

MODELAGEM DE PROTÓTIPOS PARA SISTEMAS REAIS

Márcio Ribeiro de Oliveira Filho

marcioribeiro7390@gmail.com

Álan Cristoffer e Sousa

acristoffers@gmail.com

Emerson de Sousa Costa

emersondesousa@gmail.com

Valter Junior de Souza Leite

valter@ieee.org

CEFET-MG

R. Álvares de Azevedo, 400 - Bela Vista, Divinópolis - MG, 35503-822, Minas Gerais, Brasil

Abstract. Models represent physical phenomena mathematically. Through it, it's possible to obtain mathematical expressions that describe the behaviour of the real system, allowing, for example, to simulate its evolution in time as a response to some input stimulus without actually operating the real system. They also allow the creation of control laws that are mathematically correct and adequate to the system, allowing the development of formally correct and performant controllers. In this study, a system of coupled tanks, present in CEFET Campus V's Signals and System Analysis laboratory, was modelled in 6 different configurations. The system is composed of 4 water tanks, two on the top shelf and two on the bottom, with valves that allow the water to flow to its sibling or the one directly below it. The valves allow the user to chose how the water will flow through them. We developed a model for each configuration using physical laws of water flow in cylindrical recipients and estimated the values of the constants through tests. The models are represented using state-space, as it allows to identify the dynamics of the system internal energy, as well as the use of modern control techniques. Each model was validated against the real system to measure its correctness. The models obtained are available for students of the laboratory, both undergraduate and postgraduate, to streamline the study of system analysis and control theory.

Keywords: modeling, state space, coupled tanks

1 Introdução

A modelagem visa a obtenção de fórmulas matemáticas que descrevem o comportamento de uma ou mais variáveis de um sistema real. Ela é de fundamental importância no desenvolvimento de controladores, sendo o elemento central das técnicas de controle moderno [1, 2]. Através de modelos matemáticos é possível não apenas agilizar a etapa de testes, como também obter controladores que são matematicamente adequados ao sistema, contrastando com técnicas que utilizam a resposta do sistema e métodos empíricos para ajustar os controladores.

Este projeto consiste na modelagem de 6 configurações do sistema de tanques comunicantes (Figura 1) presente no Laboratório de Sinais e Sistemas do Campus V do CEFET-MG. Ele permite a configuração do fluxo de água entre os tanques através de válvulas, permitindo a realização de até 16 configurações diferentes, incluindo modelos de primeira à quarta ordem. No entanto, devido a uma não linearidade inserida no tanque T3, esse não será utilizado, resultando em 6 configurações modeladas, de primeira à terceira ordem.



Figure 1. Sistema de Tanques Comunicantes

O modelo em formato de espaço de estados é amplamente utilizado no controle moderno. Isso se dá, principalmente, pois esse formato permite compreender a dinâmica da energia interna de um sistema, ou seja, como ela flui de um estado para outro. Estados, nesse contexto, são partes do sistema que armazenam energia [1, 2]. No sistema de tanques, por exemplo, os estados são as alturas das colunas d'água, já que essa representa a energia potencial do sistema. Com esse formato de modelo é possível desenvolver leis de controle mais avançadas, que levam em conta a dinâmica interna e até mesmo impõe restrições nos estados.

2 Metodologia

O passo inicial para a modelagem é definir quais as entradas e saídas desejadas. Após isso deve-se encontrar formulas que as relacionem. Para o sistema de tanques escolheu-se como entrada a vazão da bomba, em $\text{cm}^3 \text{s}^{-1}$ e como saída a altura da coluna d'água em cm. As fórmulas utilizadas são as de vazão em orifício no fundo de um recipiente cilíndrico (Equação 1) e a de variação de altura para dada vazão de entrada (Equação 2) [3],

$$q_o(t) = a\sqrt{2 \cdot g \cdot h(t)}, \quad (1)$$

$$\dot{h}(t) = \frac{q_i(t) - q_o(t)}{A}, \quad (2)$$

sendo $q_i(t)$ a vazão de entrada, g a gravidade, $h(t)$ a altura da coluna d'água, $q_o(t)$ a vazão de saída e A a área da secção transversal do tanque e a a área do orifício de saída. Deve-se atentar às unidades! A constante de aceleração da gravidade, nesse caso, deve ser dada em cm s^{-2} , ou seja, seu valor é de 980.665.

Como a Equação 1 é não linear, ela deve ser linearizada [1, 2]. O processo de linearização mais comum é a aplicação da série de Taylor truncada no primeiro termo [4]. Sua formulação é

$$f(\bar{x}) = f(0) + \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x - x_0). \quad (3)$$

Como um sistema linearizado é um sistema com sua origem deslocada, temos que $\bar{x} = x - x_0$ e $f(\bar{0}) = f(0)$. É comum não se utilizar a notação $\bar{\cdot}$, sabendo que o leitor está ciente das implicância do sistema ser linearizado. Assim, a Equação (1) se torna

$$q_o(t) = \frac{a \cdot g}{\sqrt{2 \cdot g \cdot h(0)}} h(t), \quad (4)$$

linearizado em torno de $h(0)$.

Deve-se em seguida reescrever as fórmulas de forma a obter equações para as variações dos estados. Substituindo (4) em (2) obtém-se

$$\dot{h}(t) = \frac{q_i(t)}{A} - \frac{a \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot h(0)}} h(t). \quad (5)$$

Esse já é o modelo para um tanque, linearizado em torno $h(0)$ e $q_i(0)$. Ele pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{a \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot h(0)}} \cdot x(t) + \frac{1}{A} \cdot u(t), \\ y(t) &= x(t). \end{aligned} \quad (6)$$

que segue o modelo de espaço de estados, dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t). \end{aligned} \quad (7)$$

O último passo é a validação dos modelos, que consiste em realizar um experimento no sistema real, aplicando nele um sinal de entrada, como, por exemplo, um degrau, e comparar a saída com aquela de uma simulação do modelo quando se aplica o mesmo sinal. É esperado que as respostas de ambos o sistema e o modelo sejam próximas, mas não é necessário que sejam iguais. Para fins de controle, uma semelhança de 70% já pode ser considerada aceitável. Cabe ao projetista definir parâmetros para julgar o quão preciso o modelo deve ser.

3 Análise de Resultados

Repetindo a metodologia descrita para cada uma das configurações, obteve-se os seguintes modelos:

1. **Configurações 1, 2 e 3** — água entra e sai nele mesmo (T1, T2 e T3)

$$\dot{x}(t) = \left[-\frac{a \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot h(0)}} \right] x(t) + \left[\frac{1}{A} \right] u(t), \quad (8)$$

$$y(t) = x(t). \quad (9)$$

2. **Configuração 4** — água entra em T1 e sai em T2

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{a_1 \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot h_1(0)}} & \frac{a_{12} \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot (h_1(0) - h_2(0))}} \\ \frac{a_{12} \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot (h_1(0) - h_2(0))}} & -\frac{a_2 \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot h_2(0)}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (10)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t). \quad (11)$$

3. **Configuração 5** — água entra em T2 e sai em T4

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{a_2 \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot h_2(0)}} & 0 \\ \frac{a_2 \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot h_2(0)}} & -\frac{a_4 \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot h_4(0)}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (12)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t). \quad (13)$$

4. **Configuração 6** — água entra em T1 e sai em T4

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{a_1 \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot h_1(0)}} & \frac{a_{12} \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot (h_1(0) - h_2(0))}} & 0 \\ \frac{a_{12} \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot (h_1(0) - h_2(0))}} & -\frac{a_2 \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot h_2(0)}} & 0 \\ 0 & \frac{a_2 \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot h_2(0)}} & -\frac{a_4 \cdot g}{A\sqrt{2 \cdot g \cdot h_4(0)}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (14)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t). \quad (15)$$

Testes empíricos foram feitos para determinar os pontos de equilíbrio, bem como para determinar uma curva de calibração para a bomba, que é controlada através de sua potência, não sua vazão. O teste consiste em aplicar um sinal tipo escada na bomba, deixando entrar em equilíbrio em cada degrau, e então utilizar a Equação (1) para obter a vazão a partir da altura. Em seguida utilizou-se mínimos quadrados para encontrar uma relação entre potência e vazão [4].

Realizou-se a validação de cada modelo utilizando um sinal PRBS (*Pseudo Random Binary Sequence*). A Figura 2 mostra, para cada configuração, a resposta do sistema e do modelo sobrepostas. Nela podemos observar que o modelo não se adequa perfeitamente ao sistema. Apesar disso, eles foram utilizados para implementar sistemas de controle com sucesso. Ao investigar o motivo de tais diferenças, percebeu-se que a mesma se dá pelo fato do fluxo de saída dos tanques não ser garantidamente laminar. O fluxo se torna extremamente turbulento em algumas condições, principalmente durante o esvaziamento, e isso altera a dinâmica daquele momento em diante consideravelmente. Outro problema detectado foi o tipo de válvula utilizada, que não possuía uma repetitividade aceitável.

Para evitar esses problemas, novas válvulas foram adquiridas e laminadores foram projetados, mas o último ainda não está instalado, não sendo possível demonstrar a diferença e testar a validade do modelo quando o fluxo é perfeitamente laminar.

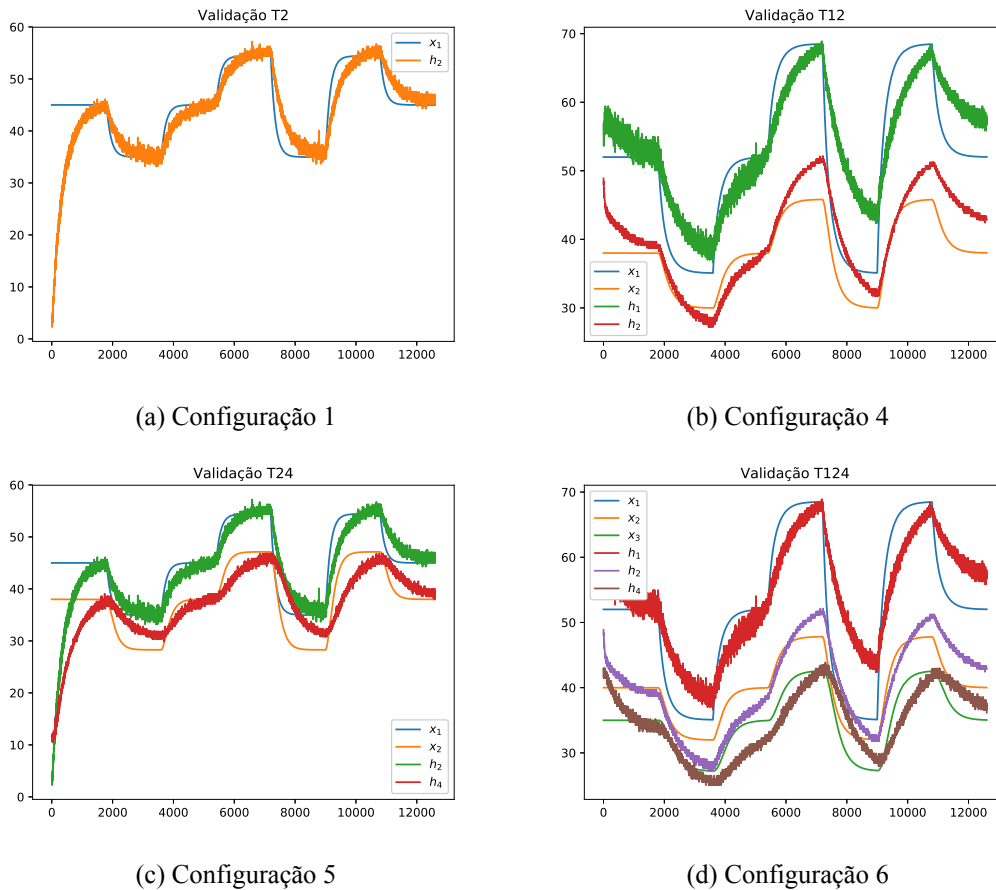


Figure 2. Validação

4 Conclusão

Os modelos obtidos representam o sistema real, mas com degradação devido principalmente à vazão turbulenta. Para fins de controle os modelos ainda podem ser utilizados, principalmente no estudo de técnicas robustas, mas modificações no sistema para tornar o fluxo garantidamente laminar tornará os modelos ainda mais fiéis ao sistema e mais adequado para uso em técnicas de controle moderno.

References

- [1] Ogata, K., 2010. *Modern control engineering*. Prentice-Hall.
- [2] Dorf, R. C. & Bishop, R. H., 2010. *Modern Control Systems*. Pearson.
- [3] Moran, M. J., 2002. *Introduction to Thermal Systems Engineering: Thermodynamics, Fluid Mechanics, and Heat Transfer*. Wiley.
- [4] Kreyszig, E., 2010. *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley.