



XL CILAMCE
IBERO-LATIN AMERICAN
CONGRESS ON
COMPUTATIONAL
METHODS IN
ENGINEERING

NOVEMBER
11-14, 2019

Praiamar Natal Hotel & Convention
Natal, RN-BRAZIL

ESTRATÉGIA MULTIESCALA PARA DESCRIÇÃO MICROMÓRFICA DO CONTÍNUO A PARTIR DO CONTÍNUO CLÁSSICO

Leandro Lopes da Silva

Roque Luiz da Silva Pitangueira

Samuel Silva Penna

leandro-silva@ufmg.br, roque@dees.ufmg.br, spenna@dees.ufmg.br

Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais

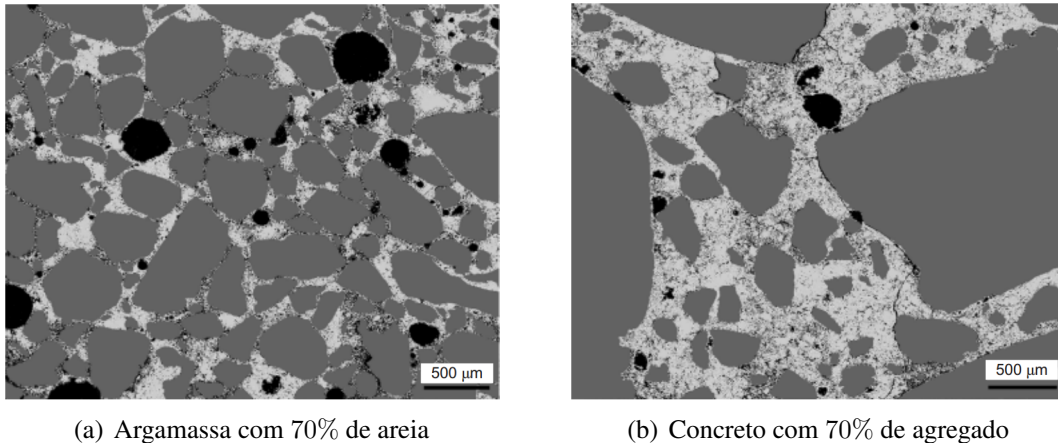
Avenida Antônio Carlos 6627, Pampulha, CEP. 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brasil

Resumo. O comportamento macroscópico dos materiais é função da estrutura que exibem em nível microscópico. A abordagem fenomenológica adotada na teoria do contínuo clássico não considera o comportamento individual dos constituintes da microestrutura, mas propriedades macroscópicas efetivas. Por falta de parâmetros microestruturais, esta teoria não descreve adequadamente materiais com microestrutura complexa ou quando as dimensões estruturais são comparativamente pequenas em relação à sua microestrutura. Neste sentido, diversas teorias de contínuos denominados generalizados foram desenvolvidas, incorporando-se o comportamento microestrutural do meio material. Estas teorias se dividem em dois grupos: (a) as que consideram gradientes de deslocamento de ordem superior e (b) as que adicionam graus de liberdade cinemáticos às partículas materiais. A teoria do contínuo micromórfico, na qual cada partícula material possui nove graus de liberdade cinemáticos adicionais, representa o caso mais geral deste segundo grupo. Esta teoria é adequada à análise de materiais cuja microestrutura se deforma arbitrariamente. A construção heurística do contínuo micromórfico com base em considerações termodinâmicas (ou no princípio dos trabalhos virtuais) está bem estabelecida. No entanto, a identificação das correspondentes leis constitutivas e a determinação do elevado número de parâmetros constitutivos limitam a aplicação prática desta teoria. Neste sentido, este artigo apresenta uma formulação multiescala para obtenção das relações constitutivas micromórficas macroscópicas a partir da solução de problemas de valor de contorno na microescala segundo a teoria do contínuo clássico. O sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), software livre desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, é utilizado na implementação.

Palavras-chave: Comportamento Microestrutural, Contínuos Generalizados, Contínuo Micromórfico, Formulação Multiescala, Sistema INSANE

1 INTRODUÇÃO

O comportamento macroscópico dos materiais é função da estrutura que exibem em nível microscópico. Por exemplo, a resposta global de materiais granulares, como areias e solos em geral, depende do arranjo de seus grãos minerais e fases fluidas na escala microscópica, o comportamento de policristais, como rochas e metais, é determinado pelas orientações preferenciais de sua microestrutura cristalina e a resistência de meios parcialmente frágeis, como argamassas e concretos, é afetada pelo crescimento de vazios e trincas sob a influência de impurezas e heterogeneidades em sua microescala (Figura 1).



(a) Argamassa com 70% de areia

(b) Concreto com 70% de agregado

Figura 1: Microestrutura de misturas à base de cimento (Wong et al., 2009).

O estudo do comportamento dos materiais segundo a teoria do contínuo clássico (Cauchy, 1828) parte do princípio de que a cinemática do meio é descrita por graus de liberdade translacionais das partículas materiais e pelas conseqüentes medidas de deformação avaliadas na vizinhança destas partículas. No contínuo clássico, as partículas materiais são definidas como elementos indeformáveis do meio material, sem estrutura interna e cujas dimensões são pequenas em comparação a todas as dimensões características do meio, de modo que possam ser idealizadas como pontos matemáticos (Eringen, 1967; Mal e Singh, 1991; Borelli et al., 2011).

Na descrição estática deste contínuo, as relações constitutivas são construídas associando-se ao conceito de ponto material o conceito de Elemento de Volume Representativo (EVR) (Hill, 1963; Hashin, 1964, 1983; Kröner, 1977; Willis, 1981). Ou seja, considera-se que o ponto material representa o menor volume estatisticamente representativo da microestrutura, a partir do qual propriedades efetivas de um modelo macroscópico homogeneizado são determinadas (Kanit et al., 2003; Gitman et al., 2004). O tamanho do EVR varia em função da complexidade da microestrutura do material. Por exemplo, a ordem de grandeza do EVR para metais é $0,1 \text{ mm}^3$ e para concretos 100 mm^3 (Lemaitre, 1992; Lemaitre e Desmorat, 2005).

A abordagem fenomenológica adotada nas descrições cinemática e estática do contínuo clássico não considera o comportamento individual dos constituintes da microestrutura, mas propriedades macroscópicas efetivas. Na análise de estruturas usuais da engenharia, esta abordagem é suficiente, especialmente quando combinada com elaborados modelos constitutivos que consideram o comportamento complexo do material. No entanto, pela conseqüente falta de parâmetros microestruturais, este *modus operandi* fenomenológico funciona bem se as propriedades do material forem bem caracterizadas pelo conceito de EVR e se as dimensões macroscópicas do meio e as da microestrutura se diferirem por muitas ordens.

Por consequência, a teoria do contínuo clássico não descreve adequadamente materiais com microestrutura complexa ou quando as dimensões estruturais são comparativamente pequenas em relação à sua microestrutura (Hirschberger, 2008).

Neste sentido, com o objetivo de se incorporar o comportamento microestrutural na descrição do meio material, diversas teorias de contínuos denominados generalizados foram desenvolvidas. Os diversos contínuos generalizados propostos podem ser divididos em dois grandes grupos (Germain, 1973a,b; Forest, 1998; Tekoğlu, 2007; Hirschberger, 2008): (a) Contínuos de Gradiente Superior - que consideram gradientes de deslocamento de ordem superior; e (b) Contínuos de Ordem Superior - que adicionam graus de liberdade cinemáticos às partículas materiais.

A teoria do contínuo micromórfico, proposta de forma independente por Mindlin (1964) e Eringen e Şuhubi (1964a,b), representa o caso mais geral deste segundo grupo (Germain, 1973b; Eringen, 1999; Forest e Sievert, 2006; Hirschberger, 2008; Forest, 2013). Nesta teoria, cada partícula possui nove graus de liberdade cinemáticos adicionais, decorrentes das microdeformações, sendo adequada à análise de meios cuja microestrutura se deforma arbitrariamente (Mindlin, 1964; Eringen, 1999; Kirchner e Steinmann, 2005; Hirschberger, 2008).

A construção do contínuo micromórfico com base em considerações termodinâmicas macroscópicas está bem estabelecida (Mindlin, 1964; Eringen e Şuhubi, 1964a,b; Eringen, 1964, 1999; Eringen e Kafadar, 1976; Germain, 1973b; Hütter, 2016, 2017). Nesta formulação, surgem tensões generalizadas nas equações de equilíbrio adicionais, o que requer a identificação das leis constitutivas adicionais correspondentes. Além da identificação das leis constitutivas adicionais, é necessária a determinação do consequente elevado número de parâmetros constitutivos desta teoria. Um sólido micromórfico linear elástico isotrópico, por exemplo, requer a determinação de dezoito parâmetros elásticos (Eringen, 1999; Isbuga e Regueiro, 2011), em contraposição aos dois coeficientes elásticos de Lamé necessários na teoria clássica. Segundo Kalampakas e Aifantis (2014) e Hütter (2017), a determinação do elevado número de parâmetros constitutivos tem sido o limitante da aplicação prática da teoria micromórfica.

Como alternativa para se contornar esta limitação, com base no trabalho de Hütter (2017, 2019), desenvolve-se uma estratégia multiescala para obtenção das relações constitutivas micromórficas macroscópicas, em especial, os módulos constitutivos, por meio da solução de problemas de valor de contorno na microescala segundo a teoria do contínuo clássico. A partir do problema de valor de contorno macroscópico, impõem-se condições para construção de problemas de valor de contorno em microrregiões do macrodomínio representativas da microescala do meio material, cujas soluções segundo a teoria do contínuo clássico são devolvidas para a macroescala como relações constitutivas em termos de grandezas microscópicas homogeneizadas, definidas de modo que o macrodomínio se comporte como um contínuo micromórfico. Esta estratégia se inicia por meio de modelos do contínuo clássico na microescala, sem se fazer nenhum pressuposto constitutivo na macroescala. Consequentemente, os parâmetros materiais necessários são os da teoria clássica, bem como é possível se adotar modelos constitutivos consagrados desta teoria. As heterogeneidades observadas na microescala e o comportamento não linear de seus constituintes podem ser incorporados naturalmente nesta abordagem.

Para a implementação, empregou-se o sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), software livre desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais.

2 Contínuo Micromórfico

Um contínuo micromórfico é uma coleção contínua de partículas deformáveis. Estas partículas, embora deformáveis, não violam o conceito de continuidade da matéria. Fisicamente, as partículas materiais são pontuais, ou seja, têm dimensões desprezáveis. No entanto, para se representar a deformação de partículas pontuais, ao invés de pontos matemáticos sem dimensões na macroescala, consideram-se pontos geométricos P de dimensões finitas e alguns vetores incorporados à P que indicam as orientações e deformações dos pontos materiais de P .

2.1 Cinemática da Deformação

Na teoria micromórfica, uma partícula material $P(\mathbf{X}, \Xi) \in B$ é caracterizada pelo seu centro de massa C e pelo seu vetor incorporado Ξ , em que o ponto C é identificado por suas coordenadas retangulares X_K ($K = 1, 2, 3$) e o vetor Ξ por seus componentes Ξ_K ($K = 1, 2, 3$). Sob solicitações, movimento acompanhado de deformação do meio ocorre, carregando a partícula material $P(\mathbf{X}, \Xi)$ continuamente para $p(\mathbf{x}, \xi, t)$ em uma configuração espacial b , tal que $X_K \rightarrow x_k, \Xi_K \rightarrow \xi_k$ ($K = 1, 2, 3, k = 1, 2, 3$) (Figura 2).

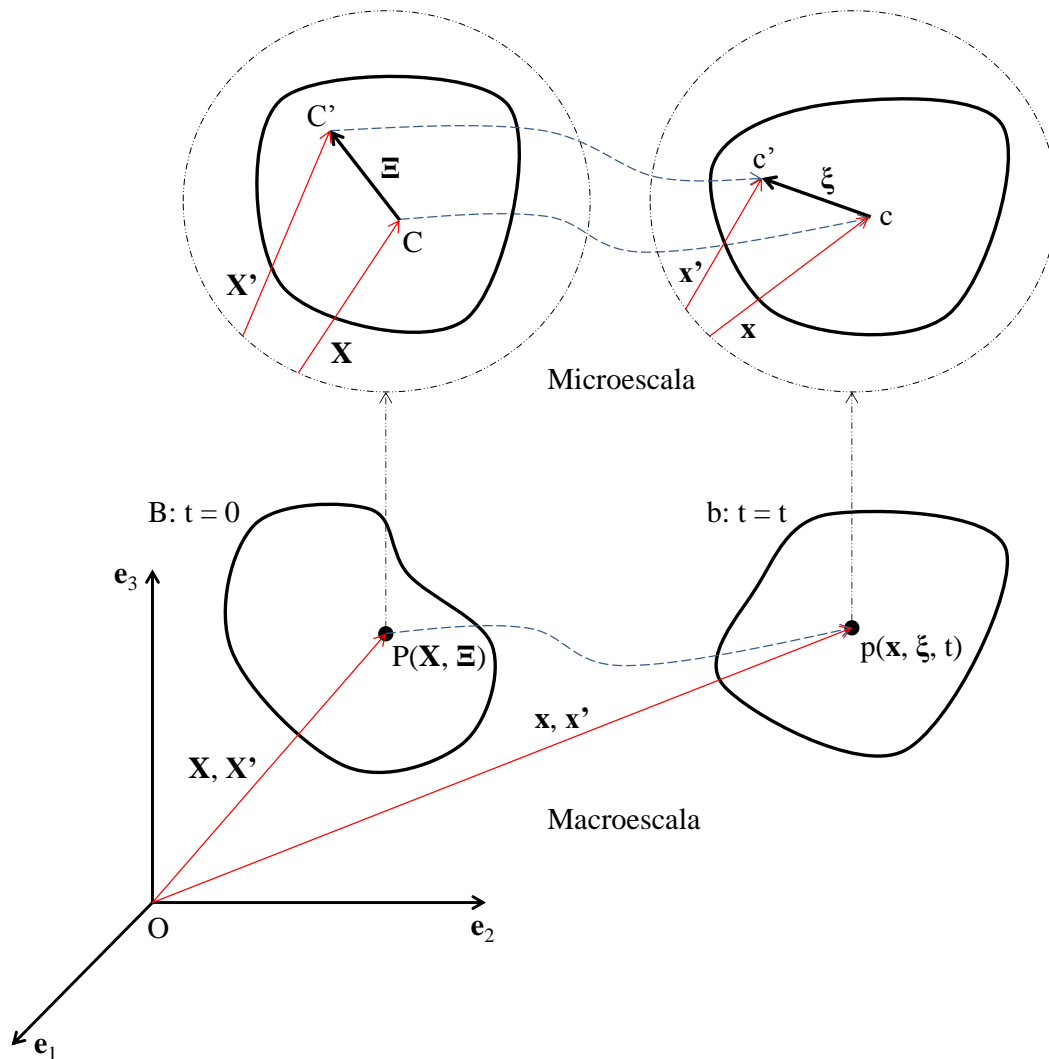


Figura 2: Cinemática do contínuo micromórfico (adaptado de Eringen (1999)).

O movimento de um ponto material $C' \in P$ de coordenadas X'_K ($K = 1, 2, 3$) é descrito pelo movimento do centro de massa da partícula e o movimento internamente à partícula

$$x'_k = x_k(\mathbf{X}, t) + \xi_k(\mathbf{X}, \Xi, t) := x_k(\mathbf{X}, t) + \chi_{kK}(\mathbf{X}, t)\Xi_K \quad (1)$$

em que $\chi_{kK}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial \xi_k}{\partial \Xi_K} \right|_{\Xi=0}$ é chamado tensor gradiente de microdeformação.

O deslocamento \mathbf{u}' do ponto material $C' \rightarrow c'$ devido ao movimento (1) é dado pela diferença entre a sua posição final e a inicial, isto é,

$$u'_k = u_k(\mathbf{X}, t) + \phi_{kK}(\mathbf{X}, t)\Xi_K \quad (2)$$

em que

u_k é o vetor de deslocamento translacional do centro de massa da partícula material;

$\phi_{kK} = \chi_{kK} - \delta_{kK}$ é o tensor gradiente de microdeslocamento.

2.2 Elasticidade Micromórfica Linear

A partir da cinemática da deformação apresentada na Subseção 2.1, Eringen e Şuhubi (1964a,b) construíram diversos conjuntos de tensores de deformação. Um desses conjuntos, no contexto da teoria da elasticidade linear, que conduz a resultados um pouco mais simples, particularmente nas equações constitutivas, é

$$\epsilon_{kl} = u_{l,k} - \phi_{lk}, \quad 2e_{kl} = \phi_{kl} + \phi_{lk}, \quad \gamma_{klm} = \phi_{kl,m} \quad (3)$$

em que

ϵ_{kl} é chamado tensor de deformação relativa (macro-micro);

e_{kl} é chamado tensor de microdeformação;

γ_{klm} é chamado gradiente de microdeformação.

De modo que a função densidade de energia de deformação U_0 pode ser suposta como

$$U_0 \approx \frac{1}{2}A_{klmn}\epsilon_{kl}\epsilon_{mn} + \frac{1}{2}B_{klmn}e_{kl}e_{mn} + \frac{1}{2}C_{klmnpq}\gamma_{klm}\gamma_{npq} + \\ + E_{klmn}\epsilon_{kl}e_{mn} + F_{klmnp}\epsilon_{kl}\gamma_{mnp} + G_{klmnp}e_{kl}\gamma_{mnp} \quad (4)$$

em que A_{klmn} , B_{klmn} , C_{klmnpq} , E_{klmn} , F_{klmnp} e G_{klmnp} são módulos constitutivos.

Da Equação (4), pode-se definir os tensores de tensão da teoria da elasticidade micromórfica linear, conjugados energéticos de ϵ_{kl} , e_{kl} e γ_{klm} , isto é

$$t_{kl} \approx \frac{\partial U_0}{\partial \epsilon_{kl}} = A_{klmn} \epsilon_{mn} + E_{klmn} e_{mn} + F_{klmnp} \gamma_{mnp} \quad (5)$$

$$s_{kl} \approx \frac{\partial U_0}{\partial e_{kl}} = E_{mnkl} \epsilon_{mn} + B_{klmn} e_{mn} + G_{klmnp} \gamma_{mnp} \quad (6)$$

$$m_{klm} \approx \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{lmk}} = F_{nplmk} \epsilon_{np} + G_{nplmk} e_{np} + C_{lmknpq} \gamma_{npq} \quad (7)$$

em que

t_{kl} é chamado tensor de tensão;

s_{kl} é chamado tensor de microtensão média;

m_{klm} é chamado tensor de tensão-momento.

Para o caso de um sólido micromórfico linear elástico isotrópico, os módulos constitutivos de ordem ímpar desaparecem e os de ordem par são construídos por meio de produtos do delta de Kronecker δ_{kl} , isto é

$$\begin{aligned} A_{klmn} &= \lambda \delta_{kl} \delta_{mn} + (\mu + \kappa) \delta_{km} \delta_{ln} + \mu \delta_{kn} \delta_{lm}, \\ E_{klmn} &= (\lambda + \nu) \delta_{kl} \delta_{mn} + (\mu + \sigma) (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}), \\ F_{klmnp} &= 0, \\ B_{klmn} &= (\lambda + 2\nu + \tau) \delta_{kl} \delta_{mn} + (\mu + 2\sigma + \eta) (\delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{kn} \delta_{lm}), \\ G_{klmnp} &= 0, \\ C_{klmnpq} &= \tau_1 (\delta_{kl} \delta_{mn} \delta_{pq} + \delta_{kq} \delta_{lm} \delta_{np}) + \tau_2 (\delta_{kl} \delta_{mp} \delta_{nq} + \delta_{km} \delta_{lp} \delta_{nq}) + \\ &+ \tau_3 \delta_{kl} \delta_{mq} \delta_{np} + \tau_4 \delta_{kn} \delta_{lm} \delta_{pq} + \tau_5 (\delta_{km} \delta_{ln} \delta_{pq} + \delta_{kp} \delta_{lm} \delta_{nq}) + \\ &+ \tau_6 \delta_{km} \delta_{lp} \delta_{nq} + \tau_7 \delta_{kn} \delta_{lp} \delta_{mq} + \tau_8 (\delta_{kp} \delta_{lq} \delta_{mn} + \delta_{kq} \delta_{ln} \delta_{mp}) + \\ &+ \tau_9 \delta_{kn} \delta_{lq} \delta_{mp} + \tau_{10} \delta_{kp} \delta_{ln} \delta_{mq} + \tau_{11} \delta_{kq} \delta_{lp} \delta_{mn} \end{aligned} \quad (8)$$

em que $\lambda, \mu, \kappa, \nu, \sigma, \tau, \eta$ e $\tau_1 \dots \tau_{11}$ são 18 parâmetros elásticos.

As equações de equilíbrio estático podem ser obtidas com base em considerações termodinâmicas, conforme em Eringen (1999), por meio do princípio dos trabalhos virtuais, conforme em Germain (1973b), ou ainda pelo princípio da energia potencial total estacionária (Silva, 2019)

$$t_{kl,k} + \rho f_l = 0; \quad m_{klm,k} + t_{ml} - s_{ml} + \rho l_m = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{V} \quad (9)$$

em que ρf_l e ρl_m são, respectivamente, força e momento de corpo por unidade de volume.

2.3 Abordagem por Elementos Finitos

Conforme Hirschberger (2008), Isbuga e Regueiro (2011) e Ansari et al. (2016), na abordagem da teoria micromórfica segundo o Método dos Elementos Finitos (MEF), definem-se interpolações independentes para o macro e micromovimento

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d}_u; \quad \boldsymbol{\phi} = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{d}_\phi \quad (10)$$

em que

\mathbf{u} é o vetor de deslocamento translacional do centro de massa da partícula material;

$\boldsymbol{\phi}$ é o tensor gradiente de microdeslocamento no formato vetorial;

\mathbf{N} é a matriz das funções interpoladoras (funções de forma) do macromovimento;

$\bar{\mathbf{N}}$ é a matriz das funções interpoladoras (funções de forma) do micromovimento;

\mathbf{d}_u é o vetor dos graus de liberdade macroscópicos;

\mathbf{d}_ϕ é o vetor dos graus de liberdade microscópicos.

A partir das interpolações (10), os campos de deformação (3) e de tensão (5) - (7) podem ser aproximados por

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}_u \mathbf{d}_u - \bar{\mathbf{N}}_T \mathbf{d}_\phi, \quad \mathbf{e} = \bar{\mathbf{N}}_S \mathbf{d}_\phi, \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}_\phi \mathbf{d}_\phi \quad (11)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{A} (\mathbf{B}_u \mathbf{d}_u - \bar{\mathbf{N}}_T \mathbf{d}_\phi) + \mathbf{E} \bar{\mathbf{N}}_S \mathbf{d}_\phi, \quad \mathbf{s} = \mathbf{E}^T (\mathbf{B}_u \mathbf{d}_u - \bar{\mathbf{N}}_T \mathbf{d}_\phi) + \mathbf{B} \bar{\mathbf{N}}_S \mathbf{d}_\phi$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{C} \mathbf{B}_\phi \mathbf{d}_\phi \quad (12)$$

em que

$\mathbf{A}_{(9 \times 9)}$, $\mathbf{B}_{(9 \times 9)}$, $\mathbf{C}_{(27 \times 27)}$ e $\mathbf{E}_{(9 \times 9)}$ são as matrizes constitutivas de um sólido micromórfico linear elástico isotrópico, construídas por meio dos 18 parâmetros elásticos dados na Equação (8);

\mathbf{B}_u e \mathbf{B}_ϕ são matrizes de aproximação das deformações, e

$\bar{\mathbf{N}}_T$ e $\bar{\mathbf{N}}_S$ são matrizes das funções interpoladoras do micromovimento, respectivamente, “transposta” e “simétrica”

$$\mathbf{B}_u = \mathbf{M} \mathbf{L}_u \mathbf{N}, \quad \mathbf{B}_\phi = \mathbf{L}_\phi \bar{\mathbf{N}}, \quad \bar{\mathbf{N}}_T = \mathbf{M} \bar{\mathbf{N}}, \quad \bar{\mathbf{N}}_S = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{N}} + \bar{\mathbf{N}}_T) \quad (13)$$

em que \mathbf{M} é uma matriz de rearranjo, introduzida para o cômputo adequado dos componentes de deformação no formato vetorial, e \mathbf{L}_u e \mathbf{L}_ϕ são operadores diferenciais ($\partial_i = \partial/\partial X_i$), estruturados segundo definição dos componentes de deformação (Silva, 2019).

O sistema de equações lineares pode ser obtido impondo-se condição de equilíbrio energético por meio das aproximações (10), (11) e (12), resultando na formulação fraca aplicável aos problemas estáticos da teoria da elasticidade micromórfica linear

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_u \\ \mathbf{d}_\phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{eq,u} \\ \mathbf{f}_{eq,\phi} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

em que

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B}_u^T \mathbf{A} \mathbf{B}_u dv \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{B}_u^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{N}}_S - \mathbf{B}_u^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{N}}_T) dv \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_{\phi u} = \int_{\mathcal{V}} (\bar{\mathbf{N}}_S^T \mathbf{E}^T \mathbf{B}_u - \bar{\mathbf{N}}_T^T \mathbf{A} \mathbf{B}_u) dv = \mathbf{K}_{u\phi}^T \quad (17)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi} = \int_{\mathcal{V}} (\bar{\mathbf{N}}_T^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{N}}_T - \bar{\mathbf{N}}_T^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{N}}_S - \bar{\mathbf{N}}_S^T \mathbf{E}^T \bar{\mathbf{N}}_T + \bar{\mathbf{N}}_S^T \mathbf{B} \bar{\mathbf{N}}_S + \mathbf{B}_\phi^T \mathbf{C} \mathbf{B}_\phi) dv \quad (18)$$

$$\mathbf{f}_{eq,u} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{f} dv + \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}}_{(n)} ds \quad (19)$$

$$\mathbf{f}_{eq,\phi} = \int_{\mathcal{V}} \bar{\mathbf{N}}^T \rho \mathbf{l} dv + \int_{\partial\mathcal{V}} \bar{\mathbf{N}}^T \hat{\mathbf{m}}_{(n)} ds \quad (20)$$

sendo $\rho \mathbf{f}$ e $\hat{\mathbf{t}}_{(n)}$ os vetores de força, respectivamente, de corpo por unidade de volume e de superfície (vetor de tensão), e $\rho \mathbf{l}$ e $\hat{\mathbf{m}}_{(n)}$ os tensores de momento, respectivamente, de corpo por unidade de volume e de superfície, no formato vetorial.

A formulação analítica da teoria micromórfica, assim como a discreta, está bem estabelecida na literatura, no entanto, a determinação do elevado número de parâmetros constitutivos tem limitado a sua aplicação prática.

Como alternativa para se contornar esta limitação, apresenta-se na Seção 3 uma estratégia de homogeneização micromórfica que consiste em uma formulação multiescala para construção das relações constitutivas micromórficas macroscópicas, em especial, dos módulos constitutivos em termos de grandezas microscópicas homogeneizadas para emprego na abordagem discreta da teoria micromórfica, a partir da solução de problemas de valor de contorno na microescala segundo a teoria do contínuo clássico. Esta estratégia se baseia na homogeneização micromórfica de Hütter (2017, 2019).

3 HOMOGENEIZAÇÃO MICROMÓRFICA

Hütter (2017, 2019), em sua estratégia (multiescala) de homogeneização micromórfica, define as seguintes relações macro-micro para construção dos componentes de tensão da teoria micromórfica a partir da tensão de Cauchy da teoria clássica que governa o problema na microescala

$$\bar{t}_{kl} := [\langle \sigma_{il} \rangle_S]_{kl}, \quad \bar{s}_{kl} := [\langle \sigma_{kl} \rangle_V]_{kl}, \quad \bar{m}_{klm} := [\langle \sigma_{il} \Xi_m \rangle_S]_{klm} \quad (21)$$

em que

$$\langle \circ \rangle_V = \frac{1}{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \circ dv(\mathbf{x}') \quad (22)$$

$$[\langle \circ_i \rangle_S]_k = \frac{1}{\Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \int_{\partial \Delta \mathcal{V}(\mathbf{X})} \Xi_k \circ_i n_i ds(\mathbf{x}') \quad (23)$$

são operadores, respectivamente, de média no volume e de superfície¹.

Estas relações são obtidas estendendo as equações de equilíbrio da teoria clássica que regem o problema de valor de contorno da microescala para a macroescala (Hütter, 2017, 2019). Impondo-se a condição de Hill-Mandel, ou seja, a equivalência da densidade de energia entre as escalas micro e macro, definem-se os componentes de deformação da teoria micromórfica por homogeneização em termos do campo de deslocamento e de seu gradiente na microescala

$$\bar{\epsilon}_{kl} = \bar{u}_{l,k} - \bar{\phi}_{lk} = [\langle u_{l,k}^i \rangle_V]_{lk} - [\langle \Xi_i u_l^i \rangle_V]_{il} G_{ki}^{-1} \quad (24)$$

$$2\bar{e}_{kl} = \bar{\phi}_{kl} + \bar{\phi}_{lk} = [\langle \Xi_i u_k^i \rangle_V]_{ik} G_{li}^{-1} + [\langle \Xi_i u_l^i \rangle_V]_{il} G_{ki}^{-1} \quad (25)$$

$$\bar{\gamma}_{lmk} = \bar{\phi}_{lm,k} = [\langle \Xi_i u_{l,j}^i \rangle_V]_{ilj} \left[\frac{1}{4} \delta_{kj} G_{mi}^{-1} + \frac{1}{4} \delta_{mj} G_{ki}^{-1} - \frac{1}{2(2+n)} \delta_{ji} G_{km}^{-1} \right] \quad (26)$$

em que

$G_{nk} = [\langle \Xi_n \Xi_k \rangle_V]_{nk}$ é o momento geométrico de segunda ordem;

$n = \delta_{ii}$ é a dimensão do espaço.

¹O operador de superfície tal como apresentado é proposto em Hütter (2017), definido de forma similar em Kouznetsova et al. (2002) e em Li (2011).

Para a formulação da estratégia, adota-se uma aproximação polinomial cúbica para o campo de deslocamento microscópico, tal como usualmente se assume em homogeneizações micromórficas (Forest e Sab, 1998; Forest, 2002, 2005; Jänicke et al., 2009; Forest e Trinh, 2011; Hütter et al., 2014)

$$u_l^i := a_l + b_{lm}\Xi_m + \frac{1}{2}c_{lmn}\Xi_m\Xi_n + \frac{1}{3}d_{l\alpha}\delta_{\alpha mno}\Xi_m\Xi_n\Xi_o \quad (27)$$

em que

a_l, b_{lm}, c_{lmn} e $d_{l\alpha}$ são constantes;

$\delta_{\alpha mno}$ é o delta de Kronecker de quarta ordem, definido como

$$\delta_{\alpha mno} = \begin{cases} 1, & \alpha = m = n = o \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (28)$$

Introduzindo-se a aproximação (27) nas definições (24) - (26), observando-se que $\langle \Xi^p \rangle_V = 0$ para todo p ímpar, têm-se

$$d_{l\alpha} = J_{\alpha k}^{-1} \bar{\epsilon}_{kl}, \quad b_{lk} = \bar{\phi}_{lk} + K_{pk} \bar{\epsilon}_{pl}, \quad c_{lmk} = H_{mkin}^{-1} \bar{\gamma}_{lin} \quad (29)$$

em que²

$G_{imno} = [\langle \Xi_i \Xi_m \Xi_n \Xi_o \rangle_V]_{imno}$ é o momento geométrico de quarta ordem;

$H_{mkin} = \frac{1}{2} \delta_{mi} \delta_{kn} - \frac{1}{2(2+n)} G_{mk}^{-1} G_{in}$ é a relação geométrica entre c_{lin} e $\bar{\gamma}_{lmk} = \bar{\phi}_{lm,k}$;

$J_{\alpha k} = \delta_{\alpha mno} \left(\delta_{ok} G_{mn} - \frac{1}{3} G_{imno} G_{ki}^{-1} \right)$ é a relação geométrica entre $d_{l\alpha}$ e $\bar{\epsilon}_{kl}$;

$K_{pk} = \delta_{pk} - J_{\alpha p}^{-1} \delta_{\alpha kmn} G_{mn}$ é a relação geométrica entre b_{lk} e $\bar{\epsilon}_{pl}$.

Retornando-se à aproximação (27) com as constantes dadas na Equação (29), determinam-se aproximações para as variáveis de estado microscópicas em termos dos componentes de deformação micromórficos macroscópicos

²Quando a geometria do microcontínuo implica em $G_{ij} = G\delta_{ij}$, ou seja, momento geométrico de segunda ordem dado por um tensor esférico, tem-se: $H_{mkin} = \frac{1}{2} \delta_{mi} \delta_{kn} - \frac{1}{2(2+n)} \delta_{mk} \delta_{in}$.

$$u_{i,k} = (K_{pk} + J_{\alpha p}^{-1} \delta_{\alpha kmn} \Xi_m \Xi_n) \bar{\epsilon}_{pl} + \bar{\phi}_{lk} + H_{mkin}^{-1} \Xi_m \bar{\gamma}_{lin} \quad (30)$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} [(K_{pk} + J_{\alpha p}^{-1} \delta_{\alpha kmn} \Xi_m \Xi_n) \bar{\epsilon}_{pl} + \bar{\phi}_{lk} + H_{mkin}^{-1} \Xi_m \bar{\gamma}_{lin}] \quad (31)$$

em que D_{ijkl} é o módulo constitutivo clássico (tensor elástico (Mal e Singh, 1991)) da lei de Hooke generalizada $\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} = D_{ijkl} u_{i,k}$.

A partir da aproximação para os componentes de tensão de Cauchy (31) no microcontínuo, pode-se, então, determinar os componentes dos tensores de tensão generalizada por homogeneização (21) em termos dos componentes de deformação micromórficos macroscópicos. Logo, finalmente, determinam-se os módulos constitutivos submetendo a aproximação (31) a estados elementares de deformação, ou seja, a componente por componente de deformação micromórfico macroscópico com valor unitário, determinando-se os componentes de tensão generalizada, que são os termos da correspondente coluna dos módulos.

Estratégia análoga é empregada em Rodrigues et al. (2018), em que, por meio de soluções sucessivas do problema de valor de contorno na microescala a partir de estados elementares de deformação, constroem-se os parâmetros macroscópicos do contínuo de Cauchy adotando o próprio contínuo de Cauchy na microescala, e, em Trovalusci et al. (2015), em que se constroem os parâmetros macroscópicos do micropolar a partir do próprio micropolar na microescala.

Observa-se, a partir da aproximação (31) nas Equações (21) que a estratégia proposta respeita o desacoplamento observado em meio isotrópico do conjugado energético tensão-momento/gradiente de microdeformação dos demais.

Em análise fisicamente não linear, o procedimento para construção dos módulos constitutivos micromórficos é o mesmo, sendo o estado do material determinado por meio de modelos constitutivos consagrados da teoria do contínuo clássico a partir da aproximação (30) construída com o estado de deformação macroscópico corrente.

Esta estratégia foi implementada no sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), software livre desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais. Maiores detalhes sobre a descrição deste sistema podem ser encontrados em Penna (2007); Fonseca (2008); Silva (2016).

Para modelagem da degradação do material, emprega-se o arcabouço teórico e computacional para modelos constitutivos baseados em degradação elástica do sistema INSANE, desenvolvido por Penna (2011).

As etapas da estratégia de homogeneização micromórfica estão esquematizadas na Figura 3 no contexto de uma análise fisicamente não linear. Para o cômputo da degradação na iteração “j” do passo “i”, parte-se da transição macro-micro, em que se determina o estado do material constituinte da microescala em função do seu estado de deformação dado pelo estado de deformação corrente da macroescala. Os módulos constitutivos micromórficos, construídos por meio de estados elementares de deformação, são então devolvidos para a macroescala na transição micro-macro.

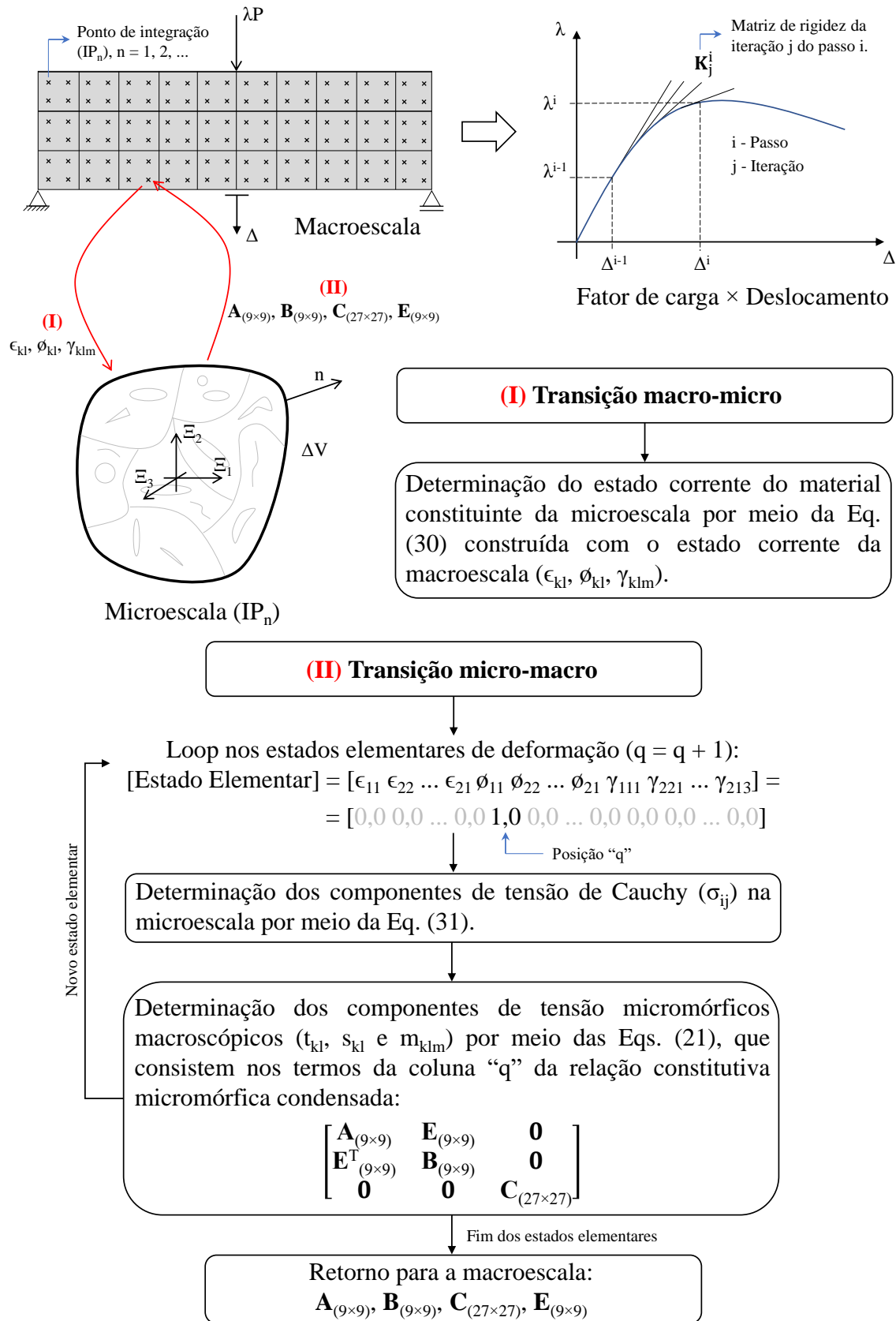


Figura 3: Estratégia de homogeneização micromórfica em análise fisicamente não linear.

4 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Os meios parcialmente frágeis são assim classificados por exibirem o fenômeno de amolecimento. A aproximação clássica utilizada para descrever este comportamento consiste em converter a curva carga \times deslocamento, representativa da amostra ensaiada, numa curva tensão \times deformação, representativa do ponto material. Na forma fraca, constata-se que este procedimento torna o problema de valor de contorno mal posto, resultando em soluções dependentes do refinamento da malha (de Borst, 1993), podendo-se alcançar um caso limite de discretização em que as deformações tendam a se localizar numa região de dimensão infinitesimal, sendo a energia dissipada considerada nula, impossibilitando o prosseguimento da análise. Este fenômeno numérico é chamado localização de deformações numericamente induzida e é recorrente em modelagens de meios parcialmente frágeis por meio da forma fraca da teoria clássica.

Sendo o contínuo micromórfico naturalmente não local, é possível se valer de sua capacidade de regularização para simular de maneira consistente o fenômeno de localização de deformações contornando a ocorrência de localização de deformações numericamente induzida. Nesta seção, simula-se o ensaio de compressão com a formação da banda de cisalhamento, objetivando-se demonstrar a capacidade do modelo micromórfico em reproduzir o fenômeno de localização de deformações sem perda de objetividade da malha, o que não se observa com o contínuo clássico. Para tanto, estuda-se o problema em estado plano de deformação, cujo corpo de prova tem dimensões de (60×120) mm², está engastado na base e submetido a uma carga uniformemente distribuída de 20,0 N/mm na borda superior. Este estudo é realizado considerando-se três diferentes malhas (Figura 4) compostas por elementos finitos quadrilaterais de nove nós.

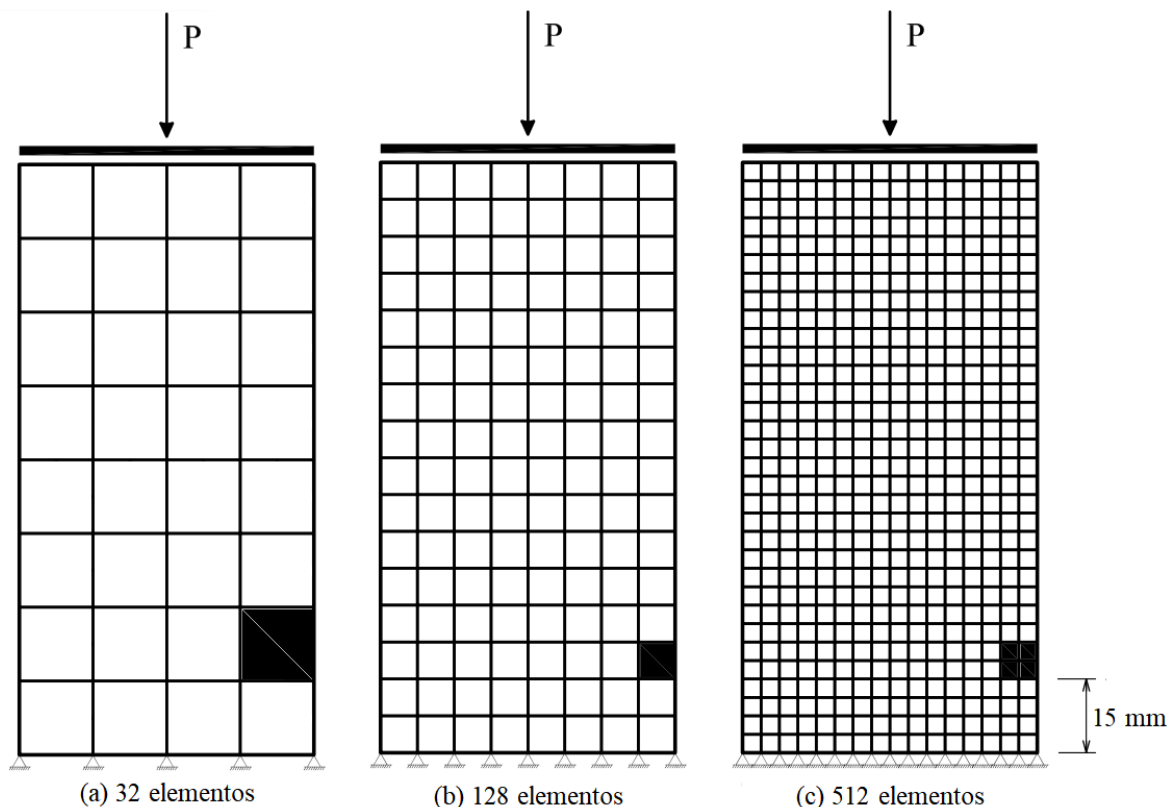


Figura 4: Compressão com banda de cisalhamento: Malhas.

De modo a simular uma prensa, impõe-se que os deslocamentos para os pontos da borda superior do modelo são únicos em cada direção por meio da estratégia *master-slave* disponível no sistema INSANE. Admite-se um microcontínuo quadrado de dimensão igual a 1,25 mm, isotrópico e inicialmente homogêneo constituído por um material com módulo de elasticidade $E = 1,2 \times 10^4$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,35$. Para acompanhar a evolução do dano, adota-se o modelo constitutivo de dano isotrópico de Mazars e Lemaitre (1984), cuja deformação equivalente é dada por $\varepsilon_{eq} = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}$, associado à função de evolução do dano com variação linear descrita pelos parâmetros (Penna, 2011) $\kappa_0 = 1,75 \times 10^{-3}$ e $\kappa_f = 0,07$, de modo a simular o comportamento elastoplástico com tensão de escoamento $\sigma_y = 20$ MPa e módulo plástico $H = -300$ MPa adotado por Lages (1997).

Para forçar a localização por meio da banda de cisalhamento, introduz-se como imperfeição inicial um carregamento horizontal uniformemente distribuído na borda superior do modelo da ordem de 1% do carregamento vertical, bem como se considera uma região menos resistente situada a 15 mm da base (Figura 4) reduzindo-se em 5% o valor da tensão limite do regime elástico inicial adotando $\kappa_0 = 1,65 \times 10^{-3}$ para o material dos elementos dessa região.

A análise não linear foi realizada com o método de Newton-Raphson padrão, por meio do método de controle de deslocamento generalizado com fator de carga inicial igual a 0,02 e tolerância para a convergência em carga de 10^{-4} . As respostas obtidas com o modelo clássico estão apresentadas na Figura 5 por meio das curvas carga \times deslocamento vertical da borda superior, donde se observa a perda de objetividade da malha.

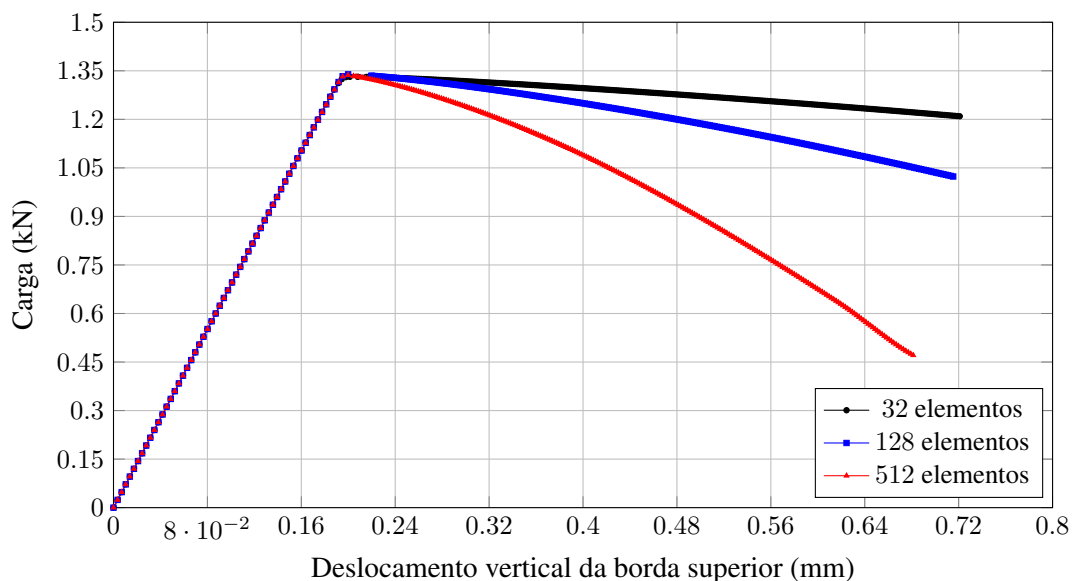


Figura 5: Carga \times Deslocamento vertical da borda superior - Clássico.

Conforme discutido, essa perda de objetividade é consequência da localização de deformações tender, à medida em que se aumenta o refinamento da malha com o modelo clássico, para uma região de dimensão infinitesimal sem que, para tal, necessite-se de uma dissipação de energia (Lages, 1997). Essa tendência é observada na Figura 6, em que se apresentam as bandas de cisalhamento correspondentes ao último passo da análise.

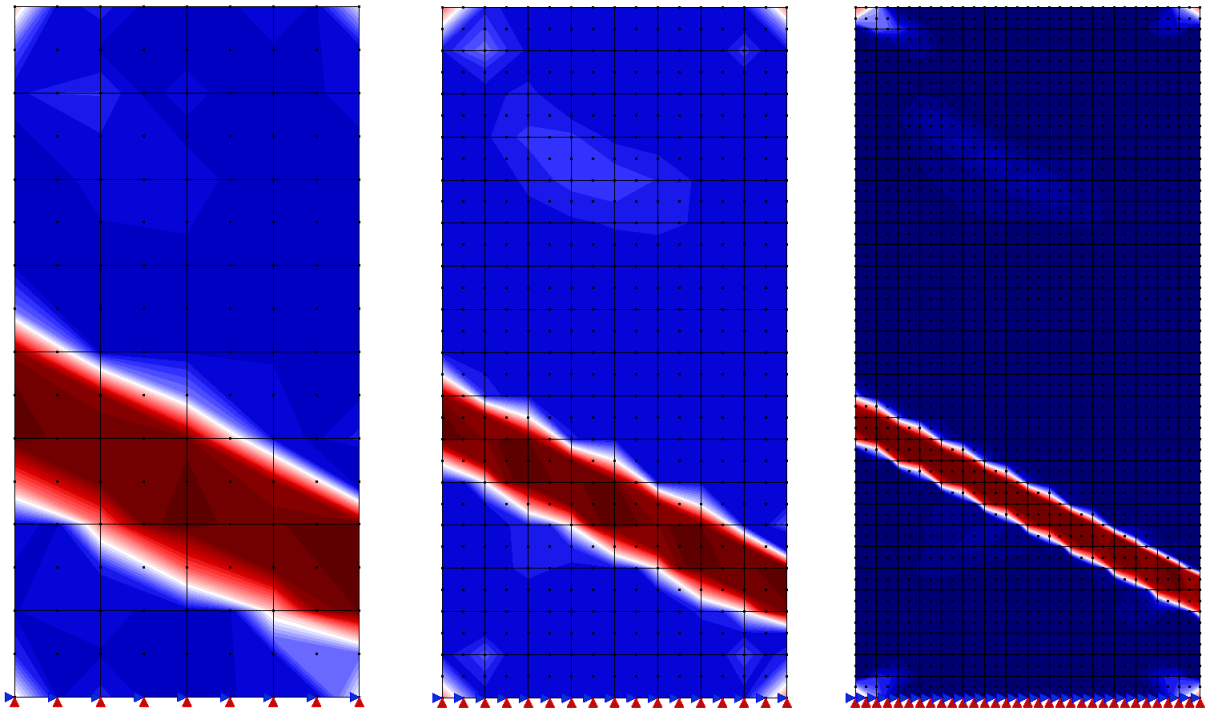


Figura 6: Banda de cisalhamento - Clássico.

Essa inconsistência não é observada com o modelo micromórfico, em que a banda de cisalhamento apresenta uma tendência independente da malha (Figura 7), reproduzindo o fenômeno de localização de deformações sem perda de objetividade da malha, observado na Figura 8.

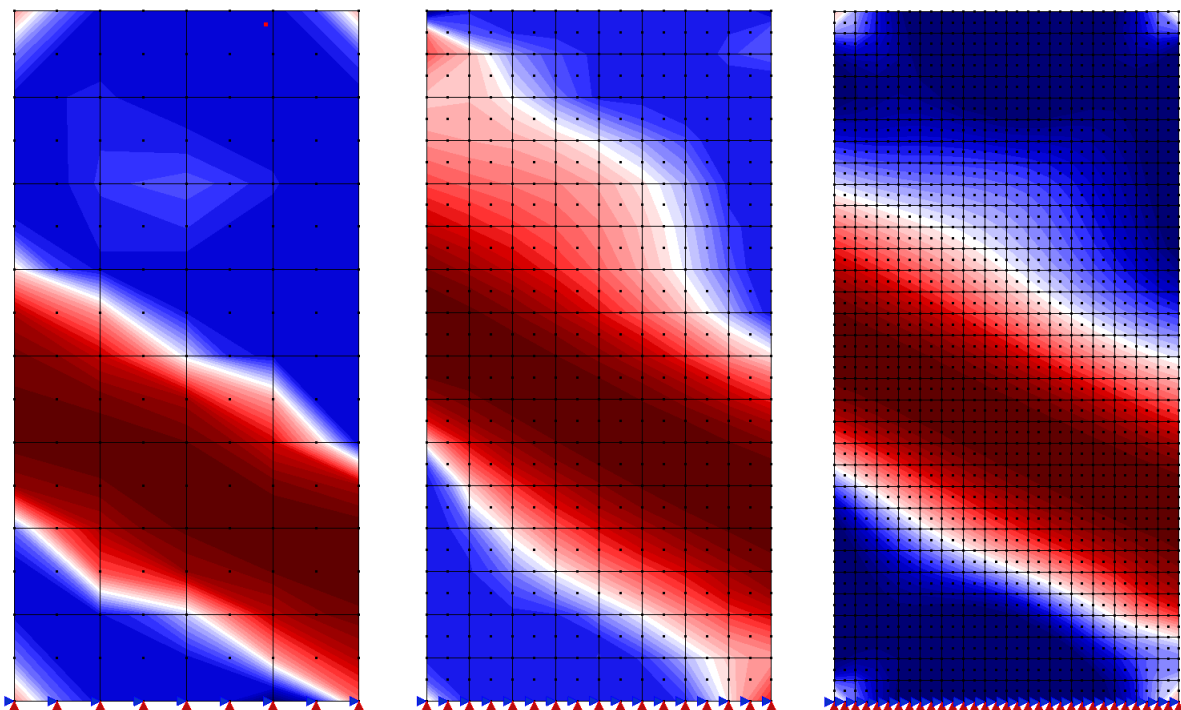


Figura 7: Banda de cisalhamento - Micromórfico.

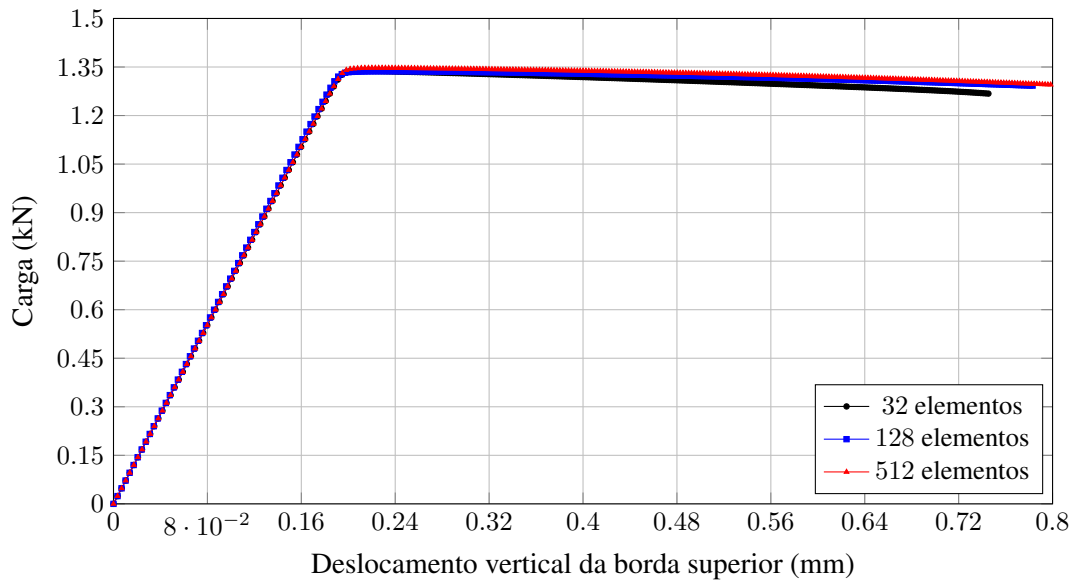


Figura 8: Carga \times Deslocamento vertical da borda superior - Micromórfico.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, apresentou-se uma estratégia de homogeneização micromórfica associada à abordagem fraca desta teoria de contínuo, permitindo-se explorar as vantagens de seu emprego sem a necessidade de se definir seu elevado número de parâmetros materiais. Para tanto, tomou-se por base a homogeneização micromórfica desenvolvida por Hütter (2017, 2019), de modo a se construir as relações constitutivas micromórficas macroscópicas a partir de parâmetros materiais do contínuo clássico, responsável por governar o problema de valor de contorno na microescala. Esta estratégia multiescala, que se vale da imposição de estados elementares de deformação às partículas materiais (microcontínuos) como agente responsável por estabelecer a comunicação entre as duas escalas, é aplicável a análises lineares e fisicamente não lineares, permitindo-se empregar modelos constitutivos consagrados da teoria clássica para acompanhamento da degradação no microcontínuo e consequente propagação para a macroescala. A implementação deste arcabouço no sistema INSANE, além de facilitada pela estrutura segmentada deste sistema, permitiu associar a esta estratégia o arcabouço teórico e computacional para modelos constitutivos baseados em degradação elástica (Penna (2011)), generalizando a sua aplicação.

A simulação numérica apresentada corrobora com o que se diz sobre a capacidade de regularização dos modelos de contínuos generalizados, sob ótica do contínuo micromórfico, no entanto, o objetivo principal é demonstrar a capacidade da estratégia elaborada em reproduzir o comportamento esperado para a teoria micromórfica, resguardando as suas principais características, embora se definam somente parâmetros materiais da teoria clássica. Ou seja, a principal contribuição deste trabalho consiste em possibilitar análises segundo a teoria micromórfica contornando-se a sua grande limitação prática, que é a determinação do seu elevado número de parâmetros materiais. Desta forma, permite-se estudar fenômenos bem representados pela teoria micromórfica, mas não pela clássica, como, por exemplo, o fenômeno de localização de deformações em meios parcialmente frágeis, a partir de parâmetros materiais bem conhecidos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o importante apoio das agências de pesquisa brasileiras CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais).

REFERÊNCIAS

- Ansari, R., Bazdid-Vahdati, M., Shakouri, A. H., Norouzzadeh, A. e Rouhi, H., 2016. ‘Micro-morphic prism element’. *Mathematics and Mechanics of Solids*, vol. 22(6), pp. 1438–1461.
- Boresi, A. P., Chong, K. P. e Lee, J. D., 2011. *Elasticity in Engineering Mechanics*. John Wiley & Sons.
- Cauchy, A.-L., 1828. ‘Sur les équations qui expriment l’équilibre ou les lois du mouvement intérieur d’un corps solide élastique ou non élastique’. *Exercices de mathématiques*, vol. 2, pp. 160–187. Este artigo apresenta em impressão as ideias originalmente enviadas à Academia de Ciências de Paris em 30 de setembro de 1822 (Maugin, 2014).
- de Borst, R., 1993. ‘A generalisation of J_2 -flow theory for polar continua’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 103, pp. 347–362.
- Eringen, A. C., 1964. ‘Simple microfluids’. *International Journal of Engineering Science*, vol. 2, pp. 205–217.
- Eringen, A. C., 1967. *Mechanics of continua*. Wiley.
- Eringen, A. C., 1999. *Microcontinuum Field Theories: I. Foundations and Solids*. Microcontinuum Field Theories, Springer New York.
- Eringen, A. C. e Şuhubi, E. S., 1964a. ‘Nonlinear theory of simple micro-elastic solids - I’. *International Journal of Engineering Science*, vol. 2, pp. 189–203.
- Eringen, A. C. e Şuhubi, E. S., 1964b. ‘Nonlinear theory of simple micro-elastic solids - II’. *International Journal of Engineering Science*, vol. 2, pp. 389–404.
- Eringen, A. C. e Kafadar, C. B., (1976), Polar field theories, in A. C. Eringen, ed., ‘Polar and nonlocal field theories’, Continuum physics, Volume 4, Academic Press, Nova Iorque, Estados Unidos, chapter 1, pp. 1–73.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Forest, S., (1998), Mechanics of generalized continua: construction by homogenization, in ‘40e Colloque de Métallurgie de l’INSTN - Comportement mécanique et effets d’échelle’, Journal de Physique IV, Vol. 08, França, pp. Pr4–39 – Pr4–48.
- Forest, S., 2002. ‘Homogenization methods and the mechanics of generalized continua - Part 2’. *Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 28-29, pp. 113–143.
- Forest, S., 2005. ‘Mechanics of Cosserat media - An introduction’. *Ecole des Mines de Paris, Paris*, pp. 1–20.

- Forest, S., (2013), Micromorphic media, in H. Altenbach e V. A. Eremeyev, eds, ‘Generalized Continua from the Theory to Engineering Applications’, CISM International Centre for Mechanical Sciences: Courses and Lectures, Vol. 541, Springer Vienna, Vienna, pp. 249–300.
- Forest, S. e Sab, K., 1998. ‘Cosserat overall modeling of heterogeneous materials’. *Mechanics Research Communications*, vol. 25(4), pp. 449–454.
- Forest, S. e Sievert, R., 2006. ‘Nonlinear microstrain theories’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43(24), pp. 7224–7245.
- Forest, S. e Trinh, D.-K., 2011. ‘Generalized continua and non-homogeneous boundary conditions in homogenisation methods’. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 91, pp. 90–109.
- Germain, P., 1973a. ‘La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, Première partie: théorie du second gradient’. *Journal de Mécanique*, vol. 12(2), pp. 235–274.
- Germain, P., 1973b. ‘The method of virtual power in continuum mechanics. part 2: Microstructure’. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 25(3), pp. 556–575.
- Gitman, I. M., Askes, H., Sluys, L. J. e Sluys, L. J., (2004), The concept of representative volume for elastic, hardening and softening materials, in ‘Proceedings of XXXII International Summer School-Conference: Advanced Problems in Mechanics’, São Petersburgo, Rússia, pp. 180–184.
- Hashin, Z., 1964. ‘Theory of mechanical behavior of heterogeneous media’. *Applied Mechanics Reviews*, vol. 17, pp. 1–9.
- Hashin, Z., 1983. ‘Analysis of composite materials: A survey’. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, pp. 481–505.
- Hill, R., 1963. ‘Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, pp. 357–372.
- Hirschberger, C. B., 2008. A Treatise on Micromorphic Continua. Theory, Homogenization, Computation. Tese de Doutorado, Universidade de Kaiserslautern, Kaiserslautern, Renânia-Palatinado, Alemanha.
- Hütter, G., 2016. ‘An extended Coleman-Noll procedure for generalized continuum theories’. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 28(6), pp. 1935–1941.
- Hütter, G., 2017. ‘Homogenization of a Cauchy continuum towards a micromorphic continuum’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 99, pp. 394–408. Correção: Corrigendum to “Homogenization of a Cauchy continuum towards a micromorphic continuum” [J. Mech. Phys. Solids 99 (2017) 394-408]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 107, pp. 320 (2017).
- Hütter, G., 2019. A theory for the homogenisation towards micromorphic media and its application to size effects and damage. Tese de Doutorado, Technische Universität Bergakademie Freiberg, Freiberg, Alemanha.
- Hütter, G., Mühlich, U. e Kuna, M., 2014. ‘Micromorphic homogenization of a porous medium:

- elastic behavior and quasi-brittle damage'. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 27(6), pp. 1059–1072.
- Isbuga, V. e Regueiro, R. A., 2011. 'Three-dimensional finite element analysis of finite deformation micromorphic linear isotropic elasticity'. *International Journal of Engineering Science*, vol. 49(12), pp. 1326–1336.
- Jänicke, R., Diebels, S., Sehlhorst, H.-G. e Düster, A., 2009. 'Two-scale modelling of micromorphic continua: A numerical homogenization scheme'. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 21, pp. 297–315.
- Kalampakas, A. e Aifantis, E. C., 2014. 'A note on the discrete approach for generalized continuum models'. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, vol. 23(5-6), pp. 181–183.
- Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V. e Jeulin, D., 2003. 'Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 40, pp. 3647–3679.
- Kirchner, N. e Steinmann, P., 2005. 'A unifying treatise on variational principles for gradient and micromorphic continua'. *Philosophical Magazine*, vol. 85(33-35), pp. 3875–3895.
- Kouznetsova, V. G., Geers, M. G. D. e Brekelmans, W. A. M., 2002. 'Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, pp. 1235–1260.
- Kröner, E., 1977. 'Bounds for effective elastic moduli of disordered materials'. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 25, pp. 137–155.
- Lages, E. N., 1997. Modelagem de Localização de Deformações com Teorias de Contínuo Generalizado. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.
- Lemaitre, J., 1992. *A Course on Damage Mechanics*. A Course on Damage Mechanics, Springer-Verlag.
- Lemaitre, J. e Desmorat, R., 2005. *Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Springer Berlin Heidelberg.
- Li, J., 2011. 'A micromechanics-based strain gradient damage model for fracture prediction of brittle materials - Part I: Homogenization methodology and constitutive relations'. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, pp. 3336–3345.
- Mal, A. K. e Singh, S. J., 1991. *Deformation of Elastic Solids*. Prentice Hall.
- Maugin, G. A., 2014. *Continuum Mechanics Through the Eighteenth and Nineteenth Centuries: Historical Perspectives from John Bernoulli (1727) to Ernst Hellinger (1914)*. Solid Mechanics and Its Applications, Vol. 214, Springer International Publishing.
- Mazars, J. e Lemaitre, J., (1984), Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete, in S. P. Shah, ed., 'Application Of Fracture Mechanics to Ce-

- mentitious Composites’, NATO Advanced Research Workshop, 4-7 Setembro., Northwestern University, pp. 375–378.
- Mindlin, R. D., 1964. ‘Micro-structure in linear elasticity’. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 16, pp. 51–78. Comunicado por R. A. Toupin.
- Penna, S. S., 2007. Pós-processador para modelos bidimensionais não-lineares do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Penna, S. S., 2011. Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica - Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Rodrigues, D. E. S., Belinha, J., Pires, F. M. A., Dinis, L. M. J. S. e Jorge, R. M. N., 2018. ‘Homogenization technique for heterogeneous composite materials using meshless methods’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 92, pp. 73–89.
- Silva, L. L., 2016. Sistema gráfico interativo para análise de nucleação e propagação de trincas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Silva, L. L., 2019. Estratégia multiescala para descrição micromórfica do contínuo a partir do contínuo clássico. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Tekoğlu, C., 2007. Size effects in cellular solids. Tese de Doutorado, Universidade de Groninga, Groninga, Países Baixos.
- Trovalusci, P., Ostoja-Starzewski, M., Bellis, M. L. D. e Murralli, A., 2015. ‘Scale-dependent homogenization of random composites as micropolar continua’. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 49, pp. 396–407.
- Willis, J. R., 1981. ‘Variational and related methods for overall properties of composites’. *Advances in Applied Mechanics*, vol. 21, pp. 1–78.
- Wong, H. S., Zobel, M., Buenfeld, N. R. e Zimmerman, R. W., 2009. ‘Influence of the interfacial transition zone and microcracking on the diffusivity, permeability and sorptivity of cement-based materials after drying’. *Magazine of Concrete Research*, vol. 61, pp. 571–589.