

## ESTUDO DO COMPORTAMENTO ESTRUTURAL ESTÁTICO EM ELEMENTOS DE PLACA

**Murilo Carneiro Rodrigues**  
**José Vitor Silva de Carvalho**  
**Davidson de Oliveira França Júnior**  
**Wanderlei Malaquias Pereira Júnior**

*murilocr@live.com*

*josevitor\_carvalho@outlook.com*

*davidson.francajunior@gmail.com*

*wanderlei\_junior@ufg.br*

*Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120, Setor Universitário - CEP: 75704-020, Catalão - Go, Brasil*

**Resumo.** Um problema prático na engenharia surge com a análise estrutural estática de placas. Soluções analíticas apresentadas na literatura são complexas e extensas, necessitando o uso de métodos de tabelas simplificadas para obtenção desta resposta estrutural estática. No Brasil, as placas têm diversas aplicações práticas e são empregadas principalmente para simular as lajes em concreto armado em edifícios de múltiplos pavimentos. Nesse sentido, neste trabalho é apresentado um procedimento analítico utilizado através de implementação computacional para a análise estática elástica-linear de placas finas retangulares com as bordas simplesmente apoiadas. A solução analítica é obtida tendo por base o cálculo variacional através de uma formulação energética implementada no *software* MAPLE. Os valores obtidos são comparados com o método dos elementos finitos (MEF) através de uma discretização numérica por meio do *software* ANSYS. Com base nestes estudos, ficou evidenciado que a metodologia analítica implementada representa adequadamente os deslocamentos, esforços e tensões na laje.

**Palavras-Chave:** Placa, Solução Analítica, Método dos elementos finitos.

**Abstract.** A practical problem in engineering arises with static structural plate analysis. Analytical solutions presented in the literature are complex and extensive, requiring the use of simplified table methods to obtain this static structural response. In Brazil, slabs have several practical applications and are mainly used to simulate reinforced concrete slabs in buildings. In this sense, this work presents an analytical procedure used through computational implementation for the linear-elastic static analysis of rectangular thin plates with simply supported boundary condition. The analytical solution is obtained based on the variational calculation through an energy formulation implemented in MAPLE software. The values obtained are compared with the finite element method (FEM) by numerical discretization using ANSYS software. Based on these studies, it was evidenced that the analytical methodology implemented adequately represents the displacements, bending moment and tensions in the slab.

**Keywords:** Plate, Analytical Solution, Finite Element Method.

## 1 Introdução

Estudos estáticos em placas são de grande interesse para a comunidade de científica de engenharia, pois estas são estruturas com diversas aplicações nos projetos de estruturas. As placas são caracterizadas por um objeto de superfície plana com espessura muito menor que suas outras dimensões.

A resposta estrutural desse elemento (deslocamentos, tensões, esforços internos etc) é influenciada por vários fatores: o tipo de carregamento atuante (temperatura, concentrado, distribuído, etc...), as dimensões geométricas, condições de contorno, tipo do material, entre outras.

Navier [1] em 1823 apresentou a primeira formulação relativa a placas, o mesmo elaborou a equação diferencial que governa o deslocamento em placas submetidas a carregamentos normais e estáticos, além da solução de deslocamento para placas simplesmente apoiadas por meio de uma aproximação em séries de Fourier. Em 1850, Kirchhoff [2] publicou uma teoria clássica de placas, com solução para as demais condições de contorno, tal teoria foi aprimorada por Volokh [3], e vastamente aplicada por outros autores como: Timoshenko e Krieger [4], Szilard [5], Love [6] entre outros.

Em situações de dimensionamento de projeto, fez-se necessário a obtenção da resposta estrutural estática de placas. Vários autores ao longo desses anos desenvolveram métodos para estimativa de esforços e deslocamentos nesses tipos de elementos estruturais, sendo que o método de tabelas tenha sido um dos pioneiros na elaboração de projetos estruturais.

Para esses métodos de tabelas os autores tiveram como base matemática as teorias anteriormente citadas, que tem sua fundamentação na teoria da elasticidade. Podem ser mencionados trabalhos pioneiros como de Marcus [7], Czerny [8] e Bares [9]. Tais estudos diferem entre si desde a diferente adoção das deformações do elemento da placa como o método de solução da equação governante.

Nos dias atuais com projetos arquitetônicos mais arrojados diversas ferramentas computacionais de projeto são utilizadas para melhor estudar o comportamento estático dos elementos de placa. Porém pode-se afirmar que os métodos tabelares (analíticos simplificados) não acompanharam as evoluções normativas e ainda apresentam algumas simplificações nas suas deduções.

Nas pesquisas bibliográficas, em grande maioria dos estudos recentes que tratam sobre análise estrutural de placas pode-se destacar os trabalhos de Soares [10], Araújo [11], Gontijo [12] e Leal [13]. Estes estudos diferem entre si por abordar a problemática com diferentes formulações teóricas, métodos numéricos e aplicações em estudos de casos. Além dos trabalhos citados, a literatura apresenta extensos estudos sobre análise estrutural em placas, todavia, a maior parte dos trabalhos é limitada à aplicação de formulações existentes, tornando a metodologia empregada um diferencial.

Portanto, neste artigo é proposta uma implementação analítica aplicada para a análise estrutural estática elástica-linear de placas delgadas simplesmente apoiadas. Este procedimento é baseado no cálculo variacional tendo por base uma formulação energética. Os deslocamentos da placa são assumidos por uma dupla série senoidal e o método de Ritz foi empregado para resolução das equações.

Para validar a implementação aqui apresentado, são realizados estudos comparativos entre os resultados analíticos da formulação proposta com os valores encontrados por simulações numéricas em elementos finitos. Para essa simulação será utilizado o *software* comercial ANSYS®.

Após a validação dos resultados processados, tanto a implementação analítica quanto a abordagem numérica, fornecem um melhor entendimento voltado à análise estrutural e que pode ser aplicado para obter a resposta estática em placas.

## 2 Formulação Teórica

### 2.1 Procedimento analítico (Domínio Estrutural)

A placa (Fig. 1) têm comprimento  $L_y$  (maior dimensão no plano) e  $L_x$  (menor dimensão no plano) e espessura  $h$ . O material é considerado como sendo elástico-linear com módulo de Young elasticidade ( $E$ ), coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) e massa específica ( $\rho$ ). As coordenadas do vetor deslocamento na superfície da placa direção normal é  $w(x,y)$ .

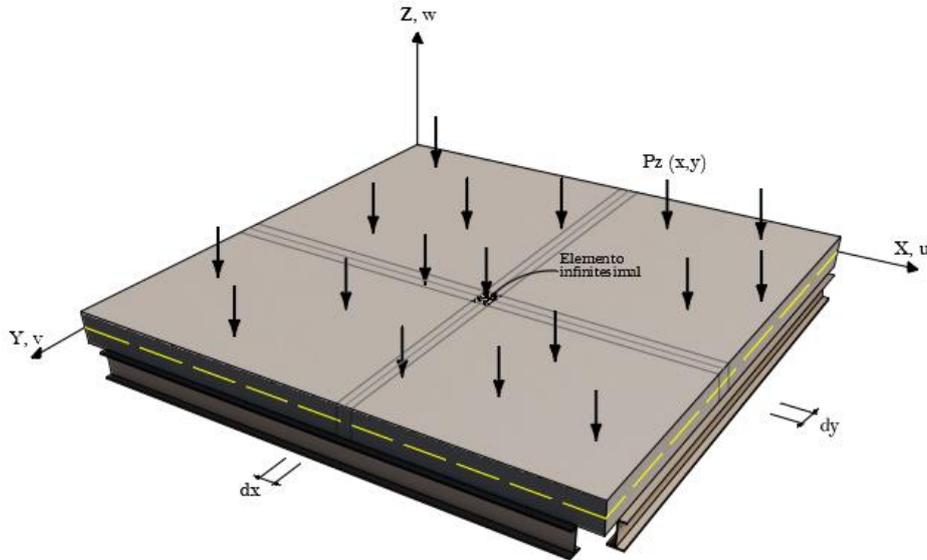


Figura 1. Elemento Estrutural de Placa.

A equação governante do comportamento estático-linear da placa é caracterizada por uma equação diferencial parcial de quarta ordem, dada por:

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \frac{p_z(x, y)}{D} \quad (1)$$

Onde  $w(x, y)$  é o deslocamento normal à superfície da placa,  $P_z(x, y)$  o carregamento normal à superfície e  $D$  a rigidez flexional dada por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2)$$

Onde  $E$  é o módulo de Young,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $h$  a espessura da placa. As deformações e as curvaturas da placa são dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; & \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; & \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; & \chi_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

As variáveis  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  referem-se as deformações de membrana e transversais respectivamente,  $\gamma_{xy}$  as distorções,  $\kappa_x$  e  $\kappa_y$  as curvaturas flexionais,  $\chi_y$  as curvaturas torcionais e  $z$  é a distância do centro de gravidade até o ponto de análise na seção transversal. As tensões e deformações são baseadas na Lei de Hooke, e podem ser expressas por:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y); \quad (4)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x);$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 - \nu)} \gamma_{xy}.$$

Os esforços na placa são obtidos a partir da integração das tensões no domínio da estrutura, na qual se obtém a relação entre rigidez flexional e curvaturas, dadas por:

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz$$

$$m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz; \quad (5)$$

$$m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz.$$

Em que  $m_x$  é o momento fletor na direção  $L_x$ ,  $m_y$  o momento fletor na direção  $L_y$  e  $m_{xy}$  o momento fletor cruzado entre os planos.

Um método de energia desenvolvido por Ritz aplica o princípio de energia potencial mínima, caracterizado pelo fato de que todos os deslocamentos que satisfaçam as condições de contorno são as deflexões procuradas pertinentes para as condições de equilíbrio estável. Decorrente disso, este procedimento de minimização produz equações algébricas nos coeficientes indeterminados dos quais os parâmetros desconhecidos podem ser calculados Szilard [5]. As equações de equilíbrio estático podem ser resolvidas através do procedimento de Ritz através da função Lagrangeana ( $\Gamma$ ), dada por:

$$\Gamma = U - V \quad (6)$$

Em que  $U$  é a energia de deformação da placa e  $V$  é a parcela de energia obtida através do trabalho realizado pelo carregamento externo aplicado na placa. A energia de deformação  $U$  é representada pela soma entre a energia de deformação flexional ( $U_b$ ) e de membrana ( $U_m$ ), ou seja, ( $U=U_m+U_b$ ), dadas por:

$$U_m = \frac{1}{2} \iint_{(A)} (n_x \varepsilon_x + n_y \varepsilon_y + n_{xy} \gamma) dx dy \quad (7)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \iint_{(A)} (m_x \kappa_x + m_y \kappa_y + 2 m_{xy} \chi) dx dy \quad (8)$$

A parcela de energia obtida através do trabalho realizado pelo carregamento externo ( $V$ ) aplicado na placa é dada por:

$$V_1 = - \left[ \iint_{(A)} (p_x u + p_y v + p_z w) dx dy + \sum_i P_i \Delta_i + \sum_i M_i \theta_i \right] \quad (9)$$

Onde  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  é são os carregamentos linearmente distribuídos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\Delta_i$  e  $\theta_i$  são as correspondentes componentes de deslocamento,  $P_i$  e  $M_i$  são cargas concentradas e momento concentrado aplicados na direção normal, sendo que o índice  $i$  remete-

se a quantidade das respectivas cargas.

Os deslocamentos normais a superfície para uma placa apoiada nas quatro bordas foi assumida pela aproximação em série conforme equação dada por:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_y}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_x}\right) \quad (10)$$

Sendo que  $w_{mn}$  é a amplitude de deslocamento,  $m$  é o número de semi-ondas na direção longitudinal (maior vão),  $n$  o número de semi-ondas na direção transversal (menor vão).

Portanto, para avaliar a resolução analítica é empregado o procedimento de Ritz na função Lagrangiana e minimizado o funcional em termos da amplitude de deslocamento  $w_{mn}$  da placa. O princípio de Ritz é dado por:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial W_{mn}} = 0 \quad (11)$$

Assim sendo, para a função de  $w(x,y)$  foi adotada uma semi-onda longitudinal ( $m=1$ ) e uma semi-onda transversal ( $n=1$ ) para a deformada estática da placa. A adoção dos primeiros termos ( $m=n=1$ ) da série utilizada representa de forma mais adequada o comportamento da deformada da placa em casos estáticos. Desta forma, uma vez assumido a função deslocamento dada pela Equação (10) e a substituindo nas equações das deformações dada pela Equação (3), pôde-se obter as parcelas de energia representadas pelas Equações (7), (8) e (9), montar o funcional Lagrangeano (balanceamento de energia) dado pela Equação (6) e realizar o procedimento da minimização de Ritz dada pela Equação (11).

Tal etapas e resolução das equações são complexas e extensas, porém quando implementadas em *software* MAPLE<sup>®</sup> tornam a obtenção da amplitude de deslocamento de maneira mais fácil e simples. Por fim, com a amplitude de deslocamento pode-se reescrever os deslocamentos da placa dada pela Equação (10) da seguinte forma:

$$w(x, y) = \frac{16 p_z L_y^4}{D \pi^6 (\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1)} \sin\left(\frac{\pi x}{L_y}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_x}\right) \quad (12)$$

Onde  $\lambda = L_y/L_x$ . Por fim, dispondo dos deslocamentos da equação que representa os deslocamentos, obtém-se a resposta estrutural estática em termos de tensões e esforços apresentadas nas Equação (4) e Equação (5), respectivamente.

### 3 Modelagem Numérica (ANSYS)

A análise numérica foi realizada através do método dos elementos finitos com o uso de *software* comercial ANSYS<sup>®</sup>. Para a modelagem tridimensional da placa foi empregado o elemento SHELL63, no qual este possui quatro nós com seis graus de liberdade em cada nó, dispondo assim da capacidade de contabilizar os efeitos de flexão e de membrana em estruturas delgadas. O módulo solucionador utilizado foi o *Static*. O estudo de convergência da malha foi realizado os resultados são apresentados para a malha que convergiu.

Nas modelagens foram adotadas as seguintes propriedades dos materiais: a placa considerada feita em concreto com módulo de Young  $E=28$  GPa, razão de Poisson  $\nu=0,20$  e massa específica  $\rho=2500$   $kg/m^3$ . No que se diz respeito as propriedades geométricas, foram adotadas: uma placa retangular com dimensões  $L_y=6$  m e  $L_x=4$  m e espessura de  $h=0,12$  m. O carregamento assumido foi  $P_z= 6$   $kN/m^2$  (600  $kg/m^2$ ), oriunda da soma do peso próprio (3  $kN/m^2$ ), sobrecarga de utilização de um edifício residencial (1,5  $kN/m^2$ ) e de uma estimativa de revestimentos de piso e teto (1,5  $kN/m^2$ ). A modelagem numérica pode ser vista na Fig. 2.

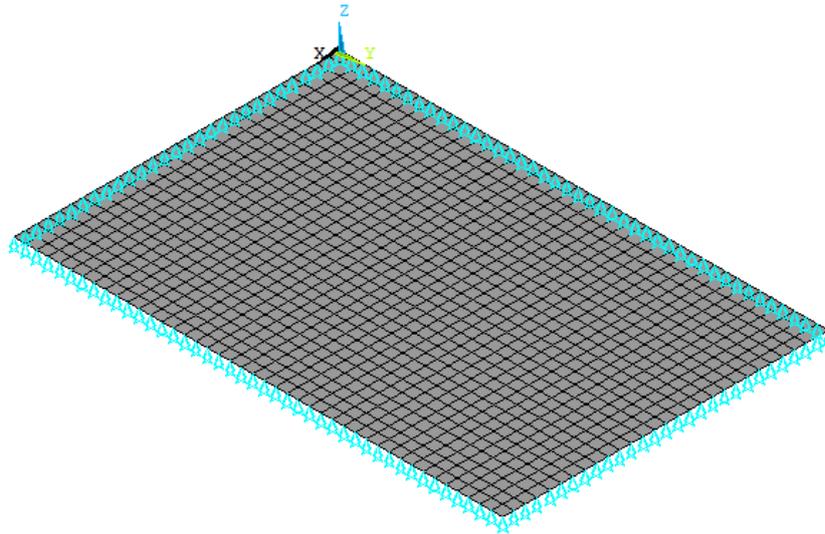


Figura 2. Modelagem numérica da placa.

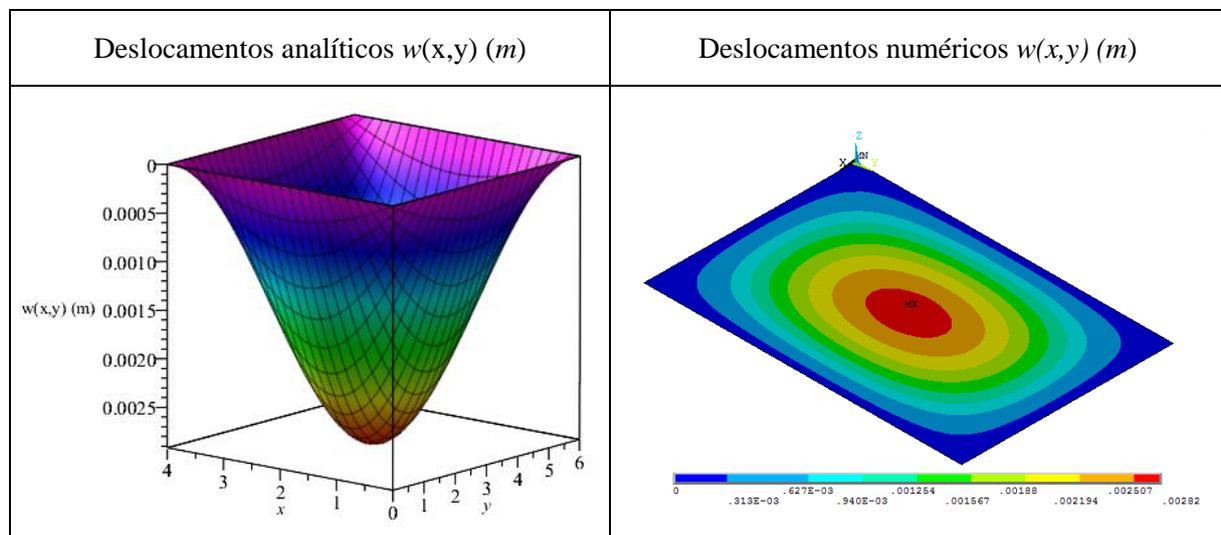
#### 4 Resultados e Discursões

Os resultados são apresentados em termos de deslocamentos, tensões e esforços máximos obtidos pelo procedimento analítico implementado e numérico via ANSYS®. Os resultados são mostrados através da Tabela 1 e na Figura 3 e Figura 4. Para avaliar os resultados da Tabela 1 foi assumido o ponto de máximo deslocamento, máxima tensão e esforço, ou seja, o centro da placa ( $x=2m$  e  $y=3m$ ).

Tabela 1. Resultados comparativos dos valores máximos da resposta estrutural da placa.

$w(x,y)$ (m)	$w(x,y)$ (m)	$\sigma_x$ (KPa)	$\sigma_x$ (KPa)	$\sigma_y$ (KPa)	$\sigma_y$ (KPa)	$M_x$ (N.m)	$M_x$ (N.m)	$M_y$ (N.m)	$M_y$ (N.m)
Analítico	MEF	Analítico	MEF	Analítico	MEF	Analítico	MEF	Analítico	MEF
0,00292	0,00282	3428,96	3140,00	2029,37	1820,00	8229,50	8148,15	4870,52	4518,34
	Dif. 3,5%		Dif. 8,43%		Dif. 10,31%		Dif. 1,0%		Dif. 7,23%

Com base na Tabela 1 é possível observar que os máximos valores para os deslocamentos, tensões e esforços na placa são satisfatórios. Desta forma, afirma-se que a implementação computacional da solução analítica através do cálculo variacional e a discretização numérica pelo MEF foram satisfatórias. As figuras a seguir mostram as distribuições de deslocamentos, tensões e esforços de momento fletor na placa em estudo.



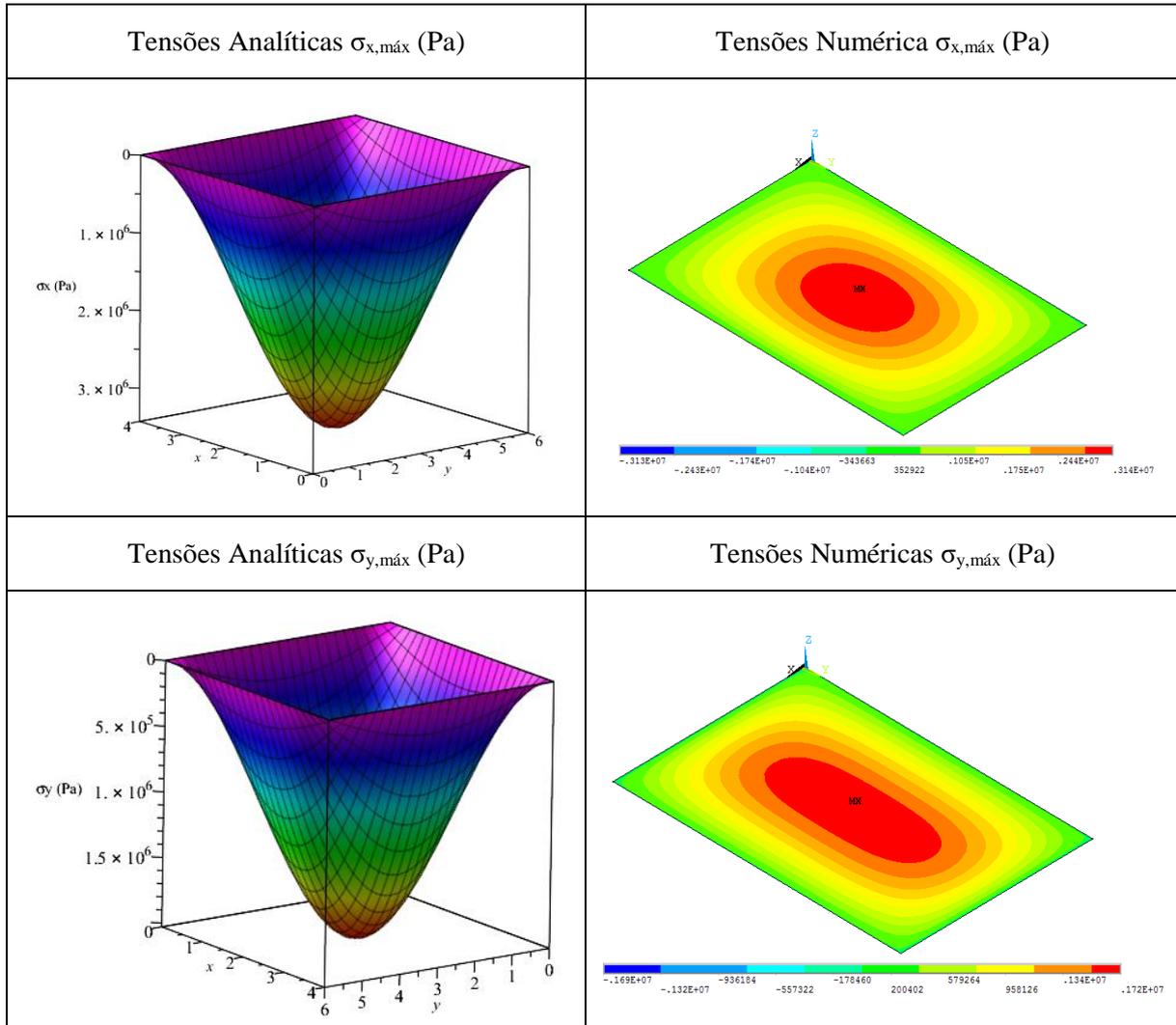
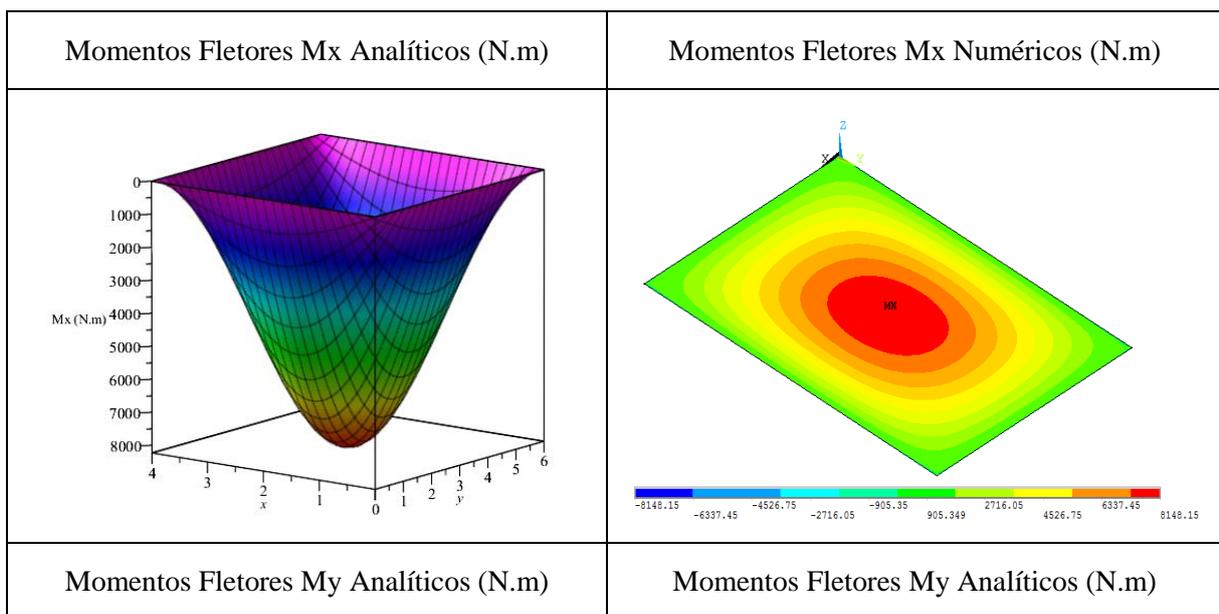


Figura 3. Distribuição tridimensional dos deslocamentos e tensões na placa.



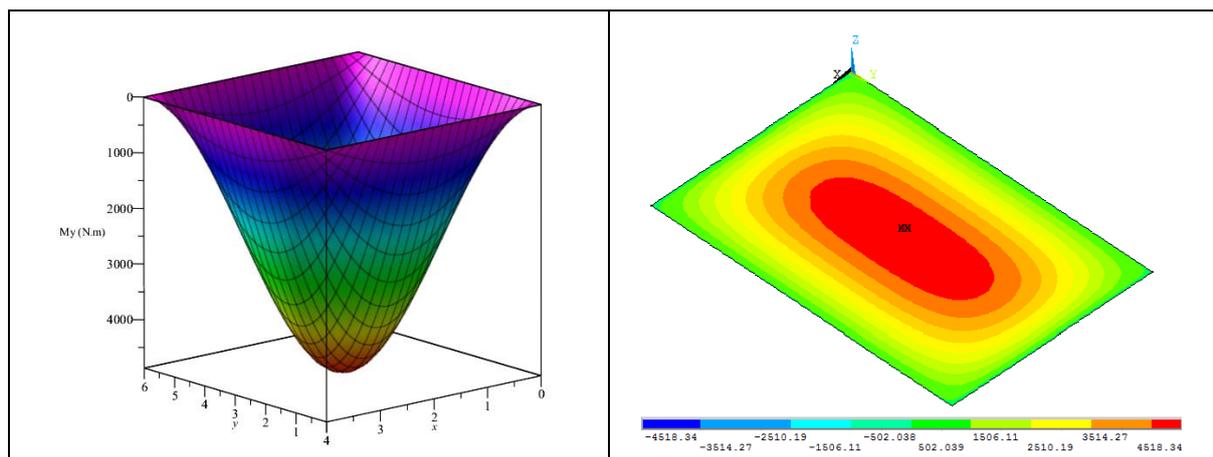


Figura 4. Distribuição tridimensional dos momentos fletores na placa.

## 5 Conclusão

Este trabalho abordou a análise estrutural estática em placas aplicada em uma laje de concreto. A abordagem analítica através da formulação energética, quando comparada ao método dos elementos finitos, obteve variações inferiores a 11%. Em relação às tensões, apesar de próximas, as diferenças entre os métodos apresentaram-se superiores as das demais variáveis, sendo de 10,31% na direção  $y$ , e de 8,43% na direção  $x$ . Para os momentos, encontrou-se variações de 7,23% para o momento em  $y$  e de somente 1,00% para o momento em  $x$ . Já para deslocamentos, a formulação apresentou uma variação de apenas 3,5%

Ambas as análises permitiram visualizar de forma mais abrangente os efeitos de deslocamentos, tensões e esforços no elemento sendo possível afirmar que os métodos empregados seguiram as tendências esperadas e condizem com o fenômeno físico real.

Por fim, afirma-se que este trabalho contribui no sentido de validação das teorias dos métodos tabulares a partir da formulação de energética. Com a implementação da formulação analítica, pode-se estender as análises para outras situações de projeto, como por exemplo, verificar diferentes condições de contorno, carregamento da peça, rigidez e propriedades mecânicas dos materiais constituintes.

Nos dias atuais ferramentas computacionais são utilizadas para melhor estudar essa questão do ponto de vista de obtenção do comportamento de uma estrutura, porém soluções analíticas complexas e as tabelas não acompanharam esse desenvolvimento. Com a presente formulação implementada, objetiva-se então seguir com esse trabalho e melhorar os modelos de tabelas previamente propostos com base da teoria de placas e cascas, dando um enfoque no cenário nacional de propriedades físicas dos materiais conforme as novas prescrições da NBR 6118 (ABNT, 2014).

## Referências

- [1] Navier C.L.M.N. Bulletin des sciences de la societie philomatique de Paris 5, pp 95-102, Extrait des recherché sur la flexion des planes elastiques, 1823.
- [2] Kirchhoff, G. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, J. für reine und angewandte Math. (Crelle's J.), 1850.
- [3] Volokh, K. Yu. "On the Classical Theory of Plates. *Int: Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 58, No.6, pp. 1101–1110, 1994.
- [4] Timoshenko, S.; Woinowsky-Krieger, S. Theory of Plates and Shells. Second edition. McGraw Hill 1959.
- [5] Szilard, Rudolph. Theory and Applications of Plate Analysis – Classical, Numerical and Engineering Methods. New Jersey, United States, Inc. John Wiley & Sons. 2004.

- [6] Love, A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Fourth edition. Dover, 1944.
- [7] Marcus, H.: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten unter besonderer Berücksichtigung der trägerlosen Pilzdecken. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1924.
- [8] Czerny, F. Tafeln für gleichmäßig vollbelastete Rechteckplatten, Bautechnik Archiv, Vol. 11, Berlin, 1955.
- [9] Bares, R. Tablas para el cálculo de placas y vigas pared, Editoriál Gustavo Gili, Barcelona, 1972.
- [10] Soares, Adilson M. Análise comparativa de esforços e deflexões em placas retangulares finas. Dissertação de Mestrado, Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, 2004.
- [11] Araújo, José M. Avaliação dos métodos simplificados para cálculo de lajes maciças apoiadas em vigas flexíveis. Teoria e Prática na Engenharia Civil. Rio Grande, v 12 p. 1-11, out, 2008.
- [12] Gontijo, Guilherme B. Cálculo e análise dos momentos fletores em lajes de concreto armado. 2015. 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização), Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, 2015.
- [13] Leal, Cleber E. F. Formulação do método dos elementos finitos para a análise elástica linear de placas delgadas. 2015. 136 f. Trabalho de Conclusão de Curso, Departamento Acadêmico de Construção Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2015.