

## UM ESTUDO ANALÍTICO-NUMÉRICO DA INFLUÊNCIA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO E DO PROCESSO DE CÁLCULO NA RESPOSTA DE UMA PLACA RETANGULAR NA ZONA DE CONEXÃO COM OS APOIOS

**Luan Felipe**

**Adriana C. Silva**

**Iarly Vanderlei da Silveira**

*luanfelipef@hotmail.com*

*adrianacorreiads@gmail.com*

*iarlysilveira@hotmail.com*

*Universidade de Brasília, Distrito Federal, Brasil*

**Resumo.** Na construção civil as conexões laje-viga ou laje-pilar apresentam algumas incertezas na análise de seus esforços, o que tem conduzido à discrepâncias entre o cálculo e o real comportamento desses elementos estruturais. Além da inacurácia durante sua execução, as variações oriundas das condições adotadas na modelagem numérica e da precisão dos procedimentos de cálculo também aumentam a divergência entre os resultados dessas análises e os observados in loco. Essas zonas de conexão dos elementos são regiões críticas que exigem esse questionamento e, assim, os resultados da deflexão de uma placa uniformemente carregada submetida à seis diferentes condições de apoio foram analisadas de forma comparativa por meio de: (a) Método das Diferenças Finitas; (b) Método dos Elementos Finitos através do software ANSYS; e (c) formulação analítica disponível na literatura. As combinações de condições de apoio variaram entre bordas apoiadas, e engastadas. Também foi realizado um estudo de convergência dos resultados para cada uma das condições impostas, observando-se que algumas das condições analisadas exigem maior cautela do projetista, dado a natureza dos métodos de análise utilizados e as próprias condições do problema abordado.

**Palavras-chave:** Método das Diferenças Finitas, Método dos Elementos Finitos, Placas.

**Abstract.** In civil construction the slab-beam or slab-pillar connections present some uncertainties in the analysis of their efforts, which has led to discrepancies between the calculation and the actual behavior of these structural elements. In addition to inaccuracy during its execution, variations from the conditions adopted in numerical modeling and the accuracy of the calculation procedures also increase the divergence between the results of these analyzes and those observed in loco. These elemental connection zones are critical regions that require this questioning, and thus the results of deflection of a uniformly loaded plate subjected to six different supporting conditions were analyzed comparatively by: (a) Finite Differences Method; (b) Finite Element Method using ANSYS software; and (c) analytical formulation available in the literature. The combinations of support conditions ranged from brimmed to crimped edges. We also conducted a convergence study of the results for each of the imposed conditions, noting that some of the analyzed conditions require greater caution from the designer, given the nature of the analysis methods used and the conditions of the problem addressed.

**Keywords:** Finite Difference Method, Finite Element Method, Plates

## **1 Introdução**

As placas são elementos bidimensionais largamente utilizado no mundo. Entre suas aplicações, elas estão presentes, por exemplo, na construção civil – em lajes, fundações, cortinas e comportas –, na indústria aeroespacial – nas asas e fuselagem dos aviões – e na indústria naval – nos cascos, convés e superestrutura dos navios (Szilard, 2004).

De acordo com Pedroso (2011) a solução de problemas de placa pelo método clássico, é limitado a placas de geometria, carregamento e condições de contorno muito simples. Se o problema se tornar mais complexo, a análise se torna muito complicada e até mesmo impossível na mecânica estrutural, métodos numéricos foram usados frequentemente no passado quando não se tinha soluções matemáticas rigorosas. O ímpeto real para o desenvolvimento desses métodos aconteceu com a invenção dos computadores digitais. Um computador digital pode executar um algoritmo que descreve rigorosamente os passos requeridos na solução numérica do problema. O algoritmo traduzido em uma linguagem de programação que seja entendida pelo computador é o programa. Ao solucionarem problemas, os computadores introduzem um tipo de erro chamado erro de máquina, que consiste em truncamento e erro relacionado a capacidade de armazenagem de dados do computador. A estabilidade do procedimento numérico empregado e suas características de convergência são em muitos casos a principal preocupação.

Dessa forma, este trabalho objetiva avaliar e estudar placas com diferentes condições de contorno, nas quais se avaliaram seus deslocamentos quando submetidas a uma carga linearmente distribuída ao eixo normal por intermédio dos métodos analíticos que envolvem equações clássicas da literatura e numéricos via o método das diferenças finitas e elementos finitos por meio do software APDL (ANSYS Program Designation Language). Dessa forma, buscou-se apresentar ao leitor as principais diferenças entre os métodos, assim como mostrar a eficiência da quantidade de elementos na convergência dos resultados numéricos.

Por fim, destaca-se algumas pesquisas relacionadas a esse tema que trabalharam com aplicação estática e dinâmica em placas, por exemplo: Dutra (2014); Escudero e Vitalli (2016); Coelho e Pedroso (2016).

## **2 Formulação teórica**

Lajes são elementos planos e bidimensionais no qual duas dimensões são superiores a uma terceira (da ordem de 10 vezes) e, por isso, elas podem ser classificadas como elementos de placa.

A solução a ser utilizada corresponde a da teoria da elasticidade e com o modelo de placas proposto por Kirchhoff e ela é solucionada a partir da equação diferencial de quarta ordem, juntamente com as condições de contorno. Admite-se que o material apresenta um comportamento elástico linear desde que seja tomado um grau mínimo de ductilidade.

Assim, consiste em determinar a solução da equação diferencial governante das placas que, se origina das equações de equilíbrio de um elemento infinitesimal de placa e nas relações de compatibilidade das deformações do mesmo. (CARVALHO, 2016).

De acordo com Pedroso 1998 pode-se imaginar que a forma de uma placa fina é definida pela geometria de sua superfície média. A teoria de placas de Kirchhoff-Love se baseia nas seguintes condições:

- O material da placa é elástico, homogêneo e isotrópico (lei de Hooke);
- A espessura  $h$  é pequena em relação as outras dimensões (placas finas);
- As tensões normais a superfície média são desprezíveis em relação as demais tensões ;
- Os pontos pertencentes (antes da deformação) a reta normais a superfície média encontram-se, após a deformação, sobre retas perpendiculares a superfície média deformada (deformações devido ao esforço cortante são desprezadas);
- Os deslocamentos são pequenos se comparados com a espessura da placa, sendo possível desprezar a influência dos mesmos no estado das condições de equilíbrio do elemento de superfície (teoria linear e superposição de efeitos);

- As deflexões são muito menores que 1 (teoria de pequenas deformações).

A partir dessas hipóteses obtém a equação governante das placas, dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = - \frac{p(x, y)}{D} \quad (1)$$

Para solucionar a equação (1) necessita-se das condições de contorno, e para este estudo, foram utilizadas duas condições de contorno, sendo elas bordos simplesmente apoiados e bordos engastados. Usou-se um plano de referência (x, y) como detalhado na Figura 1, assim como um eixo de orientação.

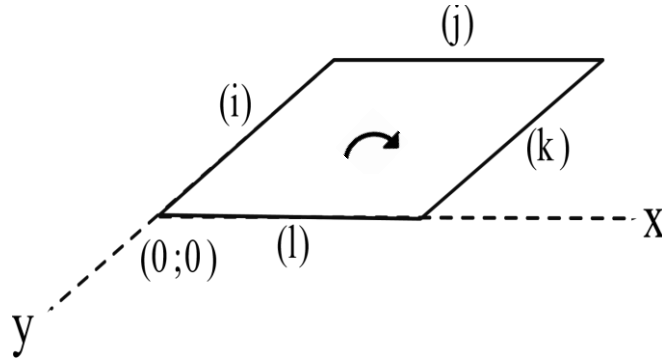


Figura 1. Plano de referência adotado

- **Bordos simplesmente apoiados**

Um bordo simplesmente apoiado representa as condições de contorno de um apoio simples. Para esta condição, a deflexão e o momento fletor ao longo do contorno são zero, portanto:

$$\omega = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad \text{Em } x = 0 \text{ e } x = a \quad (2)$$

Da mesma forma:

$$\omega = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Em } y = 0 \text{ e } y = a \quad (3)$$

- **Bordos engastados**

Neste caso a deflexão e o ângulo de rotação da linha elástica ao longo do bordo se anulam. Assim:

$$\omega = 0 \text{ e } \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad \text{Em } x = 0 \text{ e } x = a \quad (4)$$

Da mesma forma:

$$\omega = 0 \text{ e } \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \quad \text{Em } y = 0 \text{ e } y = b \quad (5)$$

### 3 Métodos de solução

#### 3.1 Soluções analíticas

Entre as técnicas de solução deste método está na transformação do carregamento  $p(x,y)$  em séries trigonométricas, obtendo-se uma solução para a integração da equação fundamental. Para este tipo de solução existem o de dupla série e de série simples.

##### 3.1.1 Série dupla

O desenvolvimento mostrado nesse item é apresentado em notas de aulas de Pedroso e no trabalho de Escudero e Mendes (2016).

Com o fim de resolver a equação diferencial, Navier estudou o caso de uma placa retangular simplesmente apoiada nos quatro bordos, então propôs uma solução na qual as condições de contorno fossem atendidas na forma de séries duplas de senos, desta forma propôs que:

$$\omega(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \text{Sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{Sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (6)$$

Sendo  $w(x,y)$  a deflexão do painel. O carregamento  $p_z(x,y)$  sobre a superfície da mesma é:

$$3.1.2 \quad p_z(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (7)$$

Como a equação geral de uma placa é:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} p_z(x,y); \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (8)$$

Para a Eq. 8 são necessárias as derivadas da Eq. 6, isto é:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (9)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (11)$$

Substituindo as Eq. 9, Eq. 10, Eq. 11 e Eq. 7 na Eq. 8, e simplificando se obtêm:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right\}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \\ & = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

Percebe-se que a igualdade é válida para todos os valores  $m, n = 1, 2, 3, \dots$  por tanto para algum valor particular de  $m$  e  $n$  tem:

$$\left\{ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2 \cdot W_{mn} = \frac{1}{D} \cdot P_{mn} \quad (13)$$

Ou:

$$W_{mn} = \frac{P_{mn}}{D \cdot \pi^4 \cdot \left\{ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right\}^2} \quad (14)$$

Substituindo a Eq. 14 na Eq. 6:

$$w(x; y) = \frac{1}{D \cdot \pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{mn}}{\left\{ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right\}^2} \text{sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi y}{b} \right) \quad (15)$$

### 3.1.2 Série Simples e o princípio da superposição

Apesar da solução de Navier ser bastante simples e objetiva, ela apresenta uma grande limitação de ser aplicável apenas a placas retangulares simplesmente apoiadas. Para contornar este problema, Lévy propôs uma solução para um caso de uma placa que está simplesmente apoiada em dois dos seus bordos sendo eles opostos e nos outros dois bordos podem ser quaisquer condições de contorno, sendo assim, a deformada terá um formato de:

$$\omega(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y) \text{Sen} \left( \frac{m\pi x}{a} \right) \quad (16)$$

Onde a função  $F_n(y)$  é uma função que depende unicamente de  $y$ . Com isso foi possível superar a limitação existente na solução proposta por Navier, podendo os outros dois bordos serem condições de contorno quaisquer.

### 3.1.3 Método das Diferenças Finitas

As derivadas são obtidas neste método pela expansão em série de Taylor como se mostra a seguir:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{d^3 f}{dx^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (17)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{2!} - \frac{d^3 f}{dx^3} \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (18)$$

Utilizando apenas os dois primeiros termos fica:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (19)$$

Substituindo  $f(x)$  por  $F_i$  a diferença fica:

$$\frac{df}{dx} = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x} \quad (20)$$

Dada a equação geral das placas vista na equação (1) ou (8) e observa-se que as derivadas que aparecem são de quarta ordem, que representa as mesmas por diferenças finitas. Para o operador em diferenças finitas é igual a:

$$(D\nabla^2\nabla^2\Omega)_{i,j} = \frac{D}{\Delta^4} [20F_{i,j} - 8(F_{i+1,j} + F_{i-1,j} + F_{i,j+1} + F_{i,j-1}) + 2(F_{i+1,j+1} + F_{i-1,j+1} + F_{i+1,j-1} + F_{i-1,j-1}) + F_{i+2,j} + F_{i-2,j} + F_{i,j+2} + F_{i,j-2}] = (p_z)_{m,n} \quad (21)$$

Ilustrando graficamente, o operador laplaciano fica:

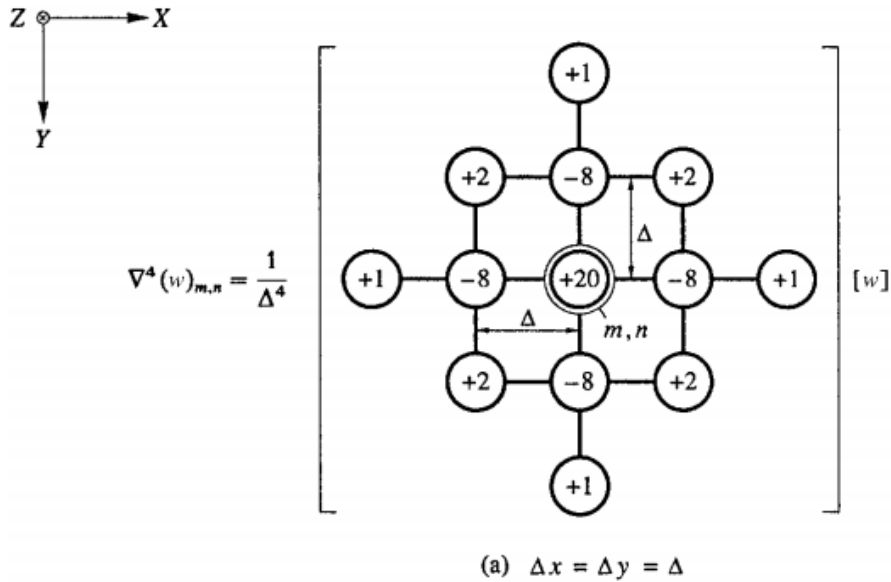


Figura 2. Operador diferencial  $\Delta x = \Delta y$   
Fonte: SZILARD, 2004

Para a solução pelo método das diferenças, também, necessita-se das condições de contorno, e para nosso estudo que envolve o apoio simples e o engastado, tem-se:

#### Apoio simples:

Nesta condição de contorno o deslocamento e o momento fletor serão zero, assim:

$$\omega = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \quad (22)$$

Representando por meio de diferenças finitas:

$$F_i = 0 \quad (23)$$

$$\frac{d^2 \omega}{dx^2} = \frac{F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1}}{\Delta x^2} = 0 \quad (24)$$

$$F_{i+1} = -F_{i-1} \quad (25)$$

#### Engaste:

Nesta condição de contorno o deslocamento e a inclinação são iguais a zero, assim:

$$F_i = 0 \quad (26)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x} \quad (27)$$

$$F_{i+1} = F_{i-1} \quad (28)$$

### 3.1.4 Método dos Elementos Finitos

A análise numérica realizada pelo software ANSYS é baseada no método dos elementos finitos, cujo uso se popularizou devido à praticidade apresentada em resolver problemas de alto grau de complexidade, como estáticos, dinâmicos, térmicos e eletromagnéticos.

Na modelagem do problema desenvolvido nesse trabalho, foi utilizado o elemento tridimensional SHELL282, apresentado na Figura 3, que é composto por oito nós, sendo cada um deles disposto de seis graus de liberdade: tanto translação, quanto rotação nas direções x, y e z.

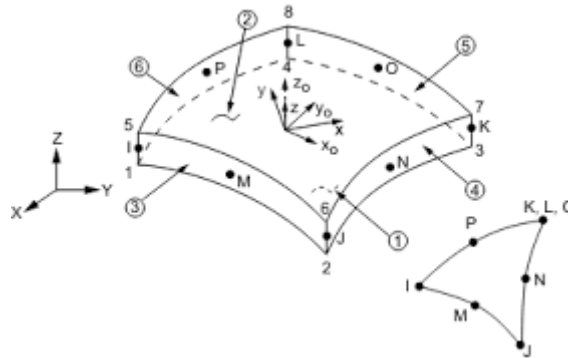
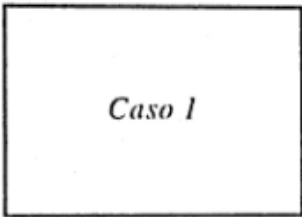
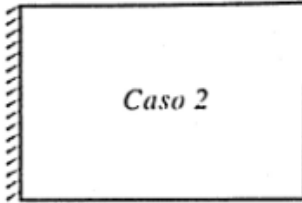


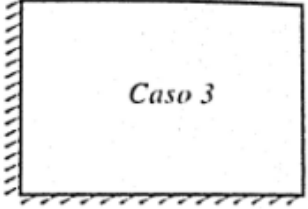
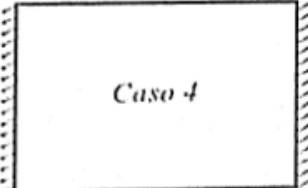
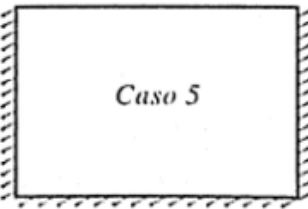
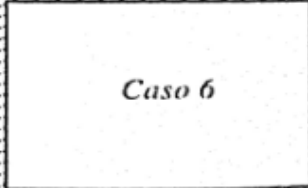
Figura 3. Elemento SHELL281. (Biblioteca ANSYS)

## 4 Metodologia de Estudo

Foram estudados seis diferentes casos de condições de contorno da placa, como ilustra a Figura 1, variando entre contornos apoiados (A) e engastados (E). De forma explicativa optou-se em agrupar todos os casos e apresentou-se na Tabela 1 com suas respectivas condições de contorno.

Tabela 1. Casos estudados e suas respectivas condições de contorno

Casos	Bordas				Método de solução
	i	j	k	l	
 <i>Caso 1</i>	A	A	A	A	Dupla série
 <i>Caso 2</i>	E	A	A	A	Série simples

	E	A	A	E	Série simples + Superposição
	E	A	E	A	Série simples
	E	A	E	E	Série simples + Superposição
	E	E	E	E	Série simples + Superposição

Após se eleger cada caso, aplicou-se as soluções de Navier e Lévy, que utilizam-se de séries trigonométricas para as soluções, como também o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) para encontrar a solução de cada caso. Para viabilizar a comparação de resultados entre os métodos numéricos adotados, em ambos foram utilizados o padrão de malha ilustrado na Figura 4, onde o número de elementos que divide a lateral da placa define o nome da malha.



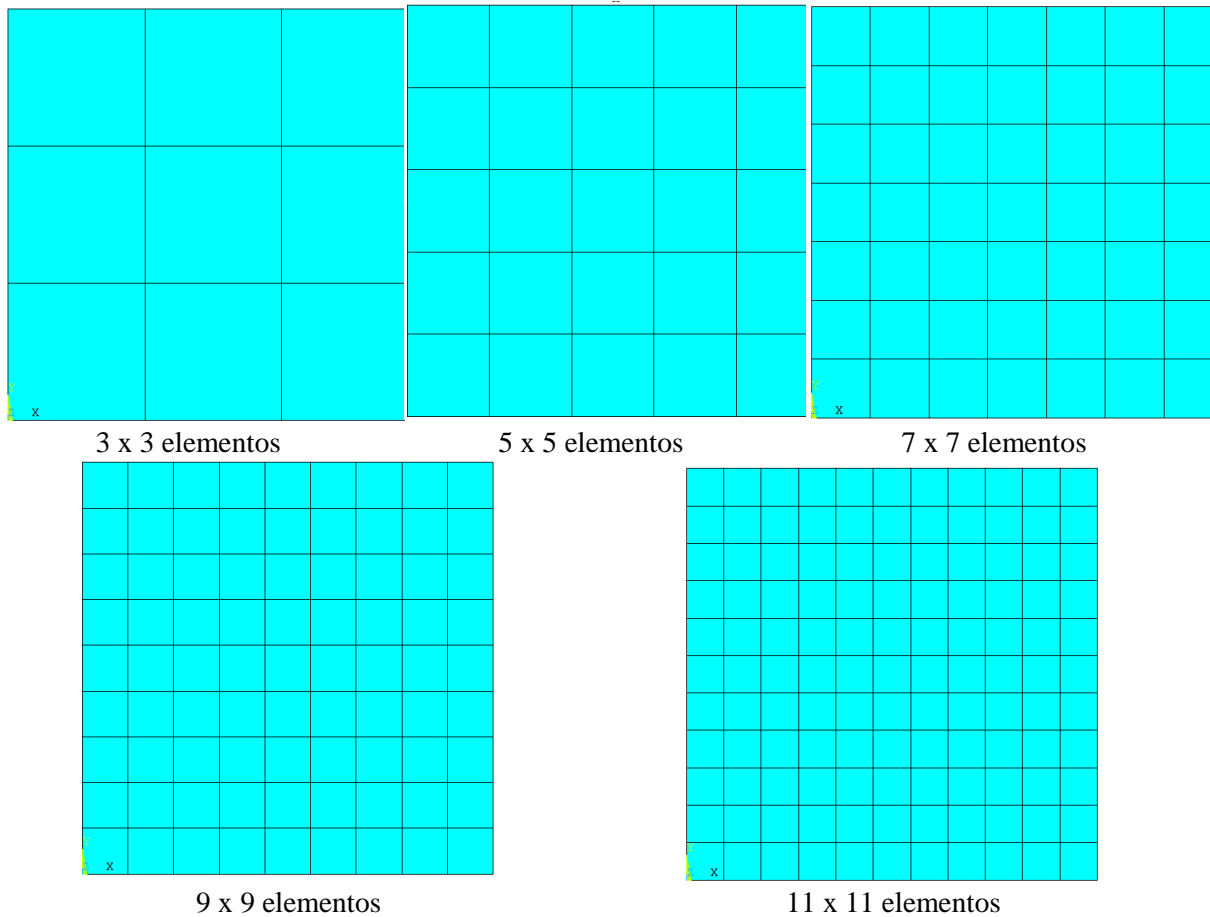


Figura 4. Padrão de malhas adotado

Em posse das soluções, encontrou-se a deflexão máxima para cada um dos seis casos e fez-se um erro em relação à solução analítica para verificar como as condições de contorno interferem na convergência dos métodos.

As soluções analíticas foram feitas com o auxílio do software Wolfram Mathematica 9, ao passo que para as soluções pelo MDF utilizou-se tabelas no Excel para montar as matrizes e as soluções com o MEF foram feitas com o auxílio do software Ansys.

Para respeitar os limites da teoria de membrana, as dimensões adotadas para a placa quadrada foram: 5 metros de comprimento ( $a = b = 5\text{m}$ ) e 10 cm de espessura. O módulo de elasticidade utilizado foi de 20 GPa, coeficiente de Poisson de 0,2 (esses dois últimos parâmetros foram retirados da ABNT NBR 6118/2014), uma carga de  $1\text{ kN/m}^2$  e, para efeito de cálculo, assumiu-se um peso específico nulo.

Para efeito de cálculo, as soluções foram encontradas com parâmetros pré-estabelecidos da placa e, para efeitos de comparação, transformou-se a deflexão em uma deflexão normalizada onde não depende dos parâmetros como é mostrado a seguir:

$$\omega(x, y) = \frac{pl^4}{D} F(x, y) \quad (29)$$

Nota-se que é possível encontrar aqui uma deflexão adimensional (chamado aqui de  $\varpi$ ) fazendo:

$$\varpi = \frac{\omega}{\frac{pl^4}{D}} \quad (30)$$

O parâmetro de comparação utilizado foi o erro relativo (chamado aqui de  $\delta$ ) que é em relação à solução analítica, como mostra a seguir:

$$\delta = \frac{|\varpi_{analítico} - \varpi|}{\varpi_{analítico}} \times 100\% \quad (31)$$

## 5 Resultados

Os resultados apresentados nessa seção consiste, inicialmente, no estudo de validação para uma placa bi apoiada, na qual apresenta solução numérica mais exequível e confiável. A partir dessa etapa preliminar analisou-se as outras condições de contorno, tanto para o método numérico em diferenças finitas quanto para elementos finitos. Para todos os casos avaliou-se a deformada no centro da placa, e comparou-se esses resultados.

Para o primeiro caso A-A-A-A, na Tabela 2 e na Figura 6 estão apresentados os deslocamentos no centro da placa para a condição apoiada-apoiada. E, percebeu-se que os resultados foram satisfatórios para esse caso 1, dando confiança para as outras análises.

Tabela 2. Resultados para o caso 1: placa apoiada - apoiada

Caso 1					
Malha	Analítica	MDF	erro (%)	MEF	erro (%)
3x3	0,004062	0,004028	0,837026	0,004206	3,53411
5x5	0,004062	0,004048	0,344658	0,004161	2,439958
7x7	0,004062	0,004055	0,172329	0,00415	2,16642
9x9	0,004062	0,004058	0,098474	0,00415	2,16642
11x11	0,004062	0,004059	0,073855	0,00415	2,16642

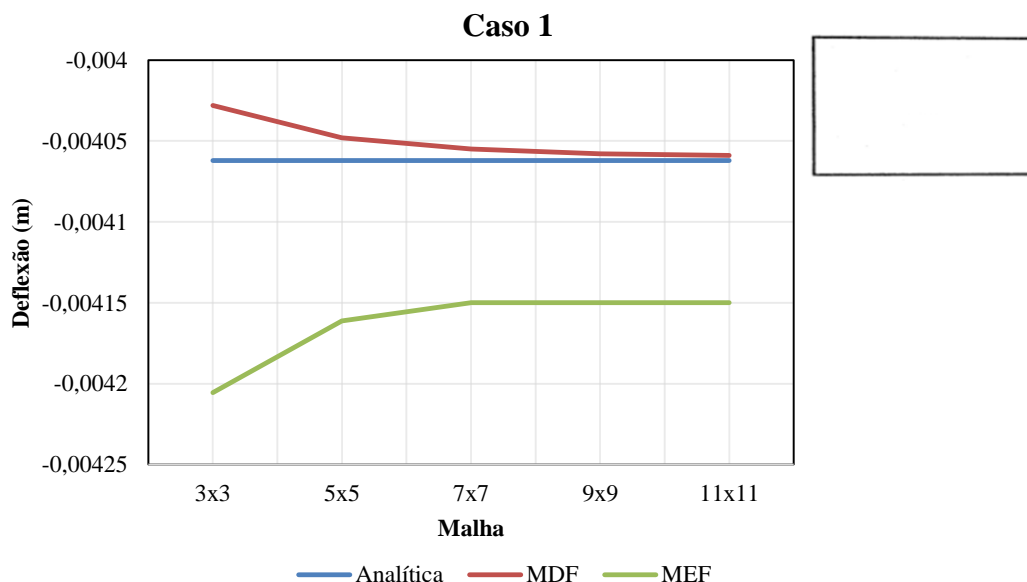


Figura 5. Magnitude da deformada no centro da placa calculada pelos métodos analíticos e numéricos - Caso 1

Os resultados mostraram que houve uma pequena discrepância entre os valores analítico e numérico MDF para os valores obtidos pelo MEF. Isso pode ser influenciado pelo tipo de elemento que utilizou-se na modelagem. Pode-se observar que a medida que aumentamos o número de elementos diminuiu-se o erro entre os resultados.

Na sequência apresenta-se os resultados para os demais casos, mostrando os valores numéricos para as deformadas no centro da placa e o comportamento desse valor modificando com o número de elementos.

Tabela 3. Resultados para o caso 2: placa engastada-apoiada/apoiada-apoiada

Caso 2					
Malha	Analítica	MDF	erro (%)	MEF	erro (%)
<b>3x3</b>	0,002785	0,003123	12,10237	0,002823	1,348616
<b>5x5</b>	0,002785	0,002964	6,41736	0,002899	4,091002
<b>7x7</b>	0,002785	0,002893	3,864342	0,002903	4,230614
<b>9x9</b>	0,002785	0,002893	3,872444	0,002899	4,071057
<b>11x11</b>	0,002785	0,002893	3,867523	0,002898	4,04114

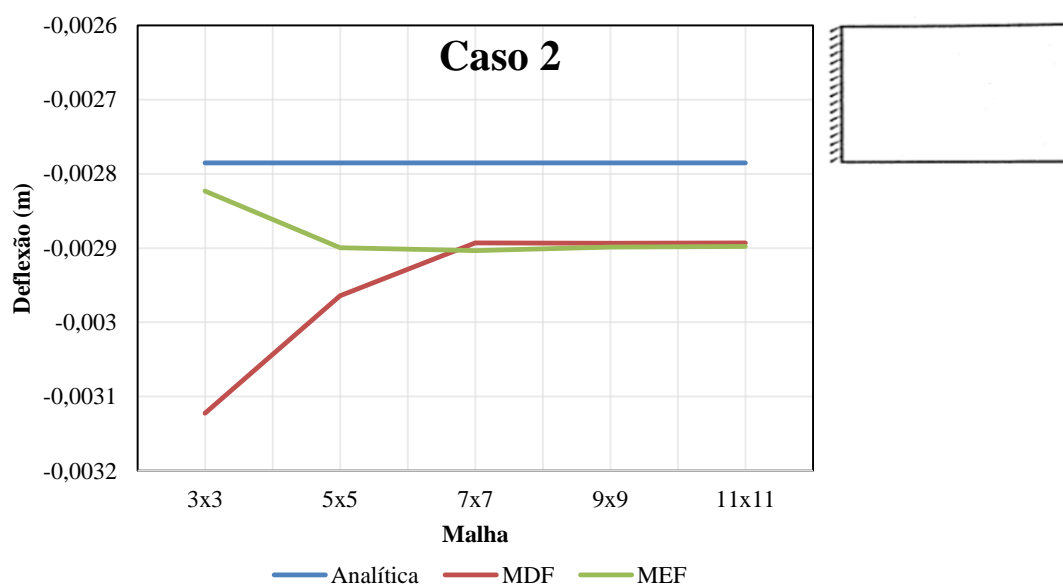


Figura 6. Magnitude da deformada no centro da placa calculada pelos métodos analíticos e numéricos - Caso 2

Para o segundo caso E-A-A-A observou-se que os resultados ficaram muito próximos do analítico, apresentado um erro decrescente de forma mais acentuada para o MDF, já para o MEF o valor numérico não se alterou de forma significativa a partir do segundo tipo de malha (5x5).

Tabela 4. Resultados para o caso 3: placa engastada-apoiada/engastada-apoiada

Caso 3					
Malha	Analítica	MDF	erro (%)	MEF	erro (%)
3x3	0,002212	0,002553	15,4421	0,002027	8,358941
5x5	0,002212	0,002337	5,637423	0,00217	1,912544
7x7	0,002212	0,002243	1,401354	0,002185	1,21679
9x9	0,002212	0,002241	1,307855	0,002214	0,088062
11x11	0,002212	0,002246	1,563095	0,002223	0,515059

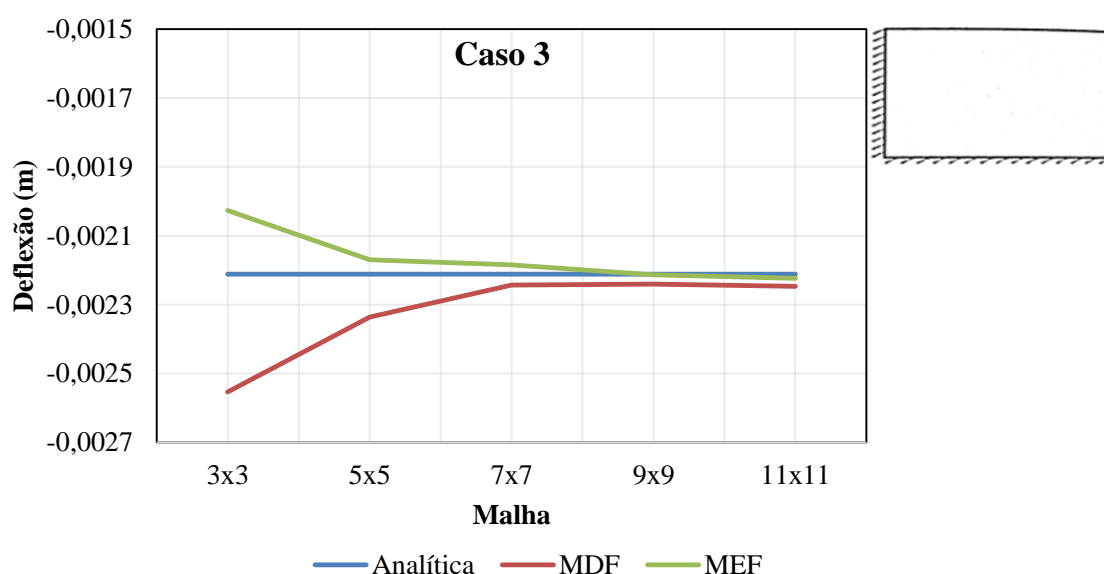


Figura 7. Magnitude da deformada no centro da placa calculada pelos métodos analíticos e numéricos - Caso 3

Para o caso 3 E-A-A-E tem-se que o erro se tornou muito pequeno para o MEF desde do primeiro tipo de malha, diferentemente para o MDF que precisou de malhas mais refinadas para chegar-se no resultado analítico. Uma vez que o engastamento pode provocar dificuldades de cálculo para o MDF em função dessa condição de contorno.

Tabela 5. Resultados para o caso 4: placa engastada-engastada/apoiada-apoiada

Caso 4					
Malha	Analítica	MDF	erro (%)	MEF	erro (%)
3x3	0,001917	0,002466	28,63681	0,001872	2,335826
x5	0,001917	0,002203	14,89317	0,001936	0,996928
x7	0,001917	0,002088	8,901838	0,001939	1,14183
9x9	0,001917	0,002029	5,867168	0,001939	1,14183
11x11	0,001917	0,001996	4,142278	0,001939	1,14183

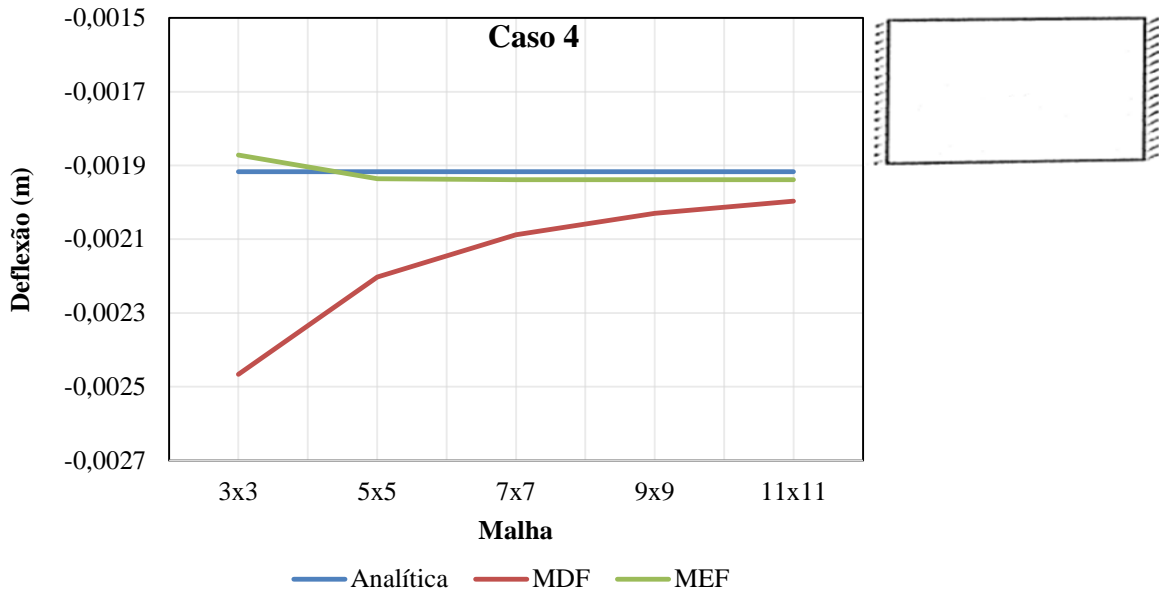


Figura 8. Magnitude da deformada no centro da placa calculada pelos métodos analíticos e numéricos - Caso 4

Para o caso 5 E-A-E-E observou-se que o MEF foi superior ao MDF, de maneira similar ao explicado anteriormente para o caso 4, o aumento do número de engaste torna mais complexo a solução numérica o MDF, já o MEF por apresentar uma qualidade melhor garantida pelo elemento utilizado obteve-se resultados melhores. Isso se torna mais visível quando se observa o caso 6 E-E-E-E.

Tabela 6. Resultados para o caso 5: placa engastada-engastada/engastada-apoiada

Caso 5					
Malha	Analítica	MDF	erro (%)	MEF	erro (%)
3x3	0,001589	0,002105	32,44926	0,001451	8,654989
5x5	0,001589	0,001844	16,0202	0,001606	1,073352
7x7	0,001589	0,001733	9,052697	0,001618	1,807566
9x9	0,001589	0,001691	6,40491	0,001617	1,772603
11x11	0,001589	0,001671	5,176399	0,001615	1,624012

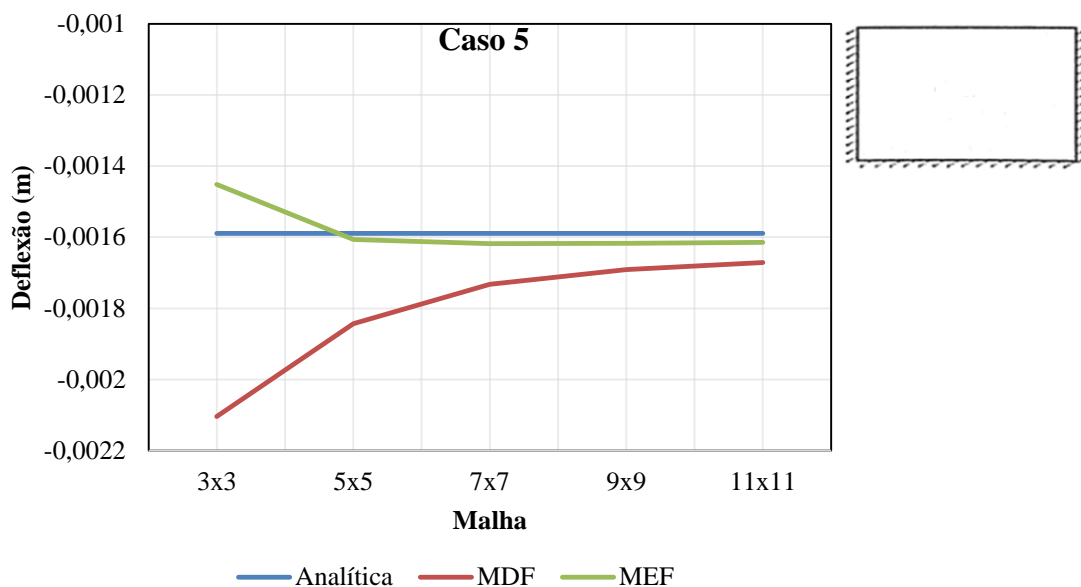


Figura 9. Magnitude da deformada no centro da placa calculada pelos métodos analíticos e numéricos - Caso 5

Tabela 7. Resultados para o caso 6: placa engastada-engastada/engastada-engastada

Caso 6					
Malha	Analítica	MDF	erro (%)	MEF	erro (%)
3x3	0,001265	0,0018	42,25363	0,001053	16,77646
5x5	0,001265	0,001534	21,29528	0,001258	0,527009
7x7	0,001265	0,001424	12,60098	0,001272	0,570927
9x9	0,001265	0,00137	8,276606	0,001275	0,790514
11x11	0,001265	0,001339	5,837712	0,001275	0,790514

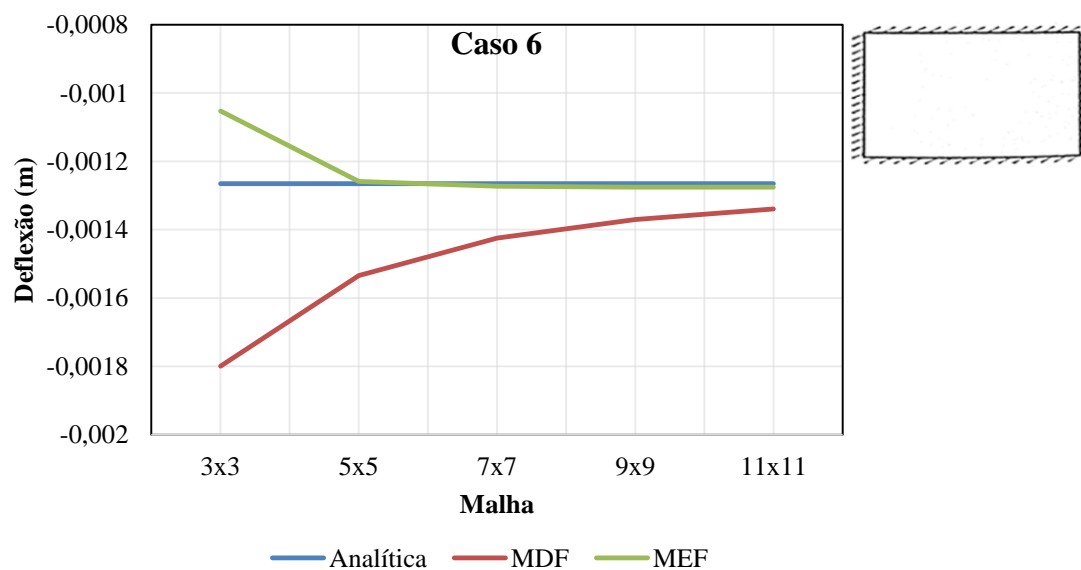


Figura 10. Magnitude da deformada no centro da placa calculada pelos métodos analíticos e numéricos - Caso 6

Os resultados para os demais casos apresentaram valores próximos do analítico com menor número de elementos para o método de elementos finitos, cujos erros são mostrados na Figura 11, em que se relacionou o número de elementos versus o erro (%) representado pela equação (31). Pode-se notar que apenas no caso 1 se teve uma convergência mais rápida para o método das diferenças finitas, já para os demais casos o método de elementos se mostrou mais eficiente.

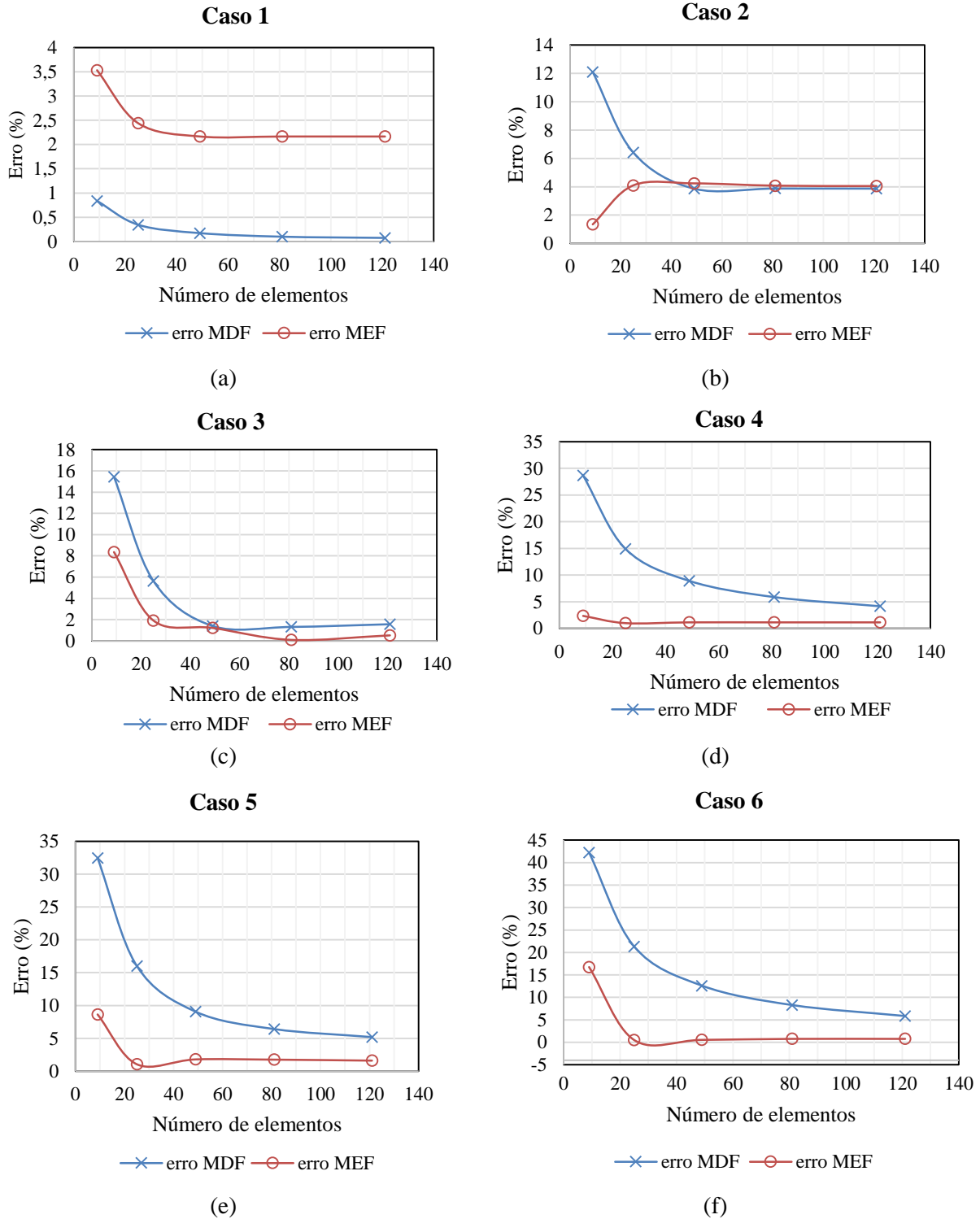


Figura 11. Estudo de convergência para os 6 casos analisados

## 6 Conclusões

A partir das análises efetuadas ao longo desse trabalho pode-se constatar uma boa correlação entre os resultados analíticos e numéricos, uma vez que para poucos elementos, em especial o método de elementos finitos, já se tem resultados bem próximos do analítico. Deve-se ressaltar que avaliou-se o deslocamento no centro da placa, na qual está submetida a um carregamento linear constante ao longo do seu eixo normal, e que para análises mais profundas seriam necessário outros estudos, por exemplo, cálculo de momentos fletores e esforços cortantes.

No entanto, esse estudo serve como preparação para o enfrentamento de tais problemas mais complexos, uma vez existindo o domínio nessa etapa e entendendo todo o mecanismo, os próximos passos sairão de maneira mais simples e com maior confiança.

Dessa forma, os autores recomendam que para avaliações que envolvem placas em modelagens numéricas, deve-se começar com o domínio de exemplos simples, obtendo e entendendo todas as etapas necessários para a solução do problema e verificando se realmente as condições de contorno estão atendendo ao esperado.

Em relação aos métodos avaliados, notou-se pela comparação entre métodos MDF, MEF e o analítico, que com o aumento do número de engastes, o MDF possui erros maiores devido a problemas com simplificações feitas no contorno.

## Referências

- [1] CARVALHO, R. C. Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado. 4. ed. São Carlos: *EduFSCar*, v. 1, 2016.
- [2] CLÍMACO, J. C. T. D. S. Estruturas de concreto armado: Fundamentos de projeto, dimensionamento e verificação. 3. ed. Brasília, DF: UnB, 2016.
- [3] Coelho, G. O; Pedroso, L. J. “Um Estudo comparativo analítico-numérico do comportamento de uma placa circular anular superior da catedral de Brasília”. *CILAMCE 2016 – XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Brasília, DF, Brasil, 16 p., 2016
- [4] Dutra, R. B. C. Um estudo comparativo analítico e numérico dos efeitos das vinculações nas vibrações livres de placas quadradas finas. *Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil*, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil, 180 p., 2014.
- [5] Escudero, A; Vitalli, M. “Um Estudo comparativo analítico-numérico do comportamento de uma placa de ponte em grelha sob ação de um trem tipo normalizado”. *CILAMCE 2016 – XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*, Brasília, DF, Brasil, 16 p., 2016.
- [6] Pedroso, L. J. (2011) “Uma introdução ao método das diferenças finitas centrais.” Brasília, *Grupo de dinâmica e fluido-estrutura*, UnB.
- [7] Szilard, Rudolph. 2004. Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods. *Copyright © 2004 John Wiley & Sons, Inc.*