estágio de construção em que  $i=j$ ;  $u_i$  é o comprimento da aduela do nó executado;  $\sum_{k=i}^j u_k$  é o comprimento total referente à aduela executada até a aduela que se deseja saber o nó projetado.

#### 4 Programa Computacional Desenvolvido

Este estudo visa o desenvolvimento de uma ferramenta que permita calcular as contra flechas a serem aplicadas em estruturas executadas por Balanços Sucessivos. Para isso, a estrutura é discretizada em Elementos Finitos e submetida a uma Análise Incremental Construtiva, considerando o efeito de Fluência na estrutura.

Com o auxílio do programa MATLAB, um código foi criado de maneira a calcular os deslocamentos ocorridos para vigas engastadas, bi engastadas ou contínuas, sendo aplicável aos problemas práticos de engenharia executados por Balanços Sucessivos.

A validação de cada etapa do Programa foi realizada com o auxílio de ferramentas acessórias, os programas SAP2000 e Mathcad, através de modelos comparativos.

O funcionamento das etapas de cálculo é realizado conforme o fluxograma abaixo:

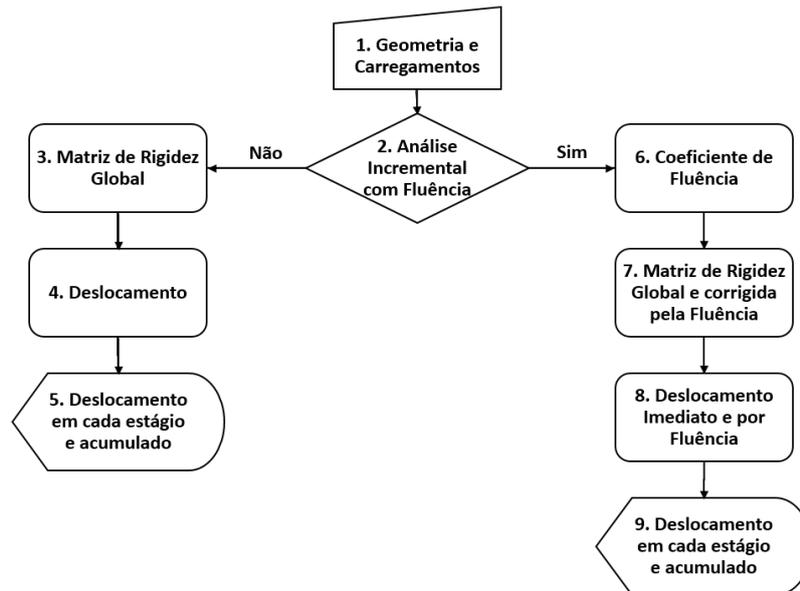


Figura 10. Fluxograma do Programa desenvolvido

##### 4.1 Análise Incremental Construtiva no Programa

Para este tipo de análise, é considerada que a estrutura executada em balanço sucessivo é uma sucessão de diferentes estruturas analisadas em sequência. Assim, no Programa, cada estágio construtivo é uma estrutura e a deformação total corresponderá ao somatório de todas as deformações a cada estágio, conforme já mostrado na Eq. (3). A análise independe do efeito de fluência que é

incorporado a estrutura através de uma análise linear e associada com a superposição dos efeitos. Atualmente, o código é aplicado apenas para material elástico-linear e não linearidade geométrica.

## 4.2 Fluência no Programa

O princípio da superposição é válido não só para as deformações imediatas, mas também para as deformações decorrentes da fluência. É preciso compreender a atuação desse fenômeno em cada estágio e a sua superposição a cada etapa. No exemplo da Fig. 11, podemos verificar as etapas de aplicação das cargas e deformações.

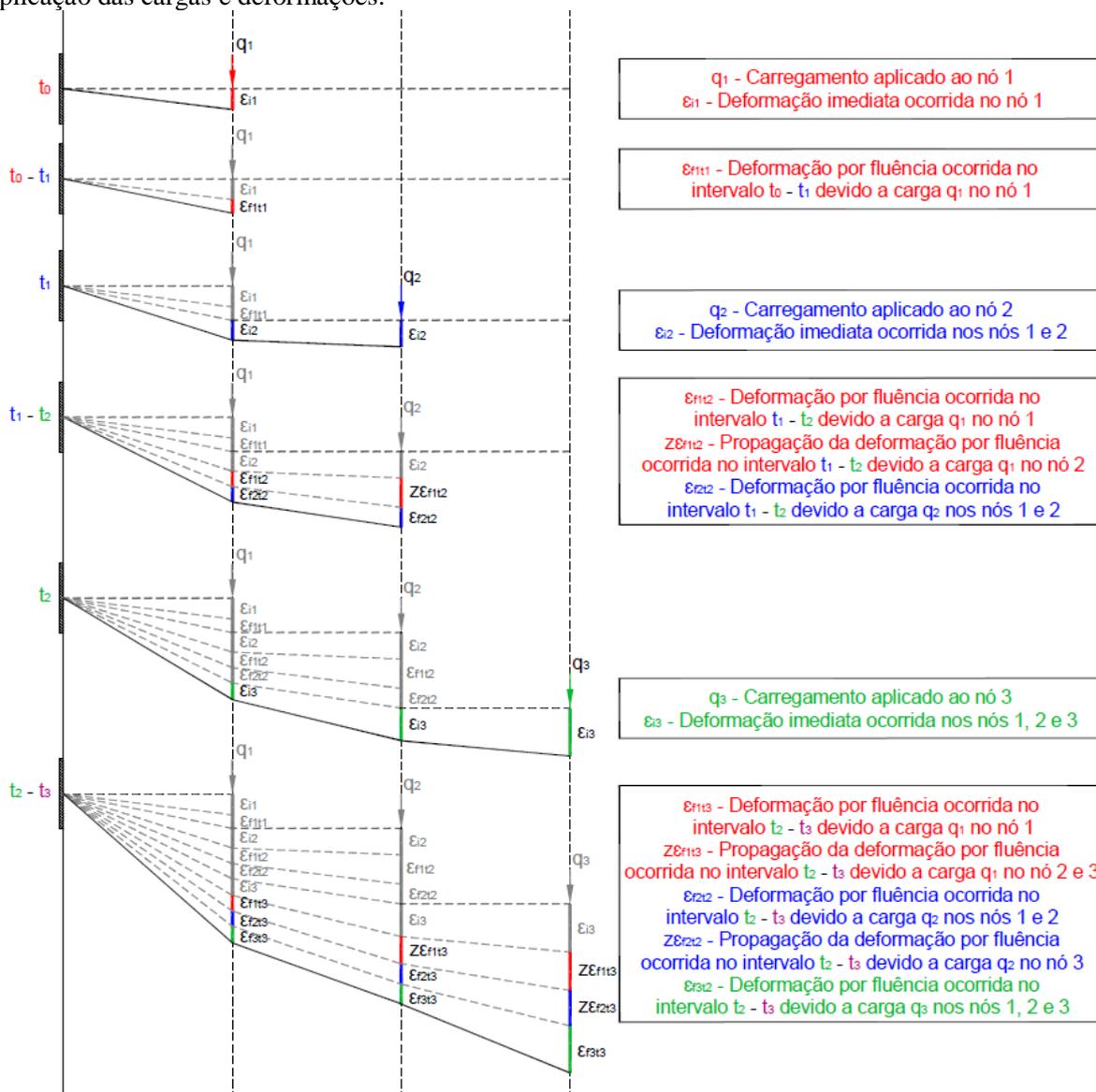


Figura 11. Deformações por estágio com Fluência

Em cada estágio será considerado um carregamento aplicado e uma deformação imediata ocorre. Esse carregamento também repercute em uma deformação por fluência ao longo da vida da estrutura. É possível ver que o carregamento  $q_1$  produz uma deformação por fluência nos estágios seguintes, entretanto ela só atua diretamente no nó 1, pois este era o único nó executado no momento de aplicação da carga. Para os nós posteriores essa deformação por fluência devido ao carregamento é a propagação da deformação ocorrida no nó 1. Isto é válido para todos os nós e a deformação total acumulada em um nó,  $\epsilon_{tj}$ , pode ser expressa conforme a Eq. (12):

$$\varepsilon t_j = \sum_{i=j}^n \varepsilon i_{ij} + \sum_{i=j}^n \sum_{k=1}^{j-1} z \varepsilon f_{kj} t_{ij} + \sum_{i=j}^n \varepsilon f_{ij} t_{ij} \quad (12)$$

onde  $j$  é o nó de interesse e o estágio em que o respectivo nó foi executado;  $\varepsilon i_{ij}$  é a deformação imediata no nó  $j$  no estágio  $i$ ;  $z \varepsilon f_{kj} t_{ij}$  é a projeção das deformações por fluência no nó  $j$  devido a fluência dos carregamentos dos nós anteriores;  $\varepsilon f_{ij} t_{ij}$  é a deformação por fluência no nó  $j$  devido a fluência dos carregamentos do próprio nó e dos nós posteriores.

Como cada barra é executada em um estágio diferente, serão definidos para cada elemento um coeficiente de fluência diferente para cada carregamento que foi aplicado. E desta maneira, as correções no módulo de elasticidade das barras são realizadas em cada estágio devido a cada carregamento, de acordo com a Eq. (7).

A deformação por fluência ocorrida durante um intervalo de tempo é proporcional a deformação imediata ocorrida sendo aplicado os coeficientes desse espaço temporal, conforme apresentado por Ghali, Favre e Elbadry [1]:

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon t_0 \cdot [\varphi t_2, t_0 - \varphi t_1, t_0] \quad (13)$$

onde  $\Delta \varepsilon$  é o acréscimo de deformação que ocorre no intervalo de tempo  $t_1$  até  $t_2$  que é proporcional a deformação  $\varepsilon(t_0)$  devido ao carregamento estático aplicado e  $\varphi(t_i, t_j)$  são os coeficientes de fluência para a idade  $t_i$  com carregamento aplicado na idade  $t_j$ .

Como o módulo de elasticidade é corrigido, isso repercute diretamente na matriz de rigidez para o devido intervalo de tempo como apresentado na Eq. (14).

$$[\bar{K}] = [K] \cdot \frac{1}{1 + \varphi t_2, t_1} \quad (14)$$

A equação de compatibilidade Eq. (9), pode ser aplicada para este acréscimo de força devido a tensão de fluência e apresentado abaixo:

$$\Delta F = [\bar{K}] \cdot \Delta \varepsilon \quad (15)$$

Com isso, aplicando as Eq. (13) e Eq. (14) na Eq. (15) podemos reescrever o acréscimo de força  $\Delta F$  ocorrido no intervalo de tempo entre  $t_1$  e  $t_2$ , da seguinte maneira:

$$\Delta F = \frac{[\varphi(t_2, t_0) - \varphi(t_1, t_0)]}{1 + \varphi(t_2, t_1)} \cdot F \quad (16)$$

Assim a fluência é representada de forma equivalente por uma modificação do vetor de forças.

### 4.3 Entrada e Saída de Dados

De acordo com a fundamentação teórica, o Programa foi desenvolvido utilizando um código no MATLAB de acordo com o fluxograma da Fig. 10. Os dados de entrada são informados com o preenchimento de um arquivo de extensão .xlsx como apresentado na Fig. 12. São informados: Geometria, Propriedades do Concreto, Condição de Contorno, Carregamentos, Etapas Construtivas.

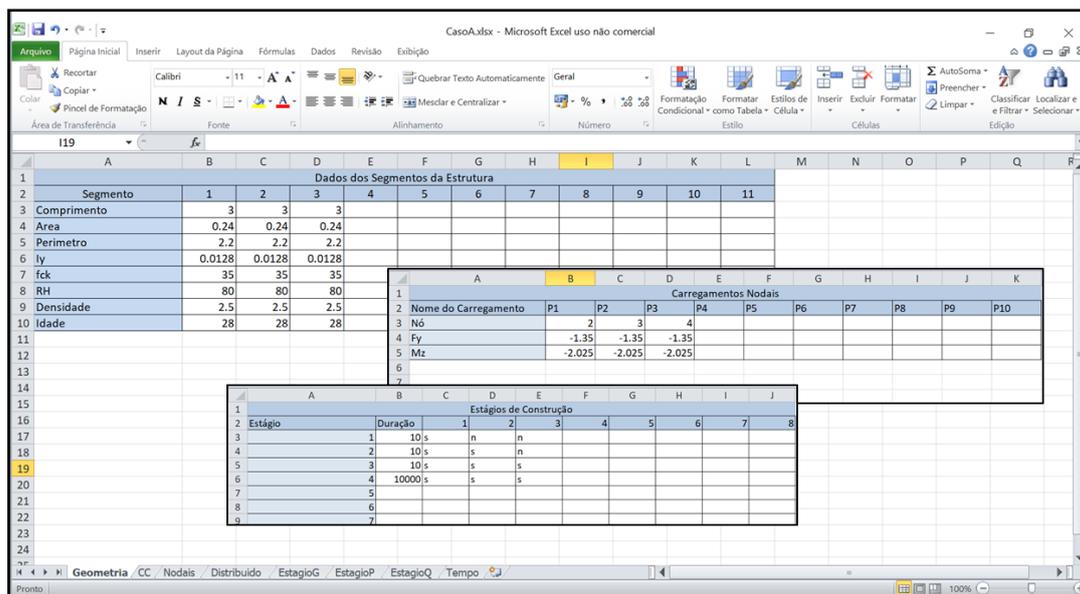


Figura 12. Entrada de dados em arquivo .xlsx para o Programa.

Os resultados apresentados são os deslocamentos e rotações acumulados em cada estágio, para a Análise Incremental com Fluência, conforme mostrado na Fig. 13.

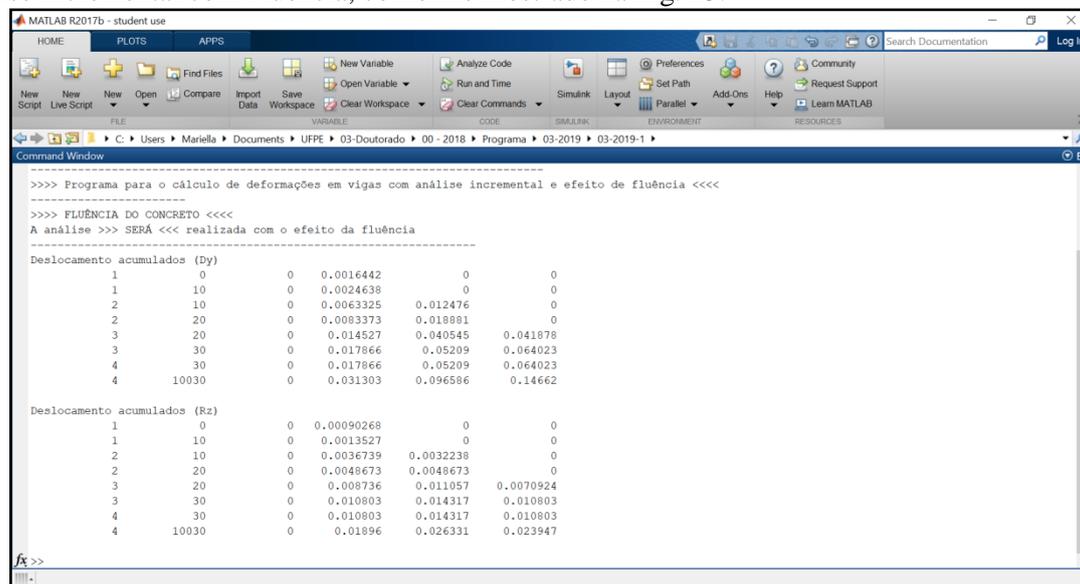


Figura 13. Saída de dados no Programa.

#### 4.4 Validação dos resultados obtidos pelo Programa

Para verificar a qualidade dos resultados fornecidos pelo programa, foram realizadas 10 análises para os modelos apresentados nas Fig. 14, 15 e 16 e comparados resultados obtidos pelo SAP2000, que apresentou bons resultados. Todos os elementos possuem idade de entrada na estrutura de 28 dias e os estágios duração de 10 dias com um último estágio de 10000 dias de duração, para representar os efeitos da fluência em uma idade superior a 25 anos. As características de cada uma das análises estão apresentadas na Tabela 1.

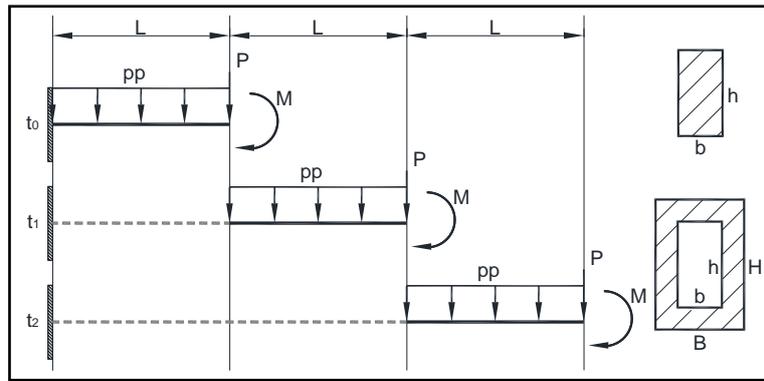


Figura 14. Modelo Genérico de viga engastada na validação da Fundamentação Teórica.

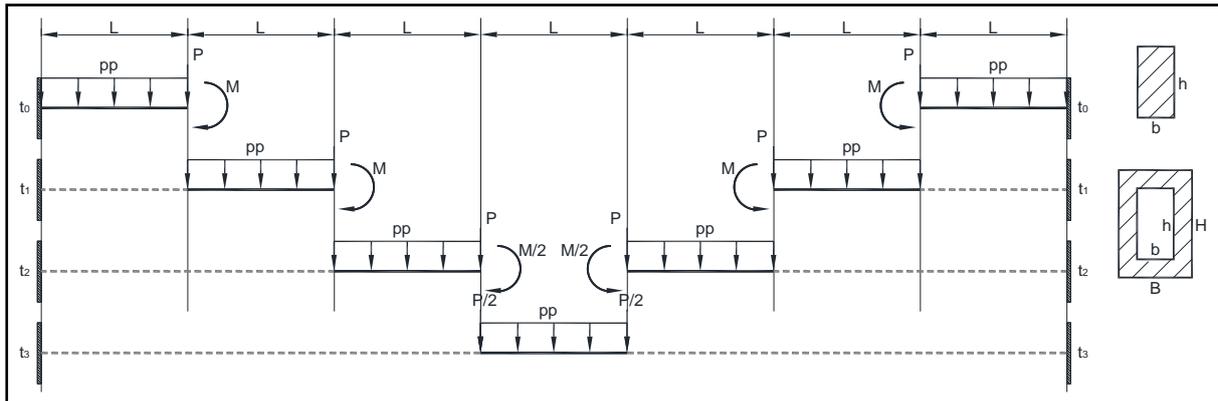


Figura 15. Modelo Genérico de viga biengastada para validação da Fundamentação Teórica.

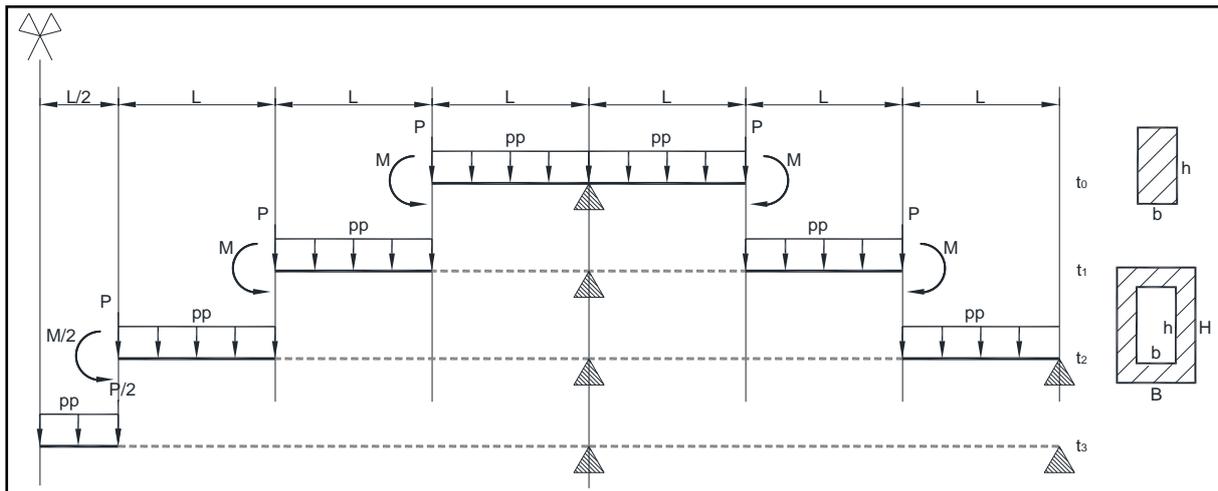


Figura 16. Modelo Genérico de viga contínua para validação da Fundamentação Teórica.

Tabela 1. Casos aplicados para validação da Fundamentação Teórica

Caso	Geometria	Carregamentos	Propriedades do Material	Modelo Estrutural
1	L=3m b=30cm h=60cm	pp=0.45tf/m P=1.35tf M=2.025tfm	fck=30Mpa u=0.20m RH=80%	Figura 14 (Engastada)
2	L=3m b=30cm h=60cm	pp=0.45tf/m P=1.35tf M=2.025tfm	fck=30Mpa u=0.20m RH=80%	Figura 14 (Engastada)
3	L=5m b=30cm h=60cm	pp=0.45tf/m P=2.25tf M=5.625tfm	fck=30Mpa u=0.20m RH=80%	Figura 14 (Engastada)
4	L=5m b=30cm h=60cm	pp=0.45tf/m P=2.25tf M=5.625tfm	fck=30Mpa u=0.20m RH=80%	Figura 14 (Engastada)
5	L=5m B=800 – b=600cm H=600 – h=200cm	pp=30tf/m P=150tf M=375tfm	fck=30Mpa u=1.09m RH=80%	Figura 14 (Engastada)
6	L=5m B=800 – b=600cm H=600 – h=200cm	pp=30tf/m P=150tf M=375tfm	fck=30Mpa u=1.09m RH=80%	Figura 14 (Engastada)
7	L=5m b=30cm h=60cm	pp=0.45tf/m P=2.25tf M=5.625tfm	fck=30Mpa u=0.20m RH=80%	Figura 15 (Biengastada)
8	L=5m B=800 – b=600cm H=600 – h=200cm	pp=30tf/m P=150tf M=375tfm	fck=30Mpa u=1.09m RH=80%	Figura 15 (Biengastada)
9	L=5m b=30cm h=60cm	pp=0.45tf/m P=2.25tf M=5.625tfm	fck=30Mpa u=0.20m RH=80%	Figura 16 (Contínua)
10	L=5m B=800 – b=600cm H=600 – h=200cm	pp=30tf/m P=150tf M=375tfm	fck=30Mpa u=1.09m RH=80%	Figura 16 (Contínua)

As cargas em azul são removidas no estágio seguinte ao estágio de entrada.

Além da validação do programa, foi realizada a comparação dos resultados para a execução em estágios sem e com Fluência.

#### Análise Incremental (AI) simples e com Fluência

Os Casos 6, 8 e 10 são apresentados na Fig. 17 comparando a execução final sem e com o efeito da Fluência. Nas duas análises por essa metodologia construtiva, as curvas de deformação possuem características muito semelhantes. Entretanto, o valor dessas deformações aumentam quando a estrutura está submetida ao fenômeno de fluência. Nos casos apresentados, o fenômeno de fluência implica em deformações da ordem de 40 a 50% maiores que as deformação com Análise Incremental (AI) simples.

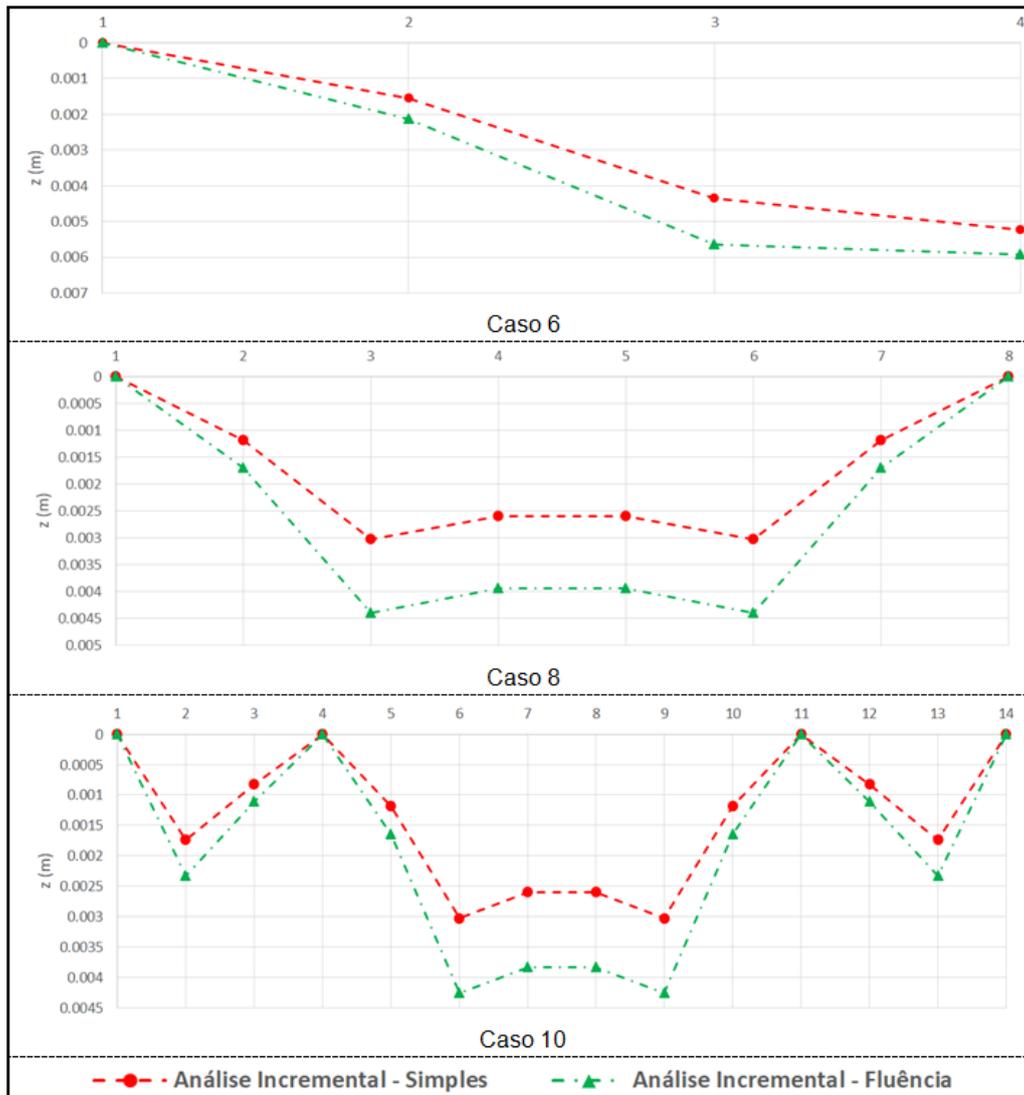


Figura 17. Curvas de deslocamentos para os Casos 6, 8 e 10, AI simples e com Fluência.

Com essa variação entre os resultados, os valores de contra flecha a serem aplicados na estrutura também serão diferentes. Um comparativo das contra flechas a serem aplicadas por análise incremental simples e com fluência, foi realizado, conforme mostram as Tabelas 2 e 3.

Tabela 2. Contra flecha de projeto com AI simples e com fluência para o Caso 6 (cm)

	Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4
AI – Simples	$cf_{11} = 0$	$cf_{22} = 0,0825$	$cf_{33} = 0,0748$	$cf_{44} = 0,0058$
AI – Fluência	$cf_{11} = 0$	$cf_{22} = 0,2141$	$cf_{33} = 0,2237$	$cf_{44} = 0,0457$
AI - Simples / AI – Fluência (%)	-	38.53	33.44	12.69

Tabela 3. Contra flecha de projeto com AI simples e com fluência para o Caso 8 (cm)

	Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4	Nó 5	Nó 6	Nó 7	Nó 8
AI – Simples	$cf_{11} = 0$	$cf_{22} = 0,1184$	$cf_{33} = 0,1313$	$cf_{44} = 0,0392$	$cf_{55} = 0,0392$	$cf_{66} = 0,1313$	$cf_{77} = 0,1184$	$cf_{88} = 0$
AI – Fluência	$cf_{11} = 0$	$cf_{22} = 0,2412$	$cf_{33} = 0,2440$	$cf_{44} = 0,0141$	$cf_{55} = 0,0141$	$cf_{66} = 0,2440$	$cf_{77} = 0,2412$	$cf_{88} = 0$
AI – Simples / AI – Fluência (%)	-	49,09	53,81	278,01	278,01	53,81	49,09	-

## 5 Estudo de Caso

Para obter os dados do levantamento de campo, os Casos foram simulados com  $f_{ck} = 36\text{MPa}$ , diferente do considerado originalmente em projeto, para representar uma condição de execução. Para o Caso 6, os resultados dos deslocamentos são mostrados na Tabela 4.

Tabela 4. Deslocamentos isolados da estrutura em cada estágio para o Caso 6 (cm)

Estágio	Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4
1	$y_{11} = 0$	$y_{12} = -0.0412$	-	-
2	$y_{21} = 0$	$y_{22} = -0.0646$	$y_{23} = -0.2244$	-
3	$y_{31} = 0$	$y_{32} = -0.0951$	$y_{33} = -0.3393$	$y_{33} = -0.6787$
4	$y_{41} = 0$	$y_{42} = -0.0058$	$y_{43} = -0.0527$	$y_{44} = -0.1540$

Mesmo com a aplicação das contra flechas, acontecerá uma deformação residual mostrado na Tabela 5, que corresponde à posição da aduela após o último estágio, além do percentual da deformação residual da Análise Incremental simples e com fluência.

Tabela 5. Deformações residuais para o Caso 6 (cm)

	Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4
AI – Simples	$Z_{51} = 0$	$Z_{52} = -0,1126$	$Z_{53} = -0,3536$	$Z_{54} = -0,6296$
AI – Fluência	$Z_{51} = 0$	$Z_{52} = 0,0190$	$Z_{53} = 0,0585$	$Z_{54} = 0,1029$
AI – Fluência / AI – Simples (%)	-	-0,17	-0,17	-0,16

Os percentuais negativos significam que os resíduos de deformação formam curvas de deformação em sentido contrário para as análises. Os valores da Análise Incremental com fluência estão na ordem de 0,17% da Análise Incremental simples.

Os resultados dos deslocamentos para o Caso 8, viga biengastada, são mostrados na Tabela 6.

Tabela 6. Deslocamentos isolados da estrutura em cada estágio para o Caso 8 (cm)

Estágio	Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4	Nó 5	Nó 6	Nó 7	Nó 8
1	$y_{11} = 0$	$y_{12} = -0.0412$	-	-	-	-	$y_{17} = -0.0412$	$y_{18} = 0$
2	$y_{21} = 0$	$y_{22} = -0.0691$	$y_{23} = -0.2244$	-	-	$y_{26} = -0.2244$	$y_{27} = -0.0646$	$y_{28} = 0$
3	$y_{31} = 0$	$y_{32} = -0.0501$	$y_{33} = -0.1779$	$y_{34} = -0.3578$	$y_{35} = -0.3578$	$y_{36} = -0.1779$	$y_{37} = -0.0501$	$y_{38} = 0$
4	$y_{41} = 0$	$y_{42} = -0.0028$	$y_{43} = -0.0072$	$y_{44} = -0.0085$	$y_{45} = -0.0085$	$y_{46} = -0.0072$	$y_{47} = -0.0028$	$y_{48} = 0$
5	$y_{51} = 0$	$y_{52} = -0.0627$	$y_{53} = -0.1757$	$y_{54} = -0.2546$	$y_{55} = -0.2546$	$y_{56} = -0.1757$	$y_{57} = -0.0627$	$y_{58} = 0$

A deformação residual ocorrida na aduela após o último estágio e o percentual da deformação residual da Análise Incremental simples e com fluência, estão na Tabela 7.

Tabela 7. Deformações residuais para o Caso 8 (cm)

	Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4	Nó 5	Nó 6	Nó 7	Nó 8
AI – Simples	$Z_{51} = 0$	$Z_{52} = -0,1030$	$Z_{53} = -0,2995$	$Z_{54} = -0,4717$	$Z_{55} = -0,4717$	$Z_{56} = -0,2995$	$Z_{57} = -0,1030$	$Z_{58} = 0$
AI – Fluência	$Z_{51} = 0$	$Z_{52} = 0,0198$	$Z_{53} = 0,0588$	$Z_{54} = 0,0970$	$Z_{55} = 0,0970$	$Z_{56} = 0,0588$	$Z_{57} = 0,0198$	$Z_{58} = 0$
AI – Fluência / AI – Simples (%)	-	-0,19	-0,20	-0,21	-0,21	-0,20	-0,19	-

Assim como no Caso 6, os percentuais negativos significam que os resíduos de deformação formam curvas de deformação em sentido contrário para as análises. Os valores da Análise

Incremental com fluência estão na ordem de 0,20% da Análise Incremental simples.

## 6 Conclusões

O código computacional desenvolvido representa a etapa inicial de um projeto mais amplo dedicado à análise de pontes em balanços sucessivos e permite o cálculo de deformação em vigas que passam por modificação no sistema estrutural e em seus carregamentos, com opção de Análise Incremental com Fluência. Na validação do código desenvolvido, foram obtidos excelentes resultados quando comparados a um programa comercial de elementos finitos (SAP2000). O código é de fácil aplicação, com entrada de dados simples e permite acelerar o processo de modelagem de estruturas para esse tipo de análise.

A Análise Incremental simples comparada a modelos de execução em única etapa apresenta deformações diferentes, de forma que o método construtivo deve ser modelado nas análises. E neste estudo, os resultados da Análise Incremental com Fluência revelam a importância dos fenômenos, pois os resultados apresentam diferenças significativas, inclusive com a curva de deformação inversas em alguns casos.

Através das deformações são obtidas as contra flechas que na Análise Incremental simples apresentam valores inferiores ao considerar o fenômeno da fluência. Nas vigas bi engastadas a contra flecha sem fluência pode ser metade do caso considerando o efeito. E nas vigas em balanço esse valor pode ser apenas 30% da contra flecha aplicada com fluência.

Isso repercute em uma deformação residual após a execução com grande variação. Os valores dos resíduos quando a contra flecha considera a fluência não ultrapassam 20% do resíduo da Análise Incremental simples.

O código computacional desenvolvido permite o cálculo de deformação em vigas que passam por modificação no sistema estrutural e em seus carregamentos aplicando a Análise Incremental com Fluência, sendo de fácil aplicação, com uma entrada de dados simples e acelerando o processo de modelagem da estrutura.

Conforme foi demonstrado, é de extrema importância à análise em etapas construtivas e com as deformações diferidas ao longo do tempo, pois o cálculo das contra flechas precisa considerar o efeito de fluência, já que as estruturas em Balanço Sucessivo estão submetidas a carregamentos que provocam tensões ainda durante a fase construtiva.

## Agradecimentos

Agradecimentos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) pelos recursos financeiros disponíveis para o desenvolvimento desta pesquisa.

## Referências

- [1] A. Ghali, R. Favre, e M. Elbadry. *Concrete Structures Stresses and Deformations*, Spon Press, 2002.
- [2] C. Menn. *Prestressed Concrete Bridge*. Traduzido por: Paul Gauvreau. 1a ed. Boston: Basel, pp. 535, 1990.
- [3] COMITE EURO-INTERNATIONAL du BETON – CEB, FÉDÉRATION INTERNATIONALE DE LA PRÉCONTRAÎNTE – FIP. CEB-FIP Model Code 1990. Design Code. Lausanne: CEB, 1993.
- [4] Computers and Structures. *Getting Started with SAP2000 Linear and Nonlinear Static and Dynamic Analysis and Design of Three-Dimensional Structures*. Computers and Structures, Inc, 2009.
- [5] E. H. S Lima e S. G. B Macedo. Análise dos efeitos Construtivos em Estruturas de Concreto Armado. Trabalho de Conclusão de graduação, Universidade Federal de Pernambuco, 2014.

- [6] J. M. Araújo. *Curso de concreto armado*, v.1, Dunas, pp. 222, 2003.
- [7] J. Mathivat. *The cantilever construction of prestressed concrete bridges*. 3a ed. New York: A Wiley- Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc, pp. 341, 1983.
- [8] L. F. Martha. *Métodos Básicos da Análise de Estruturas*, Tecgraf: PUC-Rio, 2010.
- [9] L. S. Gorza. Análise incremental construtiva de edifícios metálicos de andares múltiplos usando o método dos elementos finitos. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico, 2000.
- [10] M. F. L. O. Santos. Procedimento adaptativo para controle de contra flechas durante a fase construtiva de estruturas em balanços sucessivos. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, 2014.
- [11] M. Kripka. Análise Incremental Construtiva de Edificações. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1990.
- [12] Mathworks. *Optimization Toolbox™ User's Guide*. The MathWorks, Inc, 2013.
- [13] Parametric Technology Corporation. *Manual do Usuário – Mathcad14*. Parametric Technology Corporation, 2007.
- [14] O. D. Paim. Projeto e Dimensionamento de Pontes em Balanços Sucessivos. *Anais da Associação Brasileira de Pontes e Estruturas – Seminário de Concreto Protendido*. vol.1. pp. 123–206, 1983.
- [15] W. Podolny Jr. e J. M. Muller. *Construction and Design of Prestressed Concrete Segmental Bridges*. 1ª ed. Canadá: John Wiley & Sons, Inc, pp. 205–208 482–487, 1982.
- [16] Z. P. Bazant. Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method. *Journal of the American Concrete Institute*, April 1972, vol. 69, pp. 212–217, 1972.
- [17] Z. P. Bazant. *Mathematical Modeling of Creep and Shrinkage of Concrete*, John Wiley & Sons Ltda., pp. 98–215, 1988.
- [18] Z. P. Bazant, M. H. Hubler e Q. Yu. Pervasiveness of Excessive Segmental Bridge Deflections: Wake-Up Call for Creep. *ACI Structural Journal*, November-December 2011, vol. 108, n. 6, pp.766–774. 2011.
- [19] Z. P. Bazant, R. H., Wendner e Q. Yu. Improved Algorithm for Efficient and Realistic Creep Analysis of Large Creep-Sensitive Concrete Structures, *ACI Structural Journal*, September-October 2012, vol. 109, n. 5, pp. 665–676, 2012.