

Um modelo constitutivo variacional com anisotropia induzida para tecidos biológicos moles

Francisco Luiz Bresolin

Jakson Manfredini Vassoler

francisco.bresolin@ufrgs.br

jmvassoler@ufrgs.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - PROMEC, Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Rua Sarmiento Leite, 425 - Centro Histórico, Porto Alegre, 90050-170, Rio Grande do Sul, Brasil

Abstract. Viscoelasticity, strongly nonlinear behavior, and damage are commonly observed mechanical behavior exhibited by most soft biological tissues. Also, tendons, arteries and skin can progressively show lower extensibility during increasing stretches, which may be referred to strain orientation effects. In addition, due to its internal organization, experimental observations have shown that finite strains induce a directional history-dependent organization of the fibers. In order to account these mechanical behaviors, in this work, a variational micromechanics-inspired constitutive model is presented. This model is based on the full-network approach with a viscous and a damage internal variable. Some numerical tests are presented to evaluate the constitutive model capabilities in order to represent soft biological tissues. The results have shown that the model is capable of representing the anisotropic-induced behavior observed in soft biological tissues.

Keywords: tecidos biológicos moles, modelo variacional, viscosidade, dano

1 Introdução

Dano anisotrópico e viscoelasticidade são comportamentos não lineares comumente observados em tecidos biológicos moles. O comportamento mecânico de tais materiais é difícil de ser previsto posto que estes fenômenos altamente não lineares ocorrem concomitantemente, e representam parcelas significativas da resposta mecânica do material.

Os comportamentos viscosos em tecidos biológicos são facilmente reconhecíveis através da observação dos comportamentos de histerese, relaxação e fluência nestes materiais. Da mesma forma, os comportamentos de dano anisotrópico exibidos por estes materiais são observados principalmente em tecidos como tendões, artérias e pele que apresentam progressiva perda de sua capacidade de distensão em certas direções quando submetidos à grandes deformações (Holzapfel [1]). Diversos trabalhos buscam estudar estes comportamentos mecânicos em diferentes regimes de carregamento, compilações destes estudos podem ser encontrados em Humphrey [2], Peña et al. [3], Hamedzadeh et al. [4], sendo um assunto amplamente investigado atualmente.

De forma a modelar e inferir as respostas destes materiais, diversas abordagens para a modelagem constitutiva de tecidos biológicos vieram a ser estudadas, uma relação destes modelos, e suas características comuns, pode ser encontrado no trabalho de Li [5]. Em geral, estes modelos utilizam hipóteses à respeito das reconhecidas características anisotrópicas que os tecidos biológicos moles apresentam. Assim, diversos modelos estudados apresentam alguma forma de dano associado a uma ou mais famílias de fibras em Balzani et al. [6], Peña [7], Vassoler et al. [8] ou também em modelos totalmente anisotrópicos Menzel and Waffenschmidt [9], Sáez et al. [10].

Uma abordagem interessante, que naturalmente é capaz de lidar com elasticidade anisotrópica, é a modelagem “full-network” (Menzel and Waffenschmidt [9], Sáez et al. [10]). Esta consiste no conceito de uma rede de cadeias aleatoriamente orientadas à pontos de junção (Wu and Van Der Giessen [11]). Abordagem esta, que possibilita apresentar um comportamento completamente anisotrópico à modelagem constitutiva de maneira intuitiva.

Assim, este trabalho tem como objetivo estudar a abordagem “full-network” incorporando efeitos de viscosidade e dano através de modelos variacionais (Vassoler et al. [8], Ortiz and Stainier [12]).

2 Modelo constitutivo variacional

Os modelos variacionais são baseados no cálculo de tensões através de uma formulação pseudo-hiperelástica, onde um potencial incremental Ψ pode ser determinado de forma que satisfaça a expressão abaixo (Vassoler et al. [8], Ortiz and Stainier [12]),

$$\mathbf{S}_{n+1} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C}_{n+1}; \xi_n)}{\partial \mathbf{C}_{n+1}} \quad (1)$$

onde \mathbf{S} é o segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff, $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ e \mathbf{F} é o gradiente de deformação. O conjunto ξ corresponde às variáveis de estado do problema dado por $\xi = \xi(\mathbf{C}, \lambda^v, \eta)$, onde λ^v é uma medida de deformação viscosa e η é uma medida de dano. Os subscritos n e $n + 1$ correspondem, respectivamente, ao instante anterior e ao atual. Na estrutura variacional o potencial incremental Ψ toma a forma da expressão abaixo,

$$\Psi(\mathbf{C}_{n+1}; \xi_n) = \min_{\lambda_{n+1}^v, \eta_{n+1}} \{W(\xi_{n+1}) - W(\xi_n) + \Delta t \psi(d^v, \dot{\eta}; \xi_{n+1})\} \quad (2)$$

onde a medida $d^v = \dot{\lambda}^v (\lambda^v)^{-1}$. Com relação às medidas de deformação empregadas: a variável λ^v é obtida da decomposição viscoelástica da medida de alongamento $\lambda = \sqrt{\mathbf{m} \cdot \mathbf{m}} = \sqrt{\bar{\mathbf{F}} \mathbf{m}_0 \cdot \bar{\mathbf{F}} \mathbf{m}_0} = \sqrt{\mathbf{m}_0 \cdot \bar{\mathbf{C}} \mathbf{m}_0}$, onde $\bar{\mathbf{F}} = \det(\mathbf{F})^{-1/3} \mathbf{F} = J^{-1/3} \mathbf{F}$ com a seguinte decomposição viscoelástica,

$$\lambda(\bar{\mathbf{C}}, \mathbf{m}_0) = \lambda^e \lambda^v \quad \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{m}_0 = 1 \quad (3)$$

3 Modelo com abordagem “full-network”

Por meio da abordagem full-network (Wu and Van Der Giessen [11]), que permite a determinação das densidades de energia, pode-se contabilizar todas as possíveis direções que contribuem para uma densidade de energia elástica φ^e em um dado ponto do material, por meio da expressão,

$$\varphi^e = \int_{\Omega} C \omega^e d\Omega \quad (4)$$

onde Ω corresponde ao conjunto de direções de integração de um ponto do material na configuração atual e $C = C(\Omega(t))$ a densidade das cadeias em função do conjunto de direções Ω e do tempo. Reescrevendo esta expressão para a configuração de referência, e assumindo que a orientação das fibras do material são aleatórias nesta configuração, a densidade das cadeias assume o seguinte valor constante $C(\Omega(t=0)) = C(\Omega_0) = 1/4\pi$ (Wu and Van der Giessen [13]). Assim, avaliando o potencial da expressão anterior no instante atual têm-se,

$$\varphi^e = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \omega^e d\Omega_0 \quad (5)$$

A integração apresentada na equação 5 pode ser aproximada numericamente pela soma algébrica de direções espaciais. Assim,

$$\varphi^e = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_0} \omega^e d\Omega_0 \quad (6)$$

$$\approx 2 \sum_{k=1}^m h_k \omega^e \quad (7)$$

Extendendo estas expressões, para os seguintes potenciais: viscoso ψ^v ; e de dano ψ^η , usando o mesmo conjunto de vetores de orientação e pesos associados para cada potencial,

$$\psi^v \approx 2 \sum_{k=1}^m h_k \omega^v \quad (8)$$

$$\psi^\eta \approx 2 \sum_{k=1}^m h_k \omega^\eta \quad (9)$$

As equações 7, 8 e 9 correspondem a integração numérica dos potenciais apresentados empregando a quadratura de Lebedev (Govindjee et al. [14]). Os potenciais ω^e , ψ^v e ψ^η podem ser assumir diferentes expressões, o que confere flexibilidade ao modelo. Exemplos de escolhas para estes potenciais, e a forma como são tratados em modelos variacionais, podem ser encontrados em Vassoler et al. [8].

3.1 Solução incremental

Para a solução incremental se utiliza a hipótese que as taxas são constantes ao longo de cada incremento ($d^v \approx \Delta q / \Delta t$ e $\dot{\eta} \approx \Delta \eta / \Delta t$). Dessa forma, as seguintes medidas em t_{n+1} são determinadas,

$$\lambda_{n+1}^v = \lambda_n^v \exp(\Delta q) \quad (10)$$

$$\lambda_{n+1}^e = \lambda_{n+1} \lambda_n^{v-1} \exp(-\Delta q) = \lambda^{trial} \exp(-\Delta q) \quad (11)$$

$$\eta_{n+1} = \eta_n + \Delta \eta \quad (12)$$

Os potenciais W e ψ podem ser reescritos usando os potenciais elástico, viscoso e de dano descritos, conforme expressões abaixo,

$$W(\xi) = U(J) + \varphi^e(\lambda^e, \eta) \quad (13)$$

$$\psi(\dot{\lambda}^v, \dot{\eta}; \xi) = \psi^v(d^v) + \psi^\eta(\dot{\eta}, \eta) \quad (14)$$

onde o potencial U corresponde ao potencial volumétrico, φ^e ao potencial elástico desviador ($\omega^e = (1 - \eta)\bar{\omega}^e$), ψ^v é o potencial viscoso desviador e o ψ^η é o potencial de dano desviador.

A minimização apresentada na equação 2 pode ser reescrita empregando a integração numérica dos potenciais φ^e , ψ^v e ψ^η conforme apresentado nas equações 7 até 9. Com a abordagem “full-network” cada orientação de integração possui um conjunto independente de variáveis $\{\lambda_{n+1,k}, \Delta q_k, \Delta \eta_k\}$ que não são empregadas na atualização das variáveis de outras orientações de integração. Neste caso o sistema de equações se simplifica a problemas unidimensionais. Utilizando esta observação o problema de minimização original pode ser dividido em m problemas de minimização desacoplados,

$$2 \sum_{k=1}^m h_k \min_{\Delta q_k, \Delta \eta_k} \left\{ (1 - \eta_{n+1,k}) \bar{\omega}^e(\lambda_{n+1,k}^e) + \Delta t (\omega^v(\Delta q_k / \Delta t) + \omega^\eta(\Delta \eta_k / \Delta t; \eta_{n+1,k})) \right\} \quad (15)$$

Para a solução deste problema de minimização, o método de Newton pode ser empregado de forma estável pela utilização de valores iniciais adequados. Por fim, resposta de tensão para este problema pode ser determinada seguindo equação 1 conforme expressão abaixo,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1} &= 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}_{n+1}} = 2 \sum_{k=1}^m \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_{n+1,k}} \frac{\partial \lambda_{n+1,k}}{\partial \lambda_{n+1,k}^2} \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}_{n+1}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}} : \frac{\partial \lambda_{n+1,k}^2}{\partial \bar{\mathbf{C}}_{n+1}} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial J_{n+1}} \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}} \\ &= J_{n+1}^{-\frac{2}{3}} \text{Dev} \left(\sum_{k=1}^m \frac{2h_k}{\lambda_{n+1,k}} \frac{\lambda_{n+1,k}^e}{\lambda_{n+1,k}} \frac{\partial \bar{\omega}^e}{\partial \lambda_{n+1,k}^e} \mathbf{m}_{0,k} \otimes \mathbf{m}_{0,k} \right) + J_{n+1} \frac{\partial U}{\partial J_{n+1}} \mathbf{C}_{n+1}^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

4 Exemplos de aplicação do modelo

Com o objetivo de demonstrar a capacidade do modelo proposto é apresentado um simples caso numérico de tração uniaxial¹ cíclica, na direção x , submetida a uma taxa de deformação $\dot{\lambda} = 0.1 \frac{mm}{mm \cdot s}$. Para este exemplo são utilizados os seguintes potenciais, com seus respectivos parâmetros constitutivos apresentados na tabela 1,

$$\bar{\omega}^e(\lambda^e) = \frac{k_1}{2k_2} \exp \left(k_2 \left((\lambda^e)^2 - 1 \right) \right) \quad (17)$$

$$\psi^v(d^v) = \gamma (d^v)^2 \quad (18)$$

$$\psi^\eta(\eta, \dot{\eta}) = -\delta \log \left(1 - \frac{\eta}{\eta_\infty} \right) \dot{\eta} \quad (19)$$

Table 1. Parâmetros empregados no modelo

$\bar{\omega}^e$	ψ^v	ψ^η
$k_1 = 20$	$\gamma = 10$	$\delta = 0.5$
$k_2 = 35$		$\eta_\infty = 1$

O potencial elástico $\bar{\omega}^e$ da equação 17 emprega o potencial apresentado em Holzapfel and Gasser [15], o potencial viscoso ψ^v da equação 18 é representando por um modelo tipo-Hencky e o potencial de dano ψ^η da equação 19 utiliza um modelo sigmoidal apresentando em Vassoler et al. [8]). Para este exemplo foram empregados 86 termos de integração ($m = 86$) e a resposta do exemplo é apresentada na figure 1.

¹A deformação uniaxial corresponde ao gradiente de deformação $\mathbf{F} = [\lambda \ 0 \ 0; 0 \ 1/\sqrt{\lambda} \ 0; 0 \ 0 \ 1/\sqrt{\lambda}]$ e a medida de taxa de forma incremental é dada por $\dot{\lambda} = \Delta \lambda / \Delta t$

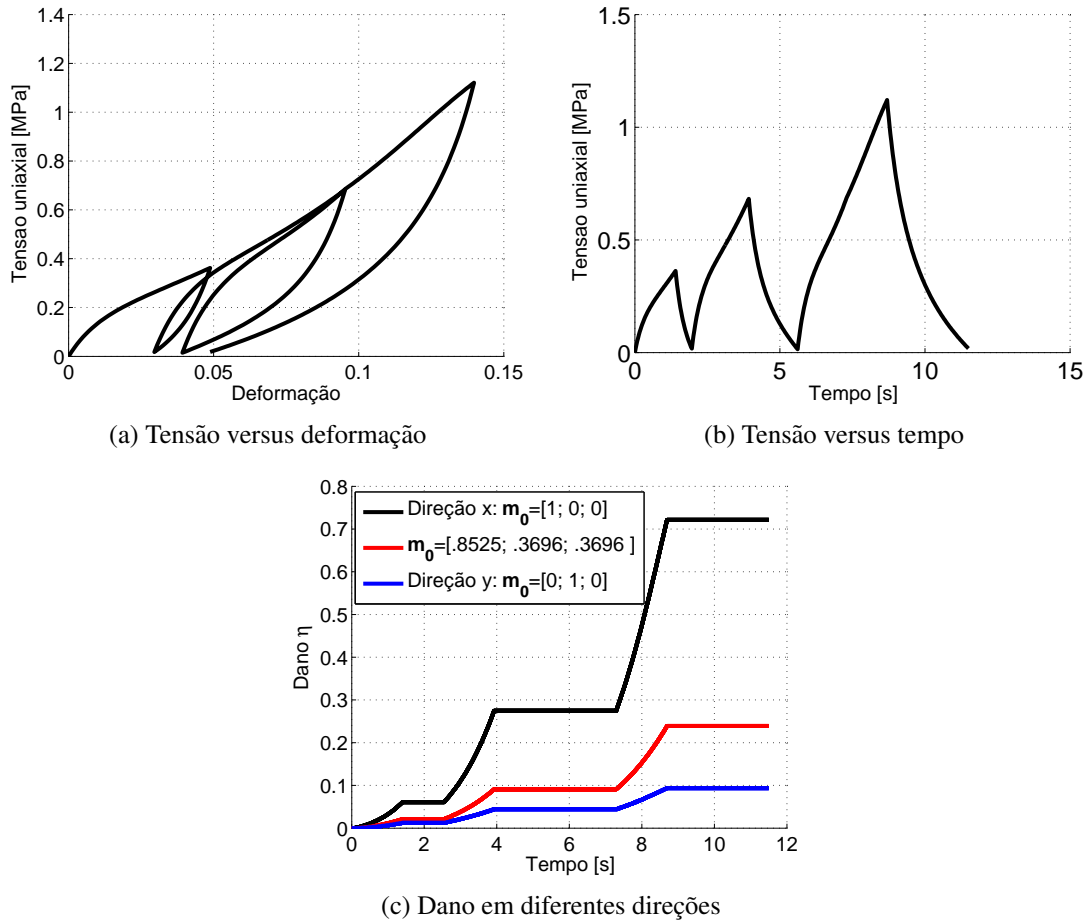


Figure 1. Respostas do caso uniaxial estudado

Nas figuras 1a e 1b observa-se que a resposta elástica apresenta o esperado comportamento não linear com efeitos viscosos. Além disto, pela figure 1c, a característica de dano anisotrópico é cumprida pelo modelo, onde para o carregamento uniaxial imposto o modelo apresentou diferentes valores de dano acumulados em direções distintas.

5 Conclusão

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo “full-network” que incorpora características de modelos variacionais para reproduzir comportamentos típicos de tecidos biológicos moles de: viscoelasticidade; comportamento não linear; e dano. No modelo constitutivo estudado estes comportamentos foram associados à variáveis internas escolhidas para o modelo constitutivo.

O estudo da capacidade destes modelos encontra-se ainda em desenvolvimento, contudo resultados numéricos de um carregamento cíclico uniaxial demonstram que o modelo é capaz de reproduzir as características anisotrópicas buscadas. Além disso, o modelo é capaz de, pela simples substituição de potenciais, ter seu comportamento alterado demonstrando flexibilidade para poder representar diferentes tecidos biológicos. Em trabalhos futuros, corpos com geometrias e carregamentos complexos serão explorados, além de diferentes procedimentos de integração da estrutura “full-network”.

Agradecimentos

Os autores deste trabalho agradecem ao CAPES, CNPq e FAPERGS pelo financiamento deste trabalho.

References

- [1] Holzapfel, G. A., 2017. Similarities between soft biological tissues and rubberlike materials. In Austrell, P.-E., ed, *Constitutive Models for Rubber IV*, pp. 607–617. Routledge, 1 edition.
- [2] Humphrey, J., 2003. Review Paper: Continuum biomechanics of soft biological tissues. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 459, n. 2029, pp. 3–46.
- [3] Peña, E., Peña, J. A., & Doblaré, M., 2009. On the Mullins effect and hysteresis of fibered biological materials: A comparison between continuous and discontinuous damage models. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 46, n. 7-8, pp. 1727–1735.
- [4] Hamedzadeh, A., Gasser, T. C., & Federico, S., 2018. On the constitutive modelling of recruitment and damage of collagen fibres in soft biological tissues. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 72, pp. 483–496.
- [5] Li, W., 2016. Damage Models for Soft Tissues: A Survey. *Journal of Medical and Biological Engineering*, vol. 36, n. 3, pp. 285–307.
- [6] Balzani, D., Schröder, J., & Gross, D., 2004. A Simple Model for Anisotropic Damage with Applications to Soft Tissues: Section 6. *PAMM*, vol. 4, n. 1, pp. 236–237.
- [7] Peña, E., 2011. A rate dependent directional damage model for fibered materials: application to soft biological tissues. *Computational Mechanics*, vol. 48, n. 4, pp. 407–420.
- [8] Vassoler, J. M., Stainier, L., & Fancello, E. A., 2016. A variational framework for fiber-reinforced viscoelastic soft tissues including damage. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- [9] Menzel, A. & Waffenschmidt, T., 2009. A microsphere-based remodelling formulation for anisotropic biological tissues. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 367, n. 1902, pp. 3499–3523.
- [10] Sáez, P., Alastrué, V., Peña, E., Doblaré, M., & Martínez, M. A., 2012. Anisotropic microsphere-based approach to damage in soft fibered tissue. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, vol. 11, n. 5, pp. 595–608.
- [11] Wu, P. D. & Van Der Giessen, E., 1995. On network descriptions of mechanical and optical properties of rubbers. *Philosophical Magazine A*, vol. 71, n. 5, pp. 1191–1206.
- [12] Ortiz, M. & Stainier, L., 1999. The variational formulation of viscoplastic constitutive updates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 171, n. 3-4, pp. 419–444.
- [13] Wu, P. & Van der Giessen, E., 1993. On improved network models for rubber elasticity and their applications to orientation hardening in glassy polymers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 41, n. 3, pp. 427–456.
- [14] Govindjee, S., Zoller, M. J., & Hackl, K., 2019. A fully-relaxed variationally-consistent framework for inelastic micro-sphere models: Finite viscoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 127, pp. 1–19.
- [15] Holzapfel, G. A. & Gasser, T. C., 2001. A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: Continuum basis, computational aspects and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, n. 34, pp. 4379 – 4403.